

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Untersuchungen zur 3-Färbbarkeit von Transversalmatroiden mit Sage

Stephanie Adolph

Erfurt, 10. April 2015

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

Selbstständigkeitserklärung	1
1. Einleitung	2
2. Präliminarien	4
2.1. Grundbegriffe der Graphentheorie	4
2.2. Färbungen und Flüsse in Graphen	6
3. Matroide	11
3.1. Grundlegende Definitionen	11
3.2. Minoren	15
3.3. Transversalmatroide	16
3.4. Dualität von Matroiden	19
3.5. Orientierte Matroide	20
3.6. Das Big Face Lattice	23
3.7. Erweiterung des Konzepts der Färbbarkeit von Graphen auf Matroide . .	26
3.8. Dreifärbbarkeit von Transversalmatroiden	28
4. Untersuchung spezieller Transversalmatroide in SAGE	32
4.1. Implementierung von Transversalmatroiden in SAGE	32
4.2. Bipartite Matchings mit dem Algorithmus von Hopcroft und Karp	34
4.3. Die verdreifachte Vierpunktgerade T_1	37
4.3.1. Eigenschaften von T_1	38
4.3.2. Untersuchung der positiven Kolinien von T_1	38
4.3.3. Zusammenfassung der Analyse von T_1	45
4.4. Die verdreifachte Fanoebene T_2	46
4.4.1. Eigenschaften von T_2	47
4.4.2. Untersuchung der positiven Kolinien von T_2	49
4.4.3. Zusammenfassung der Analyse von T_2	55
5. Zusammenfassung und Ausblick	56
A. Anhang	57
A.1. Quelltexte	57
A.1.1. Implementierung des Algorithmus von Hopcroft und Karp	57
A.1.2. Implementierung der Transversalmatroide in SAGE	59
A.1.3. Implementierung der Kolinien-Suche	65
A.2. Auswahl positiver Kolinien	69
A.2.1. Kolinien der verdreifachten Vierpunktgeraden T_1	69
A.2.2. Kolinien der verdreifachten Fanoebene T_2	71
Literatur	98

Abbildungsverzeichnis

2.1. Ein planarer Graph G und seine Gebiete	6
2.2. Ein planarer Graph G und sein Dual	7
2.3. Ein planarer Digraph D und sein Dual	8
3.1. Transversale	17
3.2. Ein Digraph als Grundlage eines Gammoids	18
3.3. Eine Partialordnung auf Kovektoren	24
3.4. Intervalle der Länge 2 und 3 in einem <i>Big Face Lattice</i> $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$	26
3.5. Das Gitter von \mathcal{O}/L , L eine Kolinie von \mathcal{O}	29
4.1. Vierpunktgerade $U_{2,4}$	37
4.2. Die verdreifachte Vierpunktgerade T_1 mit einer Basis	37
4.3. Bipartiter Graph B_1 der verdreifachten Vierpunktgerade mit maximalem Matching	38
4.4. Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_3	40
4.5. Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_4	41
4.6. Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_5	42
4.7. Die Fanoebene P_7	46
4.8. Die verdreifachte Fanoebene T_2 mit einer Basis	47
4.9. verdreifachte Fanoebene T_2 , alternative Darstellung	49
4.10. eine Kolinie L_+ von T_2 mit $ L_+ = 13$	50
4.11. eine Kolinie L_+ von T_2 aus Λ_2	52

Tabellenverzeichnis

4.1. Klassifizierung der Kolinien von T_1 anhand ihrer Kopunkte	39
4.2. Einteilung der positiven Kolinien von T_1 in Äquivalenzklassen	45
4.3. Klassifizierung der Kolinien für die verdreifachte Fanoebene	48
4.4. Kolinien L_+ von T_2 mit Kardinalität 12 und genau 3 einfachen und einem nichteinfachen Kopunkt	52
4.5. Kolinien L_+ von T_2 mit Kardinalität 12 und genau 4 einfachen und einem nichteinfachen Kopunkt	53
4.6. Kolinien L_+ von T_2 mit Kardinalität 12 und 5 oder mehr einfachen Ko- punkten	55
4.7. Einteilung der positiven Kolinien von T_2 in Äquivalenzklassen	55
A.1. Kolinien L_+ von T_1 mit 3 einfachen Kopunkten und mit $A_1 \subset L_+$ und $A_i \not\subset L_+$ für $i \neq 1$	69
A.2. Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_1 mit $A_1, A_{14} \subset L_+$	71
A.3. Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_2 und Λ_3 mit $A_1 \subset L_+$	72
A.4. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_4	73
A.5. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_5	74
A.6. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_6 mit $A_1 \subset L_+$	75
A.7. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_7 mit $A_1 \subset L_+$	76
A.8. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_8 mit $A_1 \subset L_+$	77
A.9. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_9 mit $A_1 \subset L_+$	78
A.10. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{10} mit $A_1 \subset L_+$	79
A.11. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{11}	80
A.12. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{12}	81
A.13. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{13}	82
A.14. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{14}	83
A.15. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{15}	84
A.16. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{16}	85
A.17. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{17}	86
A.18. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{18}	87
A.19. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{19}	88
A.20. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{20}	89
A.21. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{21}	90
A.22. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{22}	91
A.23. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{23}	92
A.24. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{24}	93
A.25. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{25}	94
A.26. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{26}	95
A.27. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{27}	96
A.28. einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{28}	97

Listings

4.1. Pseudocode Algorithmus Augmentierende Pfade	36
A.1. Implementierung Algorithmus Augmentierende Pfade	57
A.2. Implementierung Maximales Matching	59
A.3. Implementierung Klasse Transversalmatroid	59
A.4. Beispiel: Berechnung eines maximalen Matchings für eine gegebene Menge	63
A.5. Script zur Suche von Kolinien mit mehr einfachen als nichteinfachen Ko- punkten	65
A.6. SQL-Vorlage für das Script zur Koliniensuche	69

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

10. April 2015

Stephanie Adolph

1. Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit einer Struktur beschäftigen, welche das Konzept der Unabhängigkeit aus der Linearen Algebra verallgemeinert und auf verschiedenste Gebiete der Mathematik anwendbar macht. Diese Struktur heißt *Matroid* und enthält im Wesentlichen eine endliche Grundmenge zusammen mit Systemen von Teilmengen, die als *abhängig* oder *unabhängig* bezeichnet werden. Ein Beispiel aus der linearen Algebra ist eine endliche Menge von Vektoren, von denen man jede Teilmenge genau dann unabhängig nennt, wenn die darin enthaltenen Vektoren linear unabhängig sind. Ein weiteres Beispiel aus einem anderen Gebiet der Mathematik ist die Graphentheorie, die uns im Rahmen dieser Arbeit besonders interessiert. Hier bezeichnet man eine Teilmenge der Kanten eines Graphen als unabhängig, wenn sie keinen Kreis enthält.

In dieser Arbeit stellen wir zunächst eine Erweiterung des Konzepts der Knotenfärbbarkeit von Graphen auf Matroide vor. Dabei nutzen wir die Tatsache, dass eine k -Knotenfärbung eines planaren gerichteten Graphen äquivalent ist zur Existenz eines NZ- k -Flusses in dessen Dual. Für nichtplanare Graphen ist jedoch kein Dual definiert. Hier setzt die Erweiterung auf orientierte Matroide an, denn für diese ist immer ein Dual definiert. Wie bei dualen Graphen setzen wir die k -Färbbarkeit eines orientierten Matroids gleich mit der Existenz eines sogenannten NZ- k -Koflusses, das ist ein NZ- k -Fluss im Dual. Die chromatische Zahl eines orientierten Matroids ist ein recht junger Begriff, vgl. [HN06]. Im Gegensatz zu Graphen ist unklar, ob die chromatische Zahl invariant für alle Orientierungen eines Matroids ist.

Wir stellen auch eine Erweiterung der Hadwiger-Vermutung $H(3)$ für Graphen auf orientierte Matroide vor. Sie besagt, dass ein orientierbares Matroid ohne NZ-3-Kofluss einen K_4 -Minor hat. Im Gegensatz zu $H(3)$ für Graphen ist die Verallgemeinerung auf orientierbare Matroide jedoch nur eine Vermutung und nicht bereits bewiesen.

Der Fokus liegt für uns auf der Untersuchung von Transversalmatroiden, denn diese haben keinen K_4 -Minor. Dies motiviert die Fragestellung, ob für sie die Umkehrung von $H(3)$ gilt und sie dreifärbbar sind.

Da Transversalmatroide aber nicht orientiert sind, und offen ist, ob die chromatische Zahl eine Invariante für alle Orientierungen eines Matroids ist, nähern wir uns der Fragestellung von einer anderen Seite.

Wir können anhand einer besonderen Eigenschaft einer unter Minoren abgeschlossenen Klasse nichtorientierter Matroide die Dreifärbbarkeit aller ihrer schleifenfreien Orientierungen folgern. Diese Eigenschaft ist die Existenz einer Kolinie, auf der mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen. Was das genau bedeutet und wie das mit der Dreifärbbarkeit der Orientierungen zusammenhängt, werden wir im Rahmen dieser Arbeit vorstellen und an 2 ausgewählten Beispielen untersuchen.

Ursprünglich hatten die Professoren Winfried Hochstättler und Louis Goddyn die Vermutung, dass es so eine Kolinie in Transversalmatroiden immer gibt. Die Beispiele, die wir hier untersuchen, stellten sich jedoch im Beweis als so schwierig heraus, dass diese Vermutung in Frage gestellt wurde. Für die verdreifachte Vierpunktgerade haben sie durch aufwendige Handrechnung gezeigt, dass diese kein Gegenbeispiel ist, jedoch vermutet, dass sich ein Gegenbeispiel finden ließe, wenn man ein etwas komplexeres Beispiel wählt. Dieses Beispiel ist die verdreifachte Fanoebene, welche wir hier ebenfalls untersuchen.

Für unsere Untersuchungen nutzen wir die Mathematik-Software *SAGE*. Dazu implementieren wir ein Modell für Transversalmatroide, um anschließend alle Kolinien und Kopunkte unserer zwei Beispielmatroide systematisch zu durchsuchen. Da die unabhängigen Mengen eines Transversalmatroids äquivalent sind zu Matchings in bipartiten Graphen, benutzen wir für diese Implementierung einen Algorithmus, der maximale Matchings in bipartiten Graphen ermittelt. Diesen Algorithmus, der von Hopcroft und Karp entwickelt wurde, vgl. [HK73], werden wir ebenfalls kurz vorstellen.

2. Präliminarien

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Begriffe, die für das Verständnis dieser Arbeit nötig sind, wiederholt. Dies sind v.a. Grundbegriffe aus der Graphentheorie. Das Konzept der Knotenfärbung wird kurz wiederholt, außerdem werden Minoren eingeführt.

2.1. Grundbegriffe der Graphentheorie

Die nachfolgenden Definition orientieren sich, soweit nicht anders angegeben, an [Sei13] und [Aig76].

Definition 2.1.1 (Graph). Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Knotenmenge oder Eckenmenge V und einer Multimenge $E = \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ von ungeordneten Paaren $\{u, v\}$, genannt Kanten.

Wenn ein ungeordnetes Paar mehrfach in der Kantenmenge E vorkommt, spricht man von *parallelen Kanten*, eine Kante $\{u, u\} = \{u\}$ nennt man *Schleife*. Ein Graph ohne parallele Kanten und ohne Schleifen heißt *einfach* oder *schlicht*.

Benachbarte Knoten u, v , also solche, die durch eine Kante $\{u, v\}$ von G verbunden sind, nennt man *adjazent*, und man sagt, sie *inzidieren* mit der Kante $\{u, v\}$ oder sie sind *inzident* zu dieser Kante. Benachbarte oder *adjazente* Kanten sind solche, die einen gemeinsamen Endknoten haben, also $e_1 \cap e_2 = \{v\}$ für ein $v \in V$.

Definition 2.1.2 (Vollständiger Graph K_k). vgl. [Die10, S. 3]. Ein schlichter Graph $G(V, E)$, bei dem jeder Knoten zu allen anderen Knoten adjazent ist, heißt *vollständig*. Er wird mit K_k notiert, wobei $k = |V|$ ist.

Definition 2.1.3 (Bipartiter Graph). vgl. [Aig06, S. 106]. Ein Graph $G(V, E)$ heißt *bipartit*, wenn wir dessen Knotenmenge so in 2 disjunkte Teilmengen $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ zerlegen können, dass jede Kante von G einen Knoten in V_1 hat und einen Knoten in V_2 , also wenn $e \cap V_1 \neq \emptyset$ und $e \cap V_2 \neq \emptyset$ für alle $e \in E$ ist.

Definition 2.1.4 (Matching). vgl. [Aig06, S. 137]. Sei $G(V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Menge $M \subseteq E$ paarweise nichtadjazenter Kanten heißt *Matching*. Die *Matchingzahl* von G gibt die größtmögliche Kardinalität eines Matchings von G an. Ein Matching heißt *Maximum Matching*, wenn seine Kardinalität mit der Matchingzahl übereinstimmt.

Definition 2.1.5 (Digraph). Ein *Digraph* $D = (V, E)$ besteht aus einer endlichen *Knotenmenge* oder *Eckenmenge* V und einer Multimenge $E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ von *geordneten Paaren* (u, v) , genannt *Pfeile* oder gerichtete Kanten.

Wenn $e = (u, v)$ ein Pfeil von D ist, dann bezeichnen wir mit $e^+ := v$ den *Endknoten* von e und mit $e^- := u$ den *Anfangsknoten* von e .

Definition 2.1.6 (Orientierung). Sei $D(V, E_D)$ ein Digraph. Der Graph $G(V, E_G)$ mit $E_G := \{(u, v) \mid (u, v) \in E_D\}$ ist der dem Digraphen D *unterliegende Graph*. Jeder Digraph, für den ein Graph G ein unterliegender Graph ist, ist eine *Orientierung* von G .

Definition 2.1.7 (Weg). vgl. [Aig76, S. 5,220]. Sei $G(V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Ein *Weg* von einem Knoten v_0 zu einem Knoten v_k ist eine Folge von Pfeilen oder Kanten $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ aus D mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$. Zwei Wege von v_0 nach v_k heißen *knotendisjunkt*, wenn sie außer v_0 und v_k keinerlei Knoten gemeinsam haben.

Definition 2.1.8 (Kreis). Ein *Kreis* C_n ist eine Folge paarweise verschiedener Knoten u_1, u_2, \dots, u_n mit $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$, $i = 1, \dots, n-1$ und $\{u_n, u_1\} \in E$. Die *Länge* von C_n ist die Anzahl n der Knoten bzw. Kanten.

Definition 2.1.9 (Zusammenhang). Sei $G(V, E)$ ein Graph. Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen *verbindbar* und sind *zusammenhangsäquivalent* $u \sim_z v$, wenn ein Kantenzug $\{\{u, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \dots, \{w_k, v\}\} \subseteq E$ von u nach v existiert. G heißt *zusammenhängend*, wenn 2 beliebige Knoten von G stets verbindbar sind. Zusammenhangsäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf V .

Definition 2.1.10 (Komponenten). Die durch diese Zusammenhangsäquivalenz erzeugten Graphen $G_i(V_i, E_i)$ mit $E_i := \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E \text{ und } u, v \in V_i\}$ nennt man die *Zusammenhangskomponenten* oder einfach *Komponenten* von G .

Definition 2.1.11 (Rang und Korang). vgl. [Har69, Kor. 4.5(b), 4.6(b)]. Sei $G(V, E)$ ein Graph mit k Zusammenhangskomponenten. Wir definieren den *Rang* bzw. *Kozyklenrang* von G als $r(G) := |V| - k$ und den *Korang* bzw. *Zyklenrang* von G als $r^*(G) := |E| - |V| + k$.

Definition 2.1.12 (Kokreis). Sei $G(V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Eine Kantenmenge $T \subseteq E$ heißt *trennende Kantenmenge*, wenn $G'(V, E \setminus T)$ nicht zusammenhängend ist. Eine minimale trennende Kantenmenge, d.h. eine trennende Kantenmenge, für die keine echte Teilmenge trennend ist, heißt *Kokreis*.

Definition 2.1.13 (Kantenkontraktion). Sei $G(V, E)$ ein Graph und $e^* = \{u_1, u_2\}$ eine Kante in G . *Kantenkontraktion* ist eine Operation auf G . Sie wird bezeichnet mit $G/e^* := (V', E')$ mit

$$\begin{aligned} u^* &\notin V \\ V' &:= V \setminus e^* \cup \{u^*\} \\ E' &:= \{e \in E \mid e \cap e^* = \emptyset\} \cup \{\{v, u^*\} \mid \{v, u_1\} \in E \text{ oder } \{v, u_2\} \in E\}. \end{aligned}$$

Dabei wird die Kante e^* mit ihren inzidenten Knoten entfernt und dafür ein neuer Knoten u^* eingefügt. Für jeden Knoten, der mit u_1 oder u_2 oder mit beiden benachbart war, wird eine neue Kante zu u^* eingefügt.

Definition 2.1.14 (Minor). vgl. [EM11]. Ein Graph G' heißt *Minor* eines Graphen $G(V, E)$, wenn er durch ein- oder mehrfache Anwendung der folgenden Graphenoperationen aus G erzeugt werden kann:

- (i) Kantenkontraktion: $G' = G/e$ mit $e \in E$.
- (ii) Löschung von Kanten: $G' = G(V, F)$, wobei $F \subseteq E$.
- (iii) Löschung isolierter Knoten: $G' = G'(V', E)$ mit $\{v \in V \mid \exists e \in E : v \in e\} \supseteq V' \supseteq V$

2.2. Färbungen und Flüsse in Graphen

Planare Graphen und Dualität

Definition 2.2.1 (planarer Graph). vgl. [Weib]. Ein Graph heißt *planar* oder *plättbar*, wenn er auf einer Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich die Kanten des Graphen nicht kreuzen. Die von Kanten umschlossenen Flächen heißen *Gebiete* von G .

In Abbildung 2.1 ist ein planarer Graph $G(V, E)$ mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_5\}$, Kanten $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ und Gebieten $F = \{f_1, \dots, f_3\}$ abgebildet.

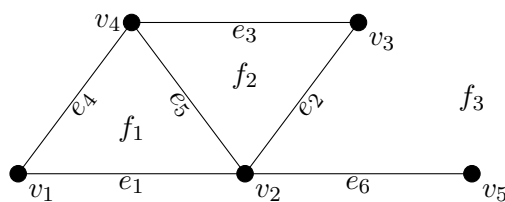


Abbildung 2.1.: Ein planarer Graph G und seine Gebiete

Definition 2.2.2 (Dualer Graph). vgl. [Har69, S. 113], [Whi32, S. 351]. Haben wir eine planare Darstellung eines zusammenhängenden Graphen G gegeben, so konstruieren wir sein *Dual* G^* wie folgt: Wir platzieren einen Knoten in jedem Gebiet von G , einschließlich des umgebenden äußeren Gebiets. Wenn 2 Gebiete durch eine Kante x von G getrennt sind, verbinden wir die korrespondierenden Knoten in diesen Gebieten mit einer Kante x^* , welche die Kante x kreuzt, aber keinerlei andere Kanten.

Falls G nicht zusammenhängend ist und die k Komponenten $G_1(V_1, E_1), \dots, G_k(V_k, E_k)$ hat, dann definieren wir G^* anhand der Duale seiner Komponenten $G_1^*(V_1^*, E_1^*), \dots, G_k^*(V_k^*, E_k^*)$ durch $G^* := G^*(V^*, E^*)$ mit $V^* = \bigcup_{i=1}^k V_i^*$ und $E^* = \bigcup_{i=1}^k E_i^*$, vgl. [Whi32, S. 353].

Im Allgemeinen kann ein plättbarer Graph G unterschiedliche planare Einbettungen und somit auch unterschiedliche Duale besitzen. Für jedes Dual G^* gilt aber, dass es ebenfalls planar ist und ein Dual von G^* ist $(G^*)^* = G$, vgl. [Har69, S. 114]. Wenn G aber 3-zusammenhängend ist¹, dann ist die planare Einbettung von G und somit auch dessen Dual G^* eindeutig.

Der Graph aus Abbildung 2.1 ist zusammen mit seinem dualen Graphen $G^*(V^*, E^*)$ mit $V^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ und $E^* = \{e_1^*, \dots, e_6^*\}$ in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Darstellung ist angelehnt an [Die10, S. 118], Abbildung 3.6.1.

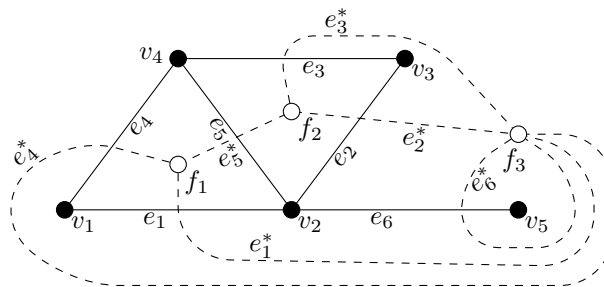


Abbildung 2.2.: Ein planarer Graph G und sein Dual

Wir stellen fest, dass wir die Kanten von G und G^* eindeutig einander zuordnen können, mittels einer Bijektion, die einer Kante e von G gerade die Kante aus G^* zuordnet, welche die an e grenzenden Gebiete verbindet. Wir bezeichnen diese der Kante e zugeordnete duale Kante mit e^* .

Für einen planaren Digraphen D können wir analog dazu ebenfalls ein Dual D^* definieren: Dazu orientieren wir die Kanten in D^* in einer speziellen Art und Weise: Wenn wir der Kante e in D von ihrem Startknoten zum Endknoten folgen, kreuzen wir e^* . Dabei soll e^* so orientiert sein, dass sie aus einer Drehung von e im Uhrzeigersinn hervorgeht, vgl. [NR99, S. 15], [Die10, S. 174] und Abbildung 2.3.

¹Ein Graph G heißt k -zusammenhängend, wenn man mindestens k Knoten aus G entfernen muss, um einen nicht mehr zusammenhängenden Untergraphen zu erhalten.

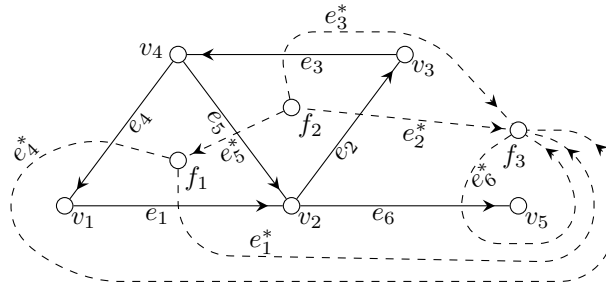


Abbildung 2.3.: Ein planarer Digraph D und sein Dual

Satz 2.2.3 (Dualität von Kreisen und Kokreisen). vgl. [Die10, Prop. 3.6.1] Sei $G(V, E)$ ein planarer Graph, dann ist $C \subseteq E$ genau dann die Kantenmenge eines Kreises in G , wenn $C^* := \{e^* \mid e \in C\}$ ein minimaler Schnitt bzw. Kokreis in G^* ist.

Knotenfärbungen

Definition 2.2.4 (Färbung, chromatische Zahl). vgl. [Die10, Kap. 4]. Eine k -Färbung eines Graphen $G(V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $c(u) \neq c(v)$ für je 2 adjazente Knoten $u, v \in V$. Oft interessiert man sich für das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das eine k -Färbung von G existiert. Dieses k wird durch die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ bezeichnet. Wenn $\chi(G) \leq k$ gilt, so sagt man, dass G k -färbbar ist.

Damit ein Graph überhaupt knotenfärbbar ist, muss er schleifenlos sein. Die Existenz paralleler Kanten hat offenbar keinen Einfluss auf die Färbbarkeit.

Satz 2.2.5 (Hadwiger-Vermutung $H(k)$). vgl. [Die10, S. 196], [Had43]. Wenn ein Graph färbbar ist mit $\chi(G) \geq k$, dann hat er einen K_k als Minor.

Diese Vermutung ist bewiesen für die Fälle $k \leq 6$, für $k > 6$ ist das Problem offen. Wir werden in Abschnitt 3.7 eine Übertragung dieser Vermutung auf Matroide vorstellen. Der Fall $H(4)$ ist äquivalent zum Vierfarbensatz:

Satz 2.2.6 (Vierfarbensatz). vgl. [Weia]. Jeder planare schleifenlose Graph ist vierfärbbar.

Flüsse

Definition 2.2.7. vgl. [Die10, S. 161] und [NR99, Kap. 31.1]. Ein *Rundfluss* in einem Digraph ist eine Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$, sodass für jeden Knoten die Summe der einfließenden Werte $\sum_{e^+=v} f(e)$ gleich der Summe der ausfließenden Werte $\sum_{e^-=v} f(e)$ ist.

Daraus folgt, dass für Rundflüsse f für jedes $v \in V$ die Summe über die zu v inzidenten Kanten $f(v) := \sum_{\{e \in E \mid v=e^+\}} f(e) + \sum_{\{e \in E \mid v=e^-\}} -f(e) = 0$ ist. Dabei ist $f(v)$ eine verkürzende Schreibweise für diese Summe. Erweitert man dies auf eine beliebige Teilmenge $S \subseteq V$ von Knoten, erhält man

Satz 2.2.8. vgl. [Die10, Prop. 5.1.1] Ist f ein Rundfluss und $S \subseteq V$, so gilt

$$\begin{aligned} f(S) &= \sum_{\{e \in E \mid e^+ \in S\}} f(e) + \sum_{\{e \in E \mid e^- \in S\}} -f(e) \\ &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{\{e \in E \mid e^+ = v\}} f(e) + \sum_{\{e \in E \mid e^- = v\}} -f(e) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definition 2.2.9 (*k*-fluss, Nowhere-Zero-Fluss, NZ-*k*-Fluss). Sei f ein Rundfluss. f heißt *k*-Fluss ($k \in \mathbb{N}$), falls $|f(e)| < k \forall e \in E$. f heißt *Nowhere-Zero-Fluss* oder *NZ-Fluss*, falls $f(e) \neq 0 \forall e \in E$. f heißt *NZ- k -Fluss*, falls f ein *k*-Fluss und ein NZ-Fluss ist, also $0 < |f(e)| < k \forall e \in E$.

Satz 2.2.10. vgl. [NR99, Satz 4], [Die10, Kor. 5.1.2]. Sei $G(V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann hat G einen NZ-*k*-Fluss mit einem $k \in \mathbb{N}$ für jede seiner Orientierungen genau dann, wenn G keine Brücke enthält. Eine Brücke ist eine Kante, für den der Graph $G - e = G'(V, E \setminus \{e\})$ mehr Komponenten hat als G selbst.

Definition 2.2.11. Die *Flusszahl* $\phi(D)$ ist das kleinste $k \in \mathbb{Z}$, sodass ein NZ-*k*-Fluss im Digraphen D existiert.

Der Zusammenhang zwischen Flüssen und Färbungen

Sei G ein planarer Graph mit seinem Dual G^* und sei $c : V^* \rightarrow \{1, \dots, k\}$ eine *k*-Färbung von G^* . Dann definieren wir eine Abbildung $\phi^* : E^* \rightarrow \{0, \pm 1, \dots, \pm k - 1\}$ durch $\phi^*(e^*) = \phi^*((e^{*-}, e^{*+})) = c(e^{*+}) - c(e^{*-})$, wobei e^{*-} der Startknoten und e^{*+} der Endknoten von e^* in G^* ist. Weiterhin definieren wir $\phi : E \rightarrow \{0, \pm 1, \dots, \pm k - 1\}$ durch $\phi(e) = \phi^*(e^*)$ für die korrespondierenden Kanten von G . Die Abbildung ϕ ordnet also jeder Kante von G die Differenz zu, die sich aus der Färbung des rechts von ihr liegenden Gebiets und der Färbung des links von ihr liegenden Gebiets bildet, vgl. [NR99, S. 16].

Wir erhalten somit den folgenden Satz.

Satz 2.2.12. vgl. [NR99, Satz 5], [Die10, Satz 5.5.3] Für einen planaren Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die Gebiete von G sind k -färbbar.
- (ii) G^* ist k -färbbar.
- (iii) Es existiert ein NZ- k -Fluss in G .

Mit Satz 2.2.8 gilt für alle Kokreise C^* von G^* , dass $\phi^*(C^*) = 0$ ist. Daraus folgt mit Satz 2.2.3, dass $\phi(C) = 0$ für jeden Kreis C von G ist.

Eine sehr detaillierte Herleitung des Zusammenhangs zwischen Färbungen und Flüssen kann man in [Die10], Kapitel 5.5 finden. Die Notation unterscheidet sich allerdings stark von der hier verwendeten.

3. Matroide

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit wichtigsten Begriffe aus der Theorie der Matroide zusammengefasst. Zunächst werden in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 grundlegende Definitionen und Axiomensysteme vorgestellt. Eine sehr gründliche Einführung in die Theorie nichtorientierter Matroide bietet [GM12]; das Standardwerk ist [Oxl11].

In Abschnitt 3.5 werden orientierte Matroide eingeführt, die das Konzept der Orientierung von Graphen auf Matroide erweitern. Das Standardwerk in diesem Bereich ist [Bjö+99]. In Abschnitt 3.6 wird das Big Face Lattice vorgestellt. Dieses Konzept benötigen wir später, wenn wir die in Abschnitt 3.7 vorgestellte Erweiterung des Begriffs der Färbbarkeit orientierter Matroide für nichtorientierte Transversalmatroide nutzen wollen, was in Abschnitt 3.8 geschieht.

3.1. Grundlegende Definitionen

Ein Matroid ist eine Mengenstruktur, die das Konzept der linearen Unabhängigkeit aus der Linearen Algebra erweitert. Es gibt viele äquivalente Definitionen.

Definition 3.1.1 (Matroid, Unabhängigkeitsaxiome). vgl. [GM12, Def. 1.3] Ein *Matroid* $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ ist eine endliche *Grundmenge* E zusammen mit einer Familie $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$ von Teilmengen von E , die folgende Eigenschaften hat:

- (I1) Es gilt $\mathcal{I} \neq \emptyset$. (nicht trivial)
- (I2) Wenn $X \in \mathcal{I}$ und $Y \subset X$, dann $Y \in \mathcal{I}$. (Abgeschlossenheit unter Teilmengenbildung)
- (I3) Wenn $X, Y \in \mathcal{I}$ und $|X| < |Y|$, dann gibt es ein $x \in Y \setminus X$, sodass $X \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. (Vergrößerungs- oder Austausch Eigenschaft)

Nachfolgend bezeichnen wir mit \mathcal{M} oder $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ stets ein Matroid, E dessen Grundmenge und \mathcal{I} wie in Definition 3.1.1.

Definition 3.1.2 (Abhängigkeit, Basis, Kreis). Die in \mathcal{I} enthaltenen Mengen heißen *unabhängig*, alle anderen Teilmengen von E heißen *abhängig*. Eine maximale unabhängige Menge nennt man *Basis*. Eine minimale abhängige Menge heißt *Kreis*, d.h. jede echte Teilmenge eines Kreises ist unabhängig.

Wegen (I2) ist ein Matroid schon durch die Menge seiner Basen eindeutig bestimmt. Auch die Menge der Kreise legt ein Matroid eindeutig fest, vgl. [Oxl04, S. 9] und [GM12, Kap. 2].

Satz 3.1.3 (Basisaxiome). vgl. [GM12, Def. 2.4.]. Sei \mathcal{B} ein Mengensystem über einer endlichen Grundmenge E . Dann bildet \mathcal{B} die Menge der Basen eines Matroids über E genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B2) wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, dann $|B_1| = |B_2|$.

(B3) Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \setminus B_2$. Dann gibt es ein $y \in B_2 \setminus B_1$, sodass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ gilt.

Alle Basen eines Matroids haben also die gleiche Kardinalität $r(\mathcal{M})$, die auch als *Rang* des Matroids bezeichnet wird.

Satz 3.1.4 (Kreisaxiome). vgl. [Oxl04, Satz 3.1]

a) Sei \mathcal{M} ein Matroid und \mathcal{C} die Menge seiner Kreise. Dann genügt \mathcal{C} den folgenden Eigenschaften:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) Wenn $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und $C_1 \subseteq C_2$, dann $C_1 = C_2$.

(C3) Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ mit $C_1 \neq C_2$ und sei $e \in C_1 \cap C_2$. Dann gibt es ein $C_3 \in \mathcal{C}$ mit $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

b) Sei umgekehrt \mathcal{C} ein Mengensystem über einer endlichen Grundmenge E mit den Eigenschaften (C1), (C2) und (C3) und enthalte \mathcal{I} diejenigen Teilmengen I von E mit $C \not\subseteq I$ für alle $C \in \mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und die Menge seiner Kreise ist \mathcal{C} .

Satz 3.1.5 (Kreismatroid). Vgl. [Wel76, S. 10]. Sei $G = (E, V)$ ein Graph. Enthalte \mathcal{I} genau die Kantenmengen, die keinen Kreis von G enthalten. Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid mit den unabhängigen Mengen \mathcal{I} und wird als *Kreismatroid* $\mathcal{M}(G)$ bezeichnet. Die Kreise von G sind die Kreise \mathcal{C} des Matroids $\mathcal{M}(G)$, vgl. [Oxl04, S. 6].

Definition 3.1.6 (graphisches Matroid). Ein Matroid, welches isomorph zu einem Kreismatroid ist, wird als *graphisches Matroid* bezeichnet.

Sei $G(V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann sind die Basen von $\mathcal{M}(G)$ genau die maximalen Kantenmengen in G , welche keinen Kreis enthalten, also die Kantenmengen der G aufspannenden Bäume. Die Kardinalität der Basen ist gleich $r(\mathcal{M}(G)) = |V| - 1 = r(G)$. Vgl. [Oxl04, S. 9].

Satz 3.1.7 (Vektormatroid). vgl. [Oxl04, S. 4]. Sei A eine Matrix über dem Körper \mathbb{K} , also $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Spaltenindizes $E = \{1, \dots, n\}$. \mathcal{I} enthalte genau diejenigen Teilmengen von E , für welche die zugeordneten Spalten von A jeweils eine Menge linear unabhängiger Vektoren über \mathbb{K} bilden. Dann ist $\mathcal{M}[A] = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und wird *Vektormatroid von A* genannt.

Definition 3.1.8 (Linearität bzw. \mathbb{K} -Repräsentierbarkeit, Regularität). Ist ein Matroid \mathcal{M} isomorph zu einem $\mathcal{M}[A]$ für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dann heißt \mathcal{M} *linear* oder genauer *\mathbb{K} -repräsentierbar* und die Matrix A heißt *\mathbb{K} -Repräsentation von \mathcal{M}* .

Matroide, die \mathbb{F}_2 - bzw. \mathbb{F}_3 -repräsentierbar sind, heißen *binär* bzw. *ternär*. Matroide, die über allen Körpern repräsentierbar sind, heißen *regulär*.

Definition 3.1.9 (Uniformes Matroid). vgl. [Wel76, S. 10]. Sei E eine Menge mit $|E| = n$ und sei \mathcal{I} die Menge aller Teilmengen von E mit Kardinalität $\leq r$. Dann ist $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ ein Matroid vom Rang r und wird bezeichnet als das *uniforme Matroid $U_{r,n}$* .

Definition 3.1.10 (Rang). vgl. [GM12, Kap. 2.3.1] Sei $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $A \subseteq E$. Der *Rang* von A ist die Kardinalität der größten unabhängigen Teilmenge von A , $r(A) := \max_{I \subseteq A} \{|I| \mid I \in \mathcal{I}\}$. Den Rang kann man auch auffassen als eine Funktion $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}_0$.

Satz 3.1.11 (Rangaxiome). vgl. [GM12, Satz 2.15] Eine Abbildung $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist genau dann die Rangfunktion auf einem Matroid $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$, wenn sie die folgenden *Rangaxiome* für alle $A, B \subseteq E$ erfüllt:

- (r1) $0 \leq r(A) \leq |A|$.
- (r2) Wenn $A \subseteq B$, dann $r(A) \leq r(B)$.
- (r3) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

Die unabhängigen Mengen von \mathcal{M} sind gerade die Teilmengen $I \subseteq E$ mit $r(I) = |I|$.

Definition 3.1.12 (Unterraum). vgl. [GM12, Def. 2.16]. Eine Menge $F \subseteq E$ heißt *Unterraum*, *Flat* oder *abgeschlossene Menge*, falls das Hinzufügen eines beliebigen Elements $x \in E \setminus F$ den Rang erhöht, also wenn $r(F \cup \{x\}) > r(F)$ für alle $x \in E \setminus F$ ist.

Jedes Matroid hat genau einen Rang-0-Unterraum. Dies ist die Menge aller Schleifen von \mathcal{M} , bzw. die leere Menge, falls \mathcal{M} keine Schleifen hat. Wenn r den Rang von \mathcal{M} bezeichnet, dann ist der einzige Rang- r -Unterraum von \mathcal{M} gerade dessen Grundmenge E . Die Unterräume vom Rang $r - 1$ nennt man *Kopunkte* oder *Hyperebenen* von \mathcal{M} , die Unterräume vom Rang $r - 2$ heißen *Kolinien*. Man sagt auch, Kopunkte haben den *Korang* 1 und Kolinien haben den *Korang* 2.

Auch anhand der Unterräume kann ein Matroid eindeutig definiert werden:

Satz 3.1.13 (Unterraumaxiome). vgl. [Oxl11, 31f]. Eine Familie \mathcal{F} von Teilmengen einer endlichen Menge E ist genau dann die Familie der Unterräume eines Matroids auf der Grundmenge E , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (F1) $E \in \mathcal{F}$.
- (F2) Wenn $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, dann $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
- (F3) Sei $F \in \mathcal{F}$ und seien $\{F_1, \dots, F_k\}$ die minimalen Mengen aus \mathcal{F} , die F als echte Teilmenge enthalten. Dann ist $\bigcup_{i=1}^k (F_i \setminus F)$ eine Partitionierung von $E \setminus F$.

Wie der nächste Satz zeigt, ist jeder Unterraum außer E selbst ein Schnitt von Hyperebenen. Daher ist es nicht überraschend, dass auch die Menge der Hyperebenen ein Matroid eindeutig festlegen. Auf die Wiedergabe des Axiomensystems verzichten wir an dieser Stelle.

Satz 3.1.14. vgl. [Oxl11, Prop. 1.7.8] Sei F ein Unterraum des Matroids \mathcal{M} mit $r(F) = r(\mathcal{M}) - k$, $k \geq 1$. Dann gibt es eine Menge $\{H_1, \dots, H_k\}$ von Hyperebenen, sodass $F = \bigcap_{i=1}^k H_i$.

Sei L beispielsweise eine Kolinie von \mathcal{M} und seien H_1, \dots, H_k die Kopunkte mit $L \subset H_i$, $1 \leq i \leq k$. Dann ist der Schnitt von je 2 dieser Kopunkte gleich L . Außerdem kann man wegen (F3) anhand dieser Kopunkte eine Partitionierung des Komplements von L bilden:

$$E \setminus L = (H_1 \setminus L) \cup \dots \cup (H_k \setminus L),$$

wobei die Mengen $(H_i \setminus L)$, $1 \leq i \leq k$, paarweise disjunkt sind.

Definition 3.1.15 (Abschluss). vgl. [Oxl11, Def. 1.4.1]. Sei r die Rangfunktion des Matroids $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$. Wir definieren

$$\text{cl} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad \text{cl}(A) := \{x \in E \mid r(A \cup x) = r(A)\}.$$

Diese Funktion definiert einen *Abschlussoperator* auf \mathcal{M} , d.h. es gilt für alle $A, B \subseteq E$:

- (i) $A \subseteq \text{cl}(A)$
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$
- (iii) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$, vgl. [Aig76, S. 16].

Die Menge \mathcal{F} der Unterräume von \mathcal{M} enthält also genau die Mengen $F \subseteq E$ mit $\text{cl}(F) = F$, vgl. [Oxl11, S. 28].

Sei $A \subseteq E$. Wir sagen, dass A die Menge $\text{cl}(A)$ *aufspannt* oder *erzeugt*. Wir bezeichnen A als \mathcal{M} *aufspannend*, wenn $r(A) = r(\mathcal{M})$ oder äquivalent dazu, wenn $\text{cl}(A) = E$.

Definition 3.1.16 (Schleifen, Koschleifen, einfaches, koeinfaches Matroid). vgl. [Aig76, S. 18] und [GM12, Def. 2.8].

- (i) Ein Element $e \in E$ heißt *Schleife*, wenn e in keiner Basis von \mathcal{M} enthalten ist, oder äquivalent dazu, wenn $e \in \text{cl}(\emptyset)$.
- (ii) Gilt für $p, q \in E$, dass $\text{cl}(p) = \text{cl}(q)$, so heißen p und q *parallel*.
- (iii) Ein Element, welches in allen Basen von \mathcal{M} enthalten ist, heißt *Brücke* oder *Isthmus*.
- (iv) Ein Matroid, welches weder Schleifen noch parallele Elemente enthält, heißt *einfach*.
- (v) Ein Matroid ohne Brücken und ohne koparallele Elemente heißt *koeinfach*.

Satz 3.1.17. Äquivalent zu den o.g. Definitionen von Brücken und Schleifen gilt folgendes, vgl. [Oxl11, S. 31]:

- (i) Eine Brücke ist in keinem Kreis enthalten.
- (ii) Eine Schleife ist in keinem Kokreis enthalten.

3.2. Minoren

Im folgenden bezeichnet \mathcal{M} oder $\mathcal{M}(E, \mathcal{I})$ ein beliebiges Matroid, E bezeichnet dessen Grundmenge und \mathcal{I} die Familie der unabhängigen Mengen von \mathcal{M} .

Definition 3.2.1. vgl. [GM12, Def. 3.1]. Wir definieren die folgenden Operationen auf Matroiden:

- (1) **Reduktion:** Sei $e \in E$ keine Brücke von \mathcal{M} . Dann hat das Matroid $\mathcal{M} - e$ die Grundmenge $E \setminus \{e\}$ und I ist genau dann unabhängige Menge von $\mathcal{M} - e$, wenn I unabhängig in \mathcal{M} ist und $e \notin I$.
- (2) **Kontraktion:** Sei $e \in E$ keine Schleife von \mathcal{M} . Dann hat das Matroid \mathcal{M}/e die Grundmenge $E \setminus \{e\}$ und $I \setminus \{e\}$ ist genau dann unabhängige Menge von \mathcal{M}/e , wenn I unabhängig in \mathcal{M} ist und $e \in I$.
Äquivalent hierzu ist:
- (2') **Kontraktion:** Sei $e \in E$ keine Schleife von \mathcal{M} . Dann hat das Matroid \mathcal{M}/e die Grundmenge $E \setminus \{e\}$ und I ist genau dann unabhängige Menge von \mathcal{M}/e , wenn $I \cup \{e\}$ unabhängig in \mathcal{M} ist und $e \notin I$.

Wenn e weder Brücke noch Schleife ist, kann man sich diese Operationen wie folgt veranschaulichen: Man partitioniert die unabhängigen Mengen von \mathcal{M} in 2 Familien $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \dot{\cup} \mathcal{I}_2$, sodass $\mathcal{I}_1 = \{I \in \mathcal{I} \mid e \in I\}$ und $\mathcal{I}_2 = \{I \in \mathcal{I} \mid e \notin I\}$. Dann bildet \mathcal{I}_1 nach Entfernung von e aus allen Mengen gerade die unabhängigen Mengen von \mathcal{M}/e und \mathcal{I}_2 bildet die unabhängigen Mengen von $\mathcal{M} - e$.

Satz 3.2.2. vgl. [GM12, Prop. 3.7]. \mathcal{M} ein Matroid mit Grundmenge E .

- (i) Wenn $e \in E$ keine Brücke von M ist, dann gilt $r(M - e) = r(M)$.
- (ii) Wenn $e \in E$ keine Schleife von M ist, dann gilt $r(M/e) = r(M) - 1$.

Definition 3.2.3 (Minor). vgl. [Nic12, S. 27].

- (i) Ein Matroid, welches aus \mathcal{M} mit einer Folge von Reduktionen erzeugt wird, heißt *Reduktionsminor* von \mathcal{M} .
- (ii) Ein Matroid, welches aus \mathcal{M} mit einer Folge von Kontraktionen erzeugt wird, heißt *Kontraktionsminor* von \mathcal{M} .
- (iii) Ein Matroid, welches aus \mathcal{M} mit einer Folge von Reduktionen und Kontraktionen erzeugt wird, heißt *Minor* von \mathcal{M} .

Die Reihenfolge, in der die Kontraktions- und Reduktionsoperationen angewendet werden, ist vertauschbar unter der Voraussetzung, dass die Minoroperationen wohldefiniert sind, vgl. [GM12, Prop. 3.8].

3.3. Transversalmatroide

Definition 3.3.1 (partielle Transversale). vgl. [Oxl04, S. 19] Sei $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge E . Eine Teilmenge $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ heißt *partielle Transversale* von \mathcal{A} , wenn es eine injektive Abbildung $\phi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ gibt, sodass $x_i \in A_{\phi(i)}$ für alle $1 \leq i \leq k$ ist. Eine partielle Transversale mit $k = m$ heißt *Transversale*.

Ein Beispiel mit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und $\mathcal{A} = (\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{5, 6\}, \{7\})$ ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Es stammt aus [Oxl04, S. 20].

Satz 3.3.2 (Transversalmatroide). vgl. [Oxl04, S. 20]. Sei $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge E . Sei \mathcal{I} die Menge aller partiellen Transversale von \mathcal{A} . Dann ist (E, \mathcal{I}) ein Matroid. Es wird *Transversalmatroid* genannt und wird mit $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ bezeichnet.

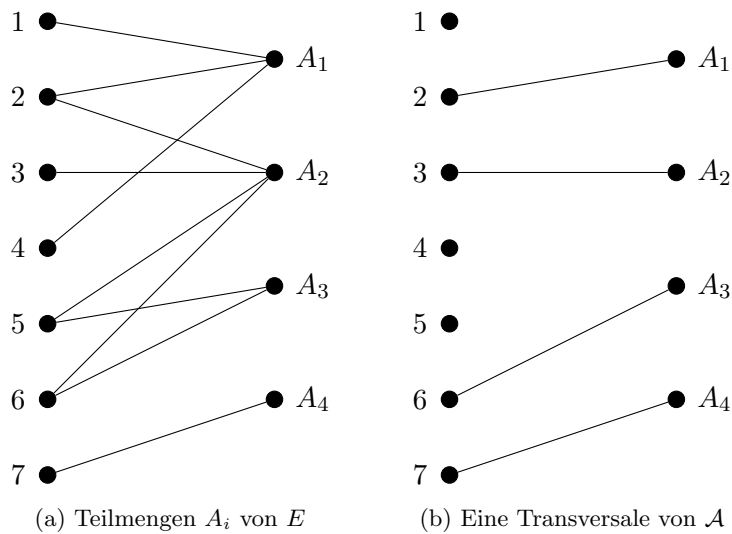


Abbildung 3.1.: Transversale

Wir können die Mengenfamilie \mathcal{A} mit E auch als einen gerichteten bipartiten Graphen $D(V_1 \dot{\cup} V_2, E_D)$ mit den Knotenmengen $V_1 := E, V_2 = \mathcal{A}$ auffassen. Dann ist (a, A_i) genau dann ein Pfeil von D , wenn $a \in A_i$ ist. Eine Menge $X \subseteq E$ ist genau dann partielle Transversale von \mathcal{A} , falls X durch $|X|$ knotendisjunkte Pfeile mit einer Teilmenge von E verbunden ist, vgl. [Aig76, S. 57]. Mit anderen Worten, die partiellen Transversalen von \mathcal{A} sind die Matchings des D unterliegenden ungerichteten bipartiten Graphen.

Satz 3.3.3. vgl. [Bon10, Satz 2.5]. Transversalmatroide sind repräsentierbar über allen unendlichen Körpern, also insbesondere auch über \mathbb{Q} und \mathbb{R} .

Jedes uniforme Matroid ist ein Transversalmatroid. Wie in [Oxl11, Bsp. 3.1.9] gezeigt wird, ist jeder Minor eines uniformen Matroids wieder uniform.

Für Transversalmatroide gilt dies im Allgemeinen leider nicht, denn die Kontraktion eines Transversalmatroids nicht notwendig wieder transversal, ein Gegenbeispiel liefert etwa [Oxl11, Bsp. 3.2.9]. Transversalmatroide sind jedoch abgeschlossen unter der Bildung von Reduktionsminoren: Sei $T \subseteq E$. Dann ist $\mathcal{M}[\mathcal{A}] \setminus T = \mathcal{M}[\mathcal{A} \setminus T]$, wobei $\mathcal{A} \setminus T = (A_1 \setminus T, A_2 \setminus T, \dots, A_m \setminus T)$, vgl. [Oxl11, Satz 3.2.8].

Die kleinste Klasse der Matroide, welche alle Transversalmatroide enthält und unter Minorenbildung abgeschlossen ist, sind die *Gammoid*, welche wir nun vorstellen wollen. Dazu benötigen wir vorab noch eine weitere Definition.

Definition 3.3.4. vgl. [Aig76, 57f]. Sei $D(V, E)$ ein gerichteter Graph und $A, B \subset V$ mit $|A| = |B|$. Wenn genau $|A|$ knotendisjunkte Wege von A nach B in D existieren, dann sagen wir, A ist *korreliert* mit B .

Definition 3.3.5 (Gammoide). vgl. [Aig76, 57f]. Sei $D(V, E)$ ein gerichteter Graph und $S, U \subset V$ nicht notwendig disjunkt. Die Familie jener Teilmengen von S , welche mit Teilmengen von U korreliert sind, bilden eine Familie unabhängiger Mengen eines Matroids. Die so erzeugbaren Matroide nennen wir *Korrelationsmatroide* oder *Gammoide* und bezeichnen sie mit $\mathcal{M}(S, D, U)$.

Ein Beispiel: Sei $\mathcal{M}(S, D, U)$ ein Gammoid mit D, S und U wie in Abbildung 3.2. Dann sind $\{a, b, c\}$ und $\{a, c, d\}$ unabhängige Mengen und $\{a, b, d\}$ ist eine abhängige Menge von $\mathcal{M}(S, D, U)$. Das Beispiel stammt aus [Aig76, S. 58].

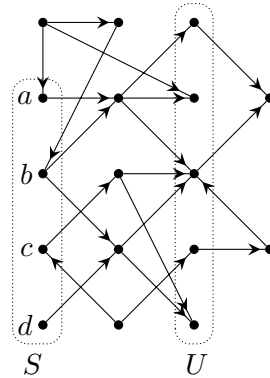


Abbildung 3.2.: Ein Digraph als Grundlage eines Gammoids

Transversalmatroide werden nach dieser Definition der Gammoide mit $\mathcal{M}(E, D, \mathcal{A})$ notiert, wobei D ein Digraph mit der Knotenmenge $E \cup \mathcal{A}$ und der Pfeilmenge $\{(a, A_i) | a \in E, A_i \in \mathcal{A} \text{ und } a \in A_i\}$ ist.

Satz 3.3.6. vgl. [Wel76, S. 223]. Gammoide sind repräsentierbar über allen hinreichend großen Körpern, also insbesondere auch über unendlichen Körpern wie \mathbb{Q} und \mathbb{R} .

3.4. Dualität von Matroiden

Die Komplemente der Basen eines Matroids erfüllen ebenfalls die Basisaxiome, wie z.B. in [Oxl11, Satz 2.1.1] gezeigt wird. Das motiviert die Definition des dualen Matroids:

Satz 3.4.1 (Duales Matroid). Sei \mathcal{M} Matroid über Grundmenge E und \mathcal{B} die Menge der Basen von \mathcal{M} . Dann ist $\mathcal{B}^* := \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ die Menge der Basen des zu \mathcal{M} dualen Matroids \mathcal{M}^* .

Man nennt daher die Komplemente der Basen von \mathcal{M} auch *Kobasen*. Da jede aufspannende Menge X von \mathcal{M} die Obermenge einer Basis B von \mathcal{M} ist, folgt, dass deren Komplement $E \setminus X$ eine Teilmenge der Kobasis $E \setminus B$ ist, und somit unabhängig in \mathcal{M}^* , vgl. auch [Oxl11, Prop. 2.1.6].

Wie im Beweis von [Oxl11, Prop. 2.1.6] gezeigt wird, sind die Komplemente der Hyperebenen bzw. Kopunkte von \mathcal{M} gerade die Kreise des dualen Matroids \mathcal{M}^* . Man nennt diese Komplemente daher auch *Kokreise* von \mathcal{M} .

Die Brücken eines Matroids werden auch *Koschleifen* genannt, da sie Schleifen im dualen Matroid sind.

Falls $\mathcal{M}(G)$ das Kreismatroid eines planaren Graphen G ist, dann ist dessen duales Matroid $\mathcal{M}^*(G^*)$ das Kreismatroid des zu G dualen Graphen.

Satz 3.4.2. vgl. [Oxl11, Prop. 2.1.6(iii)]. H ist Kopunkt eines Matroids \mathcal{M} genau dann, wenn $E \setminus H$ ein Kokreis von \mathcal{M} ist.

Unterräume als Schnitte von Hyperebenen sind folglich die Komplemente von Vereinigungen von Kokreisen.

3.5. Orientierte Matroide

Definition 3.5.1 (signierte Mengen, Support, Nullmenge). Sei E eine endliche Menge. Eine *signierte Menge* ist die Partition einer Teilmenge $\underline{X} \subseteq E$ in eine *positive* Klasse X^+ und eine *negative* Klasse X^- . Wir notieren die signierte Menge X als Tupel $X = (X^+, X^-)$. Die unsignierte Menge $\underline{X} := X^+ \cup X^-$ bezeichnet den *Support* von X , $X^0 := E \setminus \underline{X}$ heißt *Nullmenge* von X .

Man kann X auch als eine Abbildung $E \rightarrow \{0, +1, -1\}$ auffassen, die definiert ist durch

$$X(e) := \begin{cases} +1 & \text{falls } e \in X^+ \\ -1 & \text{falls } e \in X^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder als einen Vektor $X_e \in \{0, \pm 1\}^{|E|}$ mit $X_e := X(e)$. Dieser heißt auch *charakteristischer signierter Vektor*.

Ein Beispiel (vgl. [Bjö+99, S. 2ff.]): Versieht man die Kreise eines Digraphen D mit einer Orientierung, so zeigt jeder Pfeil dieses Kreises entweder vorwärts oder rückwärts. Man kann die Pfeilmenge X , die diesen Kreis repräsentiert, in 2 disjunkte Teilmengen X^+ und X^- zerlegen, sodass alle vorwärts gerichteten Pfeile in X^+ und alle rückwärts gerichteten Pfeile in X^- enthalten sind. Kehrt man die Orientierung dieses Kreises um, erhält man $-X := (X^-, X^+)$.

Die Kreise des D zugrundeliegenden ungerichteten Graphen formen ein Matroid. Durch D werden für jeden ungerichteten Kreis \underline{X} zwei signierte Mengen X und $-X$ festgelegt. Die Menge aller signierten Kreise eines Digraphen formen ein sogenanntes orientiertes Matroid:

Definition 3.5.2 (orientiertes Matroid, Kreisaxiome). vgl. [Bjö+99, Def. 3.2.1]. Eine Menge \mathcal{C} signierter Teilmengen einer Menge E heißt die Menge der *signierten Kreise* eines *orientierten Matroids* \mathcal{O} auf E , genau dann, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

(C0) Es gilt $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C1) $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$. (Symmetrie)

(C2) Für alle $X, Y \in \mathcal{C}$: Wenn $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$, dann ist $X = Y$ oder $X = -Y$. (Unvergleichbarkeit)

(C3) Für alle $X, Y \in \mathcal{C}$, $X \neq -Y$ und $e \in X^+ \cap Y^-$ existiert ein $Z \in \mathcal{C}$, sodass

(i) $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}$ und

(ii) $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$. (schwache Austauschigkeit)

Satz und Definition 3.5.3 (unterliegendes Matroid). vgl. [Bjö+99, Bemerkung 3.2.2] Sei \mathcal{O} ein orientiertes Matroid mit Kreisen \mathcal{C} . Die Menge $\underline{\mathcal{C}} := \{\underline{X} \mid X \in \mathcal{C}\}$ bildet die Menge der Kreise eines nichtorientierten Matroids. Dieses Matroid heißt *unterliegendes Matroid* von \mathcal{O} . Die Begriffe aus der nichtorientierten Matroidtheorie werden äquivalent auch für orientierte Matroide verwendet. So ist jeder Unterraum von $\underline{\mathcal{O}}$ auch ein Unterraum von \mathcal{O} , für den Rang gilt $r(\mathcal{O}) := r(\underline{\mathcal{O}})$, usw.

Nicht jedes nichtorientierte Matroid ist orientierbar. Jedoch sind alle \mathbb{R} -repräsentierbaren Matroide orientierbar, und jeder Minor eines orientierbaren Matroid ist orientierbar, vgl. [Bjö+99, Prop. 7.9.1]. Daraus folgt die Orientierbarkeit von Transversalmatroiden. Da die Klasse der Gammoide der Klasse aller Transversalmatroide und ihrer Kontraktionen entspricht, vgl. [Oxl11, S. 110,112], folgt auch die Orientierbarkeit aller Gammoide.

Sei \underline{Y} eine minimale trennende Pfeilmenge bzw. ein Kokreis des Digraphen D mit zugehöriger Partition $\underline{Y} = Y^+ \dot{\cup} Y^-$ der Knoten, sodass alle Pfeile des Kokreises ihren Startknoten in Y^+ und ihren Endknoten in Y^- haben. Dann erhalten wir zwei signierte Mengen $Y = (Y^+, Y^-)$ und $-Y = (Y^-, Y^+)$, die wir *signierte Kokreise* nennen.

Die Menge aller signierten Kokreise von D

$$\vec{\mathcal{D}} = \{Y = (Y^+, Y^-) \mid Y \text{ ist signierter Kokreis von } D\}$$

bestimmt das zugehörige orientierte Matroid ebenfalls eindeutig, und ihre ungerichteten Supports entsprechen den Kokreisen des zugrundeliegenden nichtorientierten Matroids. Bevor wir den entsprechenden Satz wiedergeben, benötigen wir noch weitere Definitionen:

Definition 3.5.4 (Separationsmenge). vgl. [Bjö+99, S. 5,159] Seien X, Y signierte Mengen. Dann heißt

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) \\ &= \{e \in E \mid X_e = -Y_e \neq 0\} \end{aligned}$$

die *Separationsmenge* von X und Y .

Definition 3.5.5 (orthogonale signierte Mengen). vgl. [Bjö+99, S. 5] Signierte Mengen X, Y heißen *orthogonal*, notiert mit $X \perp Y$, wenn die Mengen $S(X, Y)$ und $S(X, -Y)$ entweder beide leer oder beide nicht leer sind.

Anschaulich bedeutet dies, wenn es einen Nicht-Null-Eintrag gibt, in dem orthogonale X und Y übereinstimmen, dann gibt es auch einen Nicht-Null-Eintrag, in dem sie sich unterscheiden, und umgekehrt.

Satz 3.5.6 (Dualität, Kokreise). vgl. [Bjö+99, Prop. 3.4.1] Sei \mathcal{O} ein orientiertes Matroid auf der Grundmenge E mit Kreisen \mathcal{C} , und sei $\underline{\mathcal{O}}$ das \mathcal{O} unterliegende nichtorientierte Matroid.

- (i) Es gibt eine eindeutige Signatur \mathcal{C}^* der Kokreise von $\underline{\mathcal{O}}$, sodass $X \perp Y$ für alle $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{C}^*$. (Orthogonalität)
- (ii) Die Menge \mathcal{C}^* ist die Menge der signierten Kreise eines orientierten Matroids \mathcal{O}^* auf E , welches wir das Dual von \mathcal{O} nennen. Wir nennen \mathcal{C}^* die Menge der *Kokreise* von \mathcal{O} .
- (iii) $(\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}$.

Im folgenden verwenden wir stets die Notation \mathcal{O} für ein orientiertes Matroid und bezeichnen dessen Kreise und Kokreise mit \mathcal{C} bzw. \mathcal{C}^* . Die Grundmenge von \mathcal{O} ist E und $\underline{\mathcal{O}}$ bezeichnet das \mathcal{O} unterliegende nichtorientierte Matroid.

Definition 3.5.7 (Komposition). vgl. [Bjö+99, S. 8,158] Wir definieren die *Komposition* signierter Mengen X, Y durch

$$X \circ Y = (X^+ \cup (Y^+ \setminus X^-), X^- \cup (Y^- \setminus X^+))$$

oder in Vektorschreibweise

$$(X \circ Y)_e = \begin{cases} X_e & \text{falls } X_e \neq 0 \\ Y_e & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Komposition heißt *konforme Komposition* und die Vektoren X und Y nennt man *konform*, falls $X \circ Y = Y \circ X$. Diese Bedingung ist äquivalent zu $X_e Y_e \geq 0$ für alle $e \in E$, vgl. [Bjö+99, S. 141].

Definition 3.5.8 (Vektoren und Kovektoren). vgl. [Bjö+99, S. 8,9]. Die Gesamtheit aller signierten Mengen, die wir durch wiederholte Komposition von Kreisen erhalten, nennen wir die Familie \mathcal{V} der *Vektoren* von \mathcal{O} . Die Gesamtheit aller signierten Mengen, die wir durch wiederholte Komposition von Kokreisen erhalten, nennen wir die die Familie \mathcal{V}^* der *Kovektoren* von \mathcal{O} .

Wie in Proposition 3.7.2 in [Bjö+99] gezeigt wird, kann man jeden (Ko-)Vektor als konforme Komposition von (Ko-)Kreisen darstellen, so dass es genügt, sich auf konforme Kompositionen zu beschränken.

Eine abhängige Menge des unterliegenden Matroids $\underline{\mathcal{O}}$ kann mehreren Vektoren von \mathcal{O} entsprechen. Ein unsignierter Kokreis des unterliegenden Matroids $\underline{\mathcal{O}}$ ist das Komplement einer Hyperebene von $\underline{\mathcal{O}}$. In der Orientierung \mathcal{O} gibt der signierte Kokreis zusätzlich an, auf welcher Seite der Hyperebene jedes Element des Kokreises liegt und die Nullmenge des Kokreises enthält genau die Elemente der Hyperebene selbst. Beliebige Unterräume des unterliegenden Matroids sind stets die Komplemente von Kovektoren, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.5.9. vgl. [Nic12, Prop. 2.32], [Bjö+99, Prop. 4.1.3(i)]. Sei \mathcal{V}^* die Menge der Kovektoren von \mathcal{O} . Dann ist die Menge der Unterräume \mathcal{F} des nichtorientierten Matroids \mathcal{O}

$$\mathcal{F} = \{E \setminus \underline{Y} \mid Y \in \mathcal{V}^*\} = \{Y^0 \mid Y \in \mathcal{V}^*\}$$

Satz 3.5.10 (Kovektoraxiome). vgl. [Bjö+99, Satz 4.1.1]. Eine Menge $\mathcal{V}^* \subseteq \{0, \pm 1\}^E$ ist genau dann die Menge der Kovektoren eines orientierten Matroids, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(C0) $0 \in \mathcal{V}^*$.

(C1) Wenn $X \in \mathcal{V}^*$, dann $-X \in \mathcal{V}^*$.

(C2) Wenn $X, Y \in \mathcal{V}^*$, dann $X \circ Y \in \mathcal{V}^*$.

(C3) Wenn $X, Y \in \mathcal{V}^*$ und $e \in S(X, Y)$, dann existiert ein $Z \in \mathcal{V}^*$ mit $Z_e = 0$ und $Z_f = (X \circ Y)_f = (Y \circ X)_f$ für alle $f \notin S(X, Y)$.

3.6. Das Big Face Lattice

Um das *Big Face Lattice* eines orientierten Matroids definieren zu können, benötigen wir noch einige Grundbegriffe, welche wir zunächst vorstellen wollen.

Definition 3.6.1 (Partialordnung). Sei $R \subseteq (P \times P)$ eine zweistellige Relation auf einer Menge P . Wir notieren $x \leq y$ als eine alternative Schreibweise für $(x, y) \in R$, dazu äquivalent ist $y \geq x$. Wir nennen R eine *Partialordnung* auf P , falls sie die nachfolgenden Eigenschaften für alle $x, y \in P$ erfüllt, vgl. [Aig76, S. 6].

(i) Reflexivität: $x \leq x$

(ii) Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$

(iii) Antisymmetrie: $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$

Die Menge P versehen mit einer Partialordnung R bzw. \leq nennen wir auch *partiell geordnete Menge* oder *Poset* (P, \leq) .

Elemente $x, y \in P$ heißen *vergleichbar*, wenn entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Wenn alle Elemente von P vergleichbar sind, dann heißt (P, \leq) *Totalordnung*. Wenn $x \leq y$ und $x \neq y$, dann schreiben wir $x < y$. Wir sagen, y *bedeckt* x und schreiben $x \triangleleft y$, falls $x < y$ ist und kein $z \in P$ existiert mit $x < z < y$.

Ein Element $m \in P$ heißt *maximal* (bzw. *minimal*), falls es kein Element $a \in P$ gibt mit $m < a$ (bzw. $a < m$). Wenn P genau ein eindeutiges maximales (bzw. minimales) Element hat, also wenn gilt $x \leq m$ (bzw. $m \leq x$) für alle $x \in P$, dann heißt m *Maximum* (bzw. *Minimum*) und wird notiert mit $\hat{1}$ (bzw. $\hat{0}$), vgl. [Bjö+99, S. 159]. P

heißt *beschränkt*, wenn es Elemente $\hat{0}$ und $\hat{1}$ enthält. Für beschränktes P nennen wir die Elemente $x \in P$ mit $\hat{0} \prec x$ die *Atome* von P und die Elemente $y \in P$ mit $y \prec \hat{1}$ die *Koatome* von P .

Definition 3.6.2 (Hasse-Diagramm). vgl. [Aig06, S. 226]. Das *Hasse-Diagramm* eines Posets ist ein gerichteter Graph $D(P, E_D)$ mit $E_D := \{(x, y) \mid x, y \in P, x \prec y\}$. Die Orientierung der Kanten in einem Hasse-Diagramm wird nicht durch Pfeile dargestellt, sondern die Knoten werden so angeordnet, dass die Kanten immer von unten nach oben gerichtet sind.

Ein Beispiel ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

Definition 3.6.3 (Verband). vgl. [Bjö+99, S. 160]. Ein Poset P heißt *Verband*, wenn für alle Paare $x, y \in P$ gilt:

- (i) Es gibt eine kleinste obere Schranke z von x und y , d.h. es gilt $x, y \leq z$ (z ist obere Schranke) und für alle anderen oberen Schranken z' von x und y gilt $z \leq z'$, und
- (ii) Es gibt eine größte untere Schranke w von x und y , d.h. es gilt $w \leq x, y$ (w ist untere Schranke) und für alle anderen unteren Schranken w' von x und y gilt $w' \leq w$.

Betrachten wir nun die Kovektoren eines orientierten Matroids.

Zunächst definieren wir eine Partialordnung auf der Menge $\{-1, 0, +1\}$: Es gelte $0 < +1$ und $0 < -1$ und $+1$ und -1 sind nicht vergleichbar. Dann können wir die Kovektoren komponentenweise vergleichen. Für zwei Kovektoren X, Y gilt $Y \leq X$ genau dann, wenn $Y_e \in \{0, X_e\}$ für alle $e \in E$. Für $|E| = 2$ zeigt Abbildung 3.3 ein Beispiel, diese Darstellung ist aus [Bjö+99, S. 161] entnommen. Dabei stehen $+$ und $-$ für $+1$ und -1 . Wir können dem Hasse-Diagramm in Abbildung 3.3 entnehmen, dass z.B. $(0, 0) \prec (0, +1) \prec (-1, +1)$, und dass $(+1, +1)$ und $(-1, +1)$ nicht vergleichbar sind.

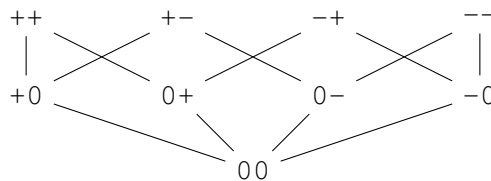


Abbildung 3.3.: Eine Partialordnung auf Kovektoren

Sei also $\mathcal{V}^* \subseteq \{0, \pm 1\}^{|E|}$ die Menge der Kovektoren eines orientierten Matroids. Mit der eben definierten Relation erhalten wir eine Partialordnung auf \mathcal{V}^* , wobei $\hat{0}$ der Nullvektor ist. Wir definieren eine partiell geordnete Menge $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$, indem wir ein Element $\hat{1}$ hinzufügen, also $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*) := \mathcal{V}^* \cup \{\hat{1}\}$. Dann ist $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$ ein Verband:

Definition 3.6.4 (Big Face Lattice). vgl. [Bjö+99, Def. 4.1.2]. Der Verband $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*) = \mathcal{V}^* \cup \{\hat{1}\} = (\mathcal{V}^* \cup \{\hat{1}\}, \leq)$ heißt *Big Face Lattice* des orientierten Matroids \mathcal{O} mit den Kovektoren \mathcal{V}^* .

Nun wollen wir einige Eigenschaften von $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$ vorstellen, die wir in Abschnitt 3.8 benötigen werden.

Satz 3.6.5. vgl. [Bjö+99, Lemma 4.1.8(ii)]. Sei \mathcal{V}^* die Menge der Kovektoren eines orientierten Matroids \mathcal{O} mit der Grundmenge E und sei $A \subseteq E$. Dann ist die Menge der Kovektoren des Kontraktionsminors \mathcal{O}/A gleich

$$\mathcal{V}^*/A = \{X|_{E \setminus A} \mid X \in \mathcal{V}^* \text{ und } A \subseteq X^0\} \subseteq \{0, \pm 1\}^{E \setminus A},$$

das heißt, wir bilden die Menge derjenigen Kovektoren aus \mathcal{O} , die *nicht* A enthalten, bzw. für die A eine Teilmenge ihrer Nullmenge ist. Von diesen Kovektoren streichen wir dann die durch A indizierten Einträge.

Satz 3.6.6. vgl. [Bjö+99, Prop. 4.1.13]. Die Menge $\mathcal{F} = \{X^0 \mid X \in \mathcal{V}^*\}$ ist die Menge der Unterräume des \mathcal{O} unterliegenden Matroids und es gilt

$$(X \circ Y)^0 = (X)^0 \cap (Y)^0$$

Wenn wir also die Komposition zweier Kokreise bilden, dann ist die Nullmenge des resultierenden Kovektors gleich dem Schnitt derjenigen Kopunkte, welche im unterliegenden Matroid die Komplemente dieser Kokreise sind.

Satz 3.6.7. vgl. [Bjö+99, S. 167-168] und Abbildung 4.1.7 ebd. Sei \mathcal{V}^* die Menge der Kovektoren eines orientierten Matroids \mathcal{O} mit der Grundmenge E . Dann gilt:

- (i) Alle Intervalle in $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$ mit der Länge 2, d.h. Mengen der Gestalt

$$\{z \in \mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*) \mid x \prec z \prec y\} \cup \{x, y\},$$

haben Kardinalität 4, vgl. Abbildung 3.4a.

- (ii) Alle Intervalle in $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$ mit der Länge 3, d.h. Mengen der Gestalt

$$\{z_1, z_2 \in \mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*) \mid x \prec z_1 \prec z_2 \prec y\} \cup \{x, y\},$$

sehen aus wie in Abbildung 3.4b, mit $p \geq 3$. Falls $y = \hat{1}$, dann ist p gerade.

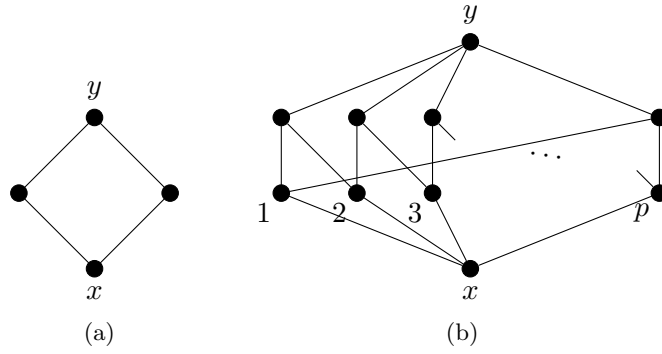


Abbildung 3.4.: Intervalle der Länge 2 und 3 in einem *Big Face Lattice* $\mathcal{F}_{\text{big}}(\mathcal{V}^*)$

3.7. Erweiterung des Konzepts der Färbbarkeit von Graphen auf Matroide

Die Dualitätsbeziehung zwischen Färbbarkeit eines Graphen und NZ- k -Flüssen geht verloren, sobald ein Graph nicht mehr planar ist. Hier setzt die Erweiterung des Konzepts auf orientierte Matroide an, denn für diese existiert stets ein duales Matroid.

Sei \mathcal{O} ein orientiertes Matroid auf der Grundmenge $E = \{1, \dots, n\}$.

Definition 3.7.1. vgl. [HN06, Def. 1]. Das *Flussgitter* von \mathcal{O} ist die Menge ganzzahliger Linearkombinationen charakteristischer Vektoren signierter Kreise

$$\mathcal{F}_{\mathcal{O}} := \text{lat } \vec{\mathcal{C}} = \left\{ \sum_{\vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}} \lambda_{\vec{c}} \cdot \chi_{\vec{c}} \mid \lambda_{\vec{c}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definition 3.7.2 (Fluss). Ein *Fluss* ist ein beliebiges Element $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}}$. f heißt *k -Fluss*, falls $|f_e| \leq k - 1 \forall e \in E$. f heißt *Nowhere-Zero-Fluss* oder *NZ-Fluss*, falls $f_e \neq 0 \forall e \in E$.

Definition 3.7.3. Die *Flusszahl* $\phi(\mathcal{O})$ ist das kleinste $k \in \mathbb{Z}$, sodass ein NZ- k -Fluss in \mathcal{O} existiert.

Die Existenz eines NZ- k -Flusses ist invariant unter Reorientierung eines Matroids ([HN06, Bemerkung 1]), der konkrete NZ- k -Fluss selbst ist jedoch keine Invariante.

Der Definition 4.1 in [Nic12] folgend, definieren wir dual dazu:

Definition 3.7.4 (Koflussgitter). vgl. [HN08, S. 669]. Das *Koflussgitter* von \mathcal{O} ist

$$\mathcal{F}_{\mathcal{O}^*} := \text{lat } \vec{\mathcal{D}} = \left\{ \sum_{\vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}} \lambda_{\vec{d}} \cdot \chi_{\vec{d}} \mid \lambda_{\vec{d}} \in \mathbb{Z} \right\},$$

was gleich dem Flussgitter des zu \mathcal{O} dualen Matroids ist.

Definition 3.7.5 (Kofluss, Färbung). vgl. [HN08, S. 669]. Ein beliebiges $f^* \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}^*}$ heißt *Kofluss*. Falls $0 < |f_e^*| < k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und alle $e \in E$ gilt, so nennt man f^* einen *NZ- k -Kofluss* von \mathcal{O} oder eine *k -Färbung* von \mathcal{O} .

Definition 3.7.6. Die *Koflusszahl* oder *chromatische Zahl* $\chi(\mathcal{O})$ ist das kleinste $k \in \mathbb{Z}$, sodass ein NZ- k -Kofluss in \mathcal{O} existiert.

Die Hadwiger-Vermutungen zur Färbbarkeit von Graphen lassen sich auf orientierte Matroide erweitern:

Vermutung 3.7.7 (Hadwiger-Vermutung $H(k)$ für orientierte Matroide, $k \neq 4$). Vgl. [Nic12, Frage 4.50]. Wenn ein orientiertes Matroid nicht k -färbbar ist für ein $k \neq 4$, dann hat es $\mathcal{M}(K_{k+1})$ als Minor.

Vermutung 3.7.8 (Hadwiger-Vermutung $H(4)$ für orientierte Matroide). Vgl. [Nic12, Frage 4.50] und [Hoc09, Vermutung 5]. Wenn ein orientiertes Matroid nicht 4-färbbar ist, dann hat es $\mathcal{M}(K_5)$ oder den Dual des Petersen-Graphen als Minor.

Der Fall $H(3)$ ist für reguläre Matroide wahr, vgl. [Hoc09, Satz 3]. Leider sind Transversalmatroide i.A. nicht regulär. Allerdings wird vermutet, dass der Fall $k = 3$ auch für Hyperebenenarrangements, vgl. [Hoc09, Vermutung 7], und somit auch für \mathbb{R} -repräsentierbare Matroide¹ gilt:

Vermutung 3.7.9 (Hadwiger-Vermutung $H(3)$ für \mathbb{R} -repräsentierbare Matroide). Ein \mathbb{R} -repräsentierbares Matroid, welches keinen NZ-3-Kofluss hat, hat einen $\mathcal{M}(K_4)$ als Minor.

Transversalmatroide sind ein Spezialfall der sogenannten *Gammoid*. Diese Klasse von Matroiden ist unter Minoren abgeschlossen. Da das Kreismatroid des vollständigen Graphen K_4 kein Gammoid ist, vgl. [Whi92, S. 180] und [Wel76, S. 238], folgt aus der Abgeschlossenheit der Gammoid unter Minoren, dass $\mathcal{M}(K_4)$ nicht Minor eines Gammoids ist. Folglich haben insbesondere Transversalmatroide keinen K_4 -Minor. Daher stellt sich die Frage, ob für Transversalmatroide auch die Umkehrung gilt, sie also dreifärbbar sind.

¹ \mathbb{R} -repräsentierbare Matroide sind äquivalent zu Arrangements von Hyperebenen, vgl. [Bjö+99, S. 159,339]

3.8. Dreifärbarkeit von Transversalmatroiden

Für die Unterklasse der uniformen Matroide ist die Dreifärbarkeit bewiesen.

Satz 3.8.1. vgl. [HN11, Satz 3.7 und Korollar 3.8]. Sei \mathcal{O} ein uniformes, orientiertes Matroid mit Rang r und n Elementen. Dann gilt:

(i) Wenn r gerade ist, dann $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} = \mathbb{Z}^n$.

$$(ii) \phi(\mathcal{O}) = \begin{cases} 2 & \text{falls } nr \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } nr \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Da das uniforme Matroid vom Rang r mit n Elementen $U_{r,n}$ dual zu $U_{n-r,n}$ ist (vgl. [Oxl04, Satz 3.7]), gilt äquivalent:

Satz 3.8.2. vgl. [HN11, Korollar 3.8]. Sei \mathcal{O} ein uniformes, orientiertes Matroid mit Rang r und n Elementen. Dann gilt:

(i) Wenn $n - r$ gerade ist, dann $\mathcal{F}_{\mathcal{O}^*} = \mathbb{Z}^n$.

$$(ii) \chi(\mathcal{O}) = \begin{cases} 2 & \text{falls } n(n-r) \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } n(n-r) \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Weiterhin gilt:

Satz 3.8.3. [HN08, Satz 3]. Für ein schleifenfreies orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang r gilt $\chi(\mathcal{O}) \leq r + 1$. Gleichheit gilt genau dann, wenn \mathcal{O} isomorph ist zu einer Orientierung des $\mathcal{M}(K_{r+1})$.

Daraus folgt die Dreifärbarkeit aller schleifenfreien Rang-3-Matroide, die nicht isomorph zum $\mathcal{M}(K_4)$ sind. Also ist jeder schleifenfreie Rang-3-Minor eines Transversalmatroids dreifärbar.

Wir beschränken uns in den nachfolgenden Überlegungen auf schleifenfreie Matroide, denn es gilt: Eine Schleife e ist ein Element, das in keinem Kokreis enthalten ist. Folglich hat jeder Vektor f im Koflussgitter einen Nulleintrag an der entsprechenden Stelle $f_e = 0$. Somit hat ein orientiertes Matroid mit Schleifen keinen NZ-Kofluss.

Wir wollen in Kapitel 4 eine Untersuchung zur Dreifärbarkeit zwei spezieller Transversalmatroide durchführen. Dazu machen wir uns die folgenden beiden Aussagen zunutze.

Satz 3.8.4. Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} habe eine Kolinie, auf der mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen. Daraus folgt, dass es im Koflussgitter von \mathcal{O} einen Vektor gibt, der genau zwei von Null verschiedene Einträge mit Werten in $\{\pm 1\}$ hat.

Satz 3.8.5. vgl. [Hoc11b]. Gibt es in einer unter Minoren abgeschlossenen Klasse orientierter Matroide im Koflussgitter jedes einfachen Matroids stets einen Vektor mit genau zwei Einträgen in $\{\pm 1\}$ und sonst lauter Nullen, so sind die schleifenfreien Matroide dieser Klasse dreifärbbar.

Beweis zu Satz 3.8.4. Sei L eine Kolinie und seien H_1, \dots, H_k die Kopunkte auf L . Jeder Kopunkt H_i wird durch genau 2 signierte Kokreise $C^{H_i}, -C^{H_i}$ repräsentiert, deren Nullmenge gleich H_i ist. Die Kolinie L wird durch mehrere, voneinander verschiedene Paare von Kovektoren $C^L, -C^L$ repräsentiert, deren Nullmenge gerade L ist, und deren Support $\underline{C}^L = E \setminus L$ ist.

Im zugrundeliegenden nichtorientierten Matroid bildet jeder Schnitt von genau 2 der Kopunkten gerade die Kolinie, d.h. $L = H_i \cap H_j \forall i, j$ mit $1 \leq i < j \leq k$. Bilden wir die Komplemente, folgt $E \setminus L = \underline{C}^L = \underline{C}^{H_i} \cup \underline{C}^{H_j} \forall i, j$ mit $1 \leq i < j \leq k$.

Da jeder Kovektor als konforme Komposition von Kokreisen darstellbar ist, gilt insbesondere, dass jeder Kovektor C^L der Kolinie die konforme Komposition von genau 2 Kokreisen $C^{H_i} \circ C^{H_j}$ ist.

Kontrahieren wir \mathcal{O}/L , so erhalten wir gemäß Satz 3.6.5 ein Matroid, dessen Kovektoren gerade diejenigen sind, die die Kolinie L mit ihren Kopunkten repräsentieren. Das Gitter der Kovektoren von \mathcal{O}/L sieht dann gemäß Satz 3.6.7 so aus, wie in Abbildung 3.5 dargestellt.

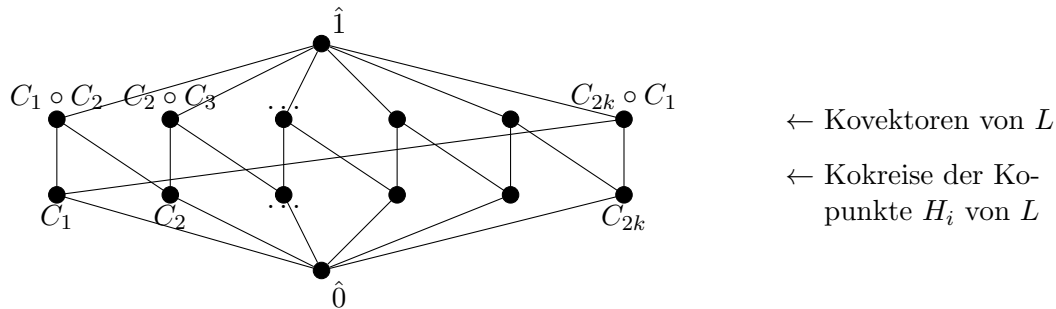


Abbildung 3.5.: Das Gitter von \mathcal{O}/L , L eine Kolinie von \mathcal{O}

Wir sagen, zwei Kokreise C_i und C_j liegen *nebeneinander*, wenn $C_i \circ C_j$ eine konforme Komposition ist, oder äquivalent, wenn es im Big Face Lattice von \mathcal{O}/L einen Kovektor C_x gibt, der sowohl C_1 als auch C_2 bedeckt.

Wenn nun L eine Kolinie ist, auf der mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen, dann gibt es 2 einfache Kopunkte $H_i \neq H_j$ auf L , deren Kokreise C^{H_i} und C^{H_j} nebeneinander liegen. Folglich gilt für diese Kokreise, da sie konform sind, dass für alle Einträge $e \in E$ das Produkt $C^{H_i}(e)C^{H_j}(e) \in \{0, 1\}$ ist. Das heißt, in allen Einträgen, in denen die Kokreise C^{H_i} und C^{H_j} beide nicht Null sind, haben sie dasselbe Vorzeichen.

Da die Kopunkte H_i, H_j auf L einfach sind, unterscheiden sich ihre Kokreise nur an 2 Stellen. Es folgt, dass der Differenzvektor $C^{H_i} - C^{H_j}$ genau 2 Einträge mit Werten in $\{\pm 1\}$ hat und sonst nur Nulleinträge. \square

Beweis zu Satz 3.8.5. Induktionsbeweis über den Rang r .

Jedes schleifenfreie Matroid vom Rang $r \leq 3$, außer $\mathcal{M}(K_4)$, ist gemäß [HN08, Satz 9] dreifärbbar, also insbesondere auch jedes, das einen Vektor mit zwei ± 1 -Einträgen und sonst lauter Nullen im Koflussgitter enthält. Das Matroid $\mathcal{M}(K_4)$ enthält so einen Vektor nicht, vgl. [Bjö+99, Abb. 1.2.2, 1.2.5].

Die Aussage gelte für ein $r - 1 \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass sie auch für r gilt. Sei \mathcal{O} ein schleifenfreies Matroid auf der Grundmenge E mit Rang r mit einem Vektor X im Koflussgitter, für den gilt: $X(f), X(g) \in \{\pm 1\}$ für $f \neq g \in E$ und $X(e) = 0$ für alle $e \in E \setminus \{f, g\}$.

Wir kontrahieren $\mathcal{O}/f =: \mathcal{O}'$. Wenn \mathcal{O}' schleifenfrei ist, existiert nach Voraussetzung ein NZ-3-Kofluss Y' im Koflussgitter von \mathcal{O}' , d.h. $Y'(e) \in \{\pm 1, \pm 2\} \forall e \in E \setminus \{f\}$.

Gemäß Satz 3.6.5 sind die Kovektoren von \mathcal{O}' gerade die Kovektoren von \mathcal{O} , eingeschränkt auf $E \setminus \{f\}$, bei denen f in der Nullmenge enthalten ist. Folglich gibt es in \mathcal{O} einen Vektor Y mit $Y(e) = Y'(e)$ für alle $e \in E \setminus \{f\}$ und $Y(f) = 0$.

Je nachdem, welchen Wert $Y(g)$ und $X(g)$ haben, addieren oder subtrahieren wir X und Y :

$X(g)$	$Y(g)$	Aktion
+1	$\{-1, 2\}$	$N = Y - X$
+1	$\{1, -2\}$	$N = Y + X$
-1	$\{-1, 2\}$	$N = Y + X$
-1	$\{1, -2\}$	$N = Y - X$

Dann ist N ein NZ-3-Kofluss von \mathcal{O} . \square

Transversalmatroide sind eine Unterklasse der Gammoide, welche unter Minorenbildung abgeschlossen sind. Es gibt die Vermutung, dass für einfache Transversalmatroide oder sogar Gammoide so ein Vektor stets existiert. Aber selbst, wenn die Existenz eines solchen Vektors nicht für eine ganze Klasse von Matroiden nachgewiesen werden kann, so können wir für ein spezielles, gegebenes Matroid \mathcal{T} prüfen, ob es dreifärbbar ist. Dazu gehen wir wie ähnlich im Beweis zu Satz 3.8.5 vor und untersuchen das Matroid selbst und Minoren davon.

Sei also \mathcal{T} ein (Transversal-)Matroid. Im ersten Schritt suchen wir eine Kolinie L auf \mathcal{T} , auf der mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen. Finden wir eine solche Kolinie L , heißt das, dass das Koflussgitter von \mathcal{T} einen Vektor wie in Satz 3.8.4 enthält. Finden wir keine, müssen wir abbrechen und können die Dreifärbbarkeit von \mathcal{T} nicht

bestätigen. Anschließend folgt Schritt 2: wir kontrahieren $\mathcal{M}' := \mathcal{T}/e$, wobei $e = H \setminus L$ für einen einfachen Kopunkt H auf der in Schritt 1 gefundenen Kolinie L ist. Wenn der Kontraktionsminor \mathcal{M}' schon dreifärbbar ist (etwa weil es uniform ist oder vom Rang 3), ist man fertig und \mathcal{T} dreifärbbar. Ansonsten wiederholt man die Schritte 1 und 2 rekursiv auf dem Kontraktionsminor, bis man einen Minor mit Rang 3 erhält, woraus die Dreifärbbarkeit von \mathcal{T} folgt, oder bricht erfolglos in Schritt 1 ab.

Dieses Vorgehen liefert zwar, sofern es nicht erfolglos abbricht, einen Beweis für die Dreifärbbarkeit eines Matroids, es liefert aber keine konkrete Dreifärbung, da ein NZ-3-Kofluss von einer konkreten Orientierung des Matroids abhängig ist.

4. Untersuchung spezieller Transversalmatroiden in SAGE

In Abschnitt 4.1 stellen wir kurz die Mathematik-Software *SAGE* vor, mit der die Implementierung der Transversalmatroiden sowie die darauf aufbauenden Untersuchungen durchgeführt wurden. Es wird kurz dargestellt, welche Implementierungen von Matroiden und Graphen zur Verfügung stehen und wie wir diese genutzt haben, um eine eigene Klasse für Transversalmatroiden zu entwickeln. Der zentrale Teil dieser Implementierung ist der Algorithmus von Hopcroft und Karp zum Finden von maximalen Matchings in bipartiten Graphen. Dieser Algorithmus wird in Kapitel 4.2 vorgestellt.

In den Abschnitten 4.3 und 4.4 werden wir die Existenz des in Satz 3.8.5 erwähnten Kovektors mit zwei ± 1 Einträgen in den zu untersuchenden Transversalmatroiden überprüfen, indem wir Kolinien suchen, welche mehr einfache als nichteinfache Kopunkte enthalten. Eine weitergehende Untersuchung der Minoren erfolgt nicht. Stattdessen untersuchen wir die Kolinien genauer und unterteilen sie in Äquivalenzklassen.

4.1. Implementierung von Transversalmatroiden in SAGE

SAGE, vgl. [Ste+14], ist eine Open-Source-Mathematik-Software für Forschung und Lehre in den Bereichen Algebra, Geometrie, Zahlentheorie, Kryptographie, Numerik und anderen. Die Software baut auf existierenden Open-Source-Projekten wie *NumPy*, *SciPy* oder *R* auf. Sie verfügt über eine webbasierte GUI, genannt *Notebook*, sowie eine Kommandozeilenschnittstelle. Die verwendete Sprache ist eine Erweiterung der Programmiersprache *Python*. Die *SAGE*-Bibliothek setzt auf Objektorientierung. Alle mathematischen Objekte und Strukturen basieren auf abstrakten Klassen, welche dann durch unterschiedliche Unterklassen implementiert werden.

So ist es auch bei Matroiden. Wir stellen nun die für unsere Untersuchungen relevanten Klassen vor und skizzieren unsere Implementierung.

Die abstrakte Klasse `sage.matroids.Matroid` ist Grundlage aller Klassen von Matroiden in *SAGE*. Um einen neuen Typ zu entwickeln, genügt es im Wesentlichen, eine Erweiterung dieser Klasse zu schreiben und für diese die drei folgenden Funktionen zu implementieren:

1. eine Initialisierungsfunktion (Konstruktor),
2. eine Funktion, welche die Grundmenge des Matroids zurückgibt,
3. und die Rangfunktion des Matroids.

Alle weiteren Funktionen sind bereits in der abstrakten Klasse implementiert. Sie nutzen diese drei Funktionen, beispielsweise um den Rang einer gegebenen Menge zu ermitteln, oder um eine Liste aller Basen auszugeben. Transversalmatroide können, wie wir gezeigt haben, anhand von bipartiten Graphen definiert werden. Die Rangfunktion des Transversalmatroids bildet dabei eine Menge A auf die Größe eines in A maximalen Matchings ab.

Eine einfache Möglichkeit, Transversalmatroide zu implementieren, wäre also die folgende:

1. Während der Initialisierung erzeugen wir einen bipartiten Graphen $G(V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ anhand der gegebenen Mengenfamilie \mathcal{A} , wobei wir festlegen, dass $V_1 := \bigcup_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ und $V_2 = \mathcal{A}$ ist.
2. Die Grundmenge des Transversalmatroids ist V_1 .
3. Die Rangfunktion berechnet für eine gegebene Menge X die Größe eines maximalen Matchings in dem auf die Knotenmenge $(V_1 \cap X) \dot{\cup} V_2$ eingeschränkten Untergraphen von G .

Für die Beispiele, die wir untersuchen wollen, hat sich diese Art der Implementierung jedoch als zu ineffizient herausgestellt, da für jede Menge erneut der Matchingalgorithmus durchlaufen werden muss.

Eine weitere abstrakte Klasse ist `sage.matroids.BasisExchangeMatroid`. Sie erweitert die Klasse `Matroid`, indem sie die elementaren Matroid-Methoden anhand der Basisaustauschaxiome von Matroiden implementiert.

Die Klasse `sage.matroids.BasisMatroid` erweitert `BasisExchangeMatroid`. Sie ist nicht abstrakt und kann direkt verwendet werden. Diese Klasse benötigt für die Initialisierung eine Liste aller Basen, die dann während der Lebenszeit der Instanz als Objektvariable vorgehalten wird. Die Matroid-Methoden greifen in ihrer Implementierung auf diese Liste zu und sind daher sehr schnell in ihrer Ausführung. Es können jedoch keine Matroide beliebiger Größe damit erzeugt werden, da die maximale Größe dieser Liste beschränkt ist.

Unsere Klasse `TransversalBasisMatroid`, vgl. Listing A.3 im Anhang ab Seite 59, ist eine Spezialisierung von `BasisMatroid`. Die Initialisierungsphase (ab Zeile 77) läuft wie folgt ab:

1. Es wird ein bipartiter Graph anhand der übergebenen Mengenfamilie aufgebaut. Er wird später als Instanzvariable gespeichert.
2. Anschließend wird mit Hilfe des Algorithmus von Hopcroft und Karp ein maximales Matching in diesem Graphen berechnet. Die Kardinalität dieses Matchings entspricht dem Rang r des Transversalmatroids.

3. Dann wird für jede r -Teilmenge der Grundmenge geprüft, ob sie ein Matching der Größe r enthält. Falls ja, handelt es sich um eine Basis und die Teilmenge wird in die Liste der Basen aufgenommen.
4. Der Konstruktor der Klasse `BasisMatroid` wird aufgerufen und ihm werden die Grundmenge, der Rang und die Liste aller Basen übergeben. Diese drei Eigenschaften werden als Instanzvariablen des Matroid-Objekts gespeichert.

Alle weiteren Methoden sind in der Klasse `BasisMatroid` implementiert und greifen auf diese vorberechneten Eigenschaften zurück. Ein erneuter Aufruf des Matchingalgorithmus für jede zu untersuchende Menge ist somit nicht mehr erforderlich. Wir haben dennoch die für den Matchingalgorithmus relevanten Methoden als öffentliche Schnittstelle der Klasse `TransversalBasisMatroid` implementiert, damit der Benutzer die Möglichkeit hat, ein konkretes Matching für eine gegebene Menge auszugeben und bei Bedarf die Einzelschritte des Algorithmus nachzuvollziehen.

4.2. Berechnung von bipartiten Matchings mit dem Algorithmus von Hopcroft und Karp

In diesem Kapitel wollen wir vorstellen, wie ein maximales Matching in einem bipartiten Graphen $G(V, E)$ mit n Knoten und m Kanten konstruiert wird. Der Algorithmus wurde 1973 von John Hopcroft und Richard Karp in [HK73] veröffentlicht.

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn kein Knoten aus V mit mehr als einer Kante aus M inzidiert. Ein Matching mit größtmöglicher Kardinalität heißt *Maximum Matching*.

Sei M ein Matching in einem bipartiten Graphen $G(V, E)$. Ein Knoten $v \in V$ heißt *frei*, wenn er zu keiner Kante aus M inzident ist. Anderenfalls heißt er *bedeckt*. Ein Weg heißt *M -alternierender Pfad*, falls er abwechselnd Kanten aus M und $E \setminus M$ enthält. Wenn Start- und Endknoten dieses Wegs frei sind, heißt er *M -augmentierender Pfad*. In diesem Fall gehören die erste und letzte Kante des Weges nicht zu M .

Satz 4.2.1. vgl. [HK73, Lemma 1]. Wenn M ein Matching ist und P ein M -augmentierender Pfad, dann ist die *symmetrische Differenz* $M' := M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

Anschaulich kann man sich das so vorstellen, dass $P \setminus M$ genau eine Kante mehr enthalten muss als M , weil die erste und letzte Kante von P nicht zu M gehören. Wenn wir entlang P die Matching- und Nichtmatchingkanten vertauschen, erhalten wir M' .

Satz 4.2.2. vgl. [Gal86, Satz 1]. Ein Matching M ist genau dann ein Maximum Matching, wenn es keinen M -augmentierenden Pfad gibt.

Dieser Satz liefert die Grundlage für den Algorithmus, der in Phasen verläuft: In jeder Phase suchen wir für ein gegebenes Matching M augmentierende Pfade. In der ersten Phase beginnen wir dabei mit $M = \emptyset$. Wenn augmentierende Pfade existieren, verbessern wir M , indem wir die symmetrische Differenz $M' = M \oplus P$ bilden. Wenn keine augmentierenden Pfade existieren, dann sind wir fertig und M ist ein Maximum Matching. In Listing A.2 auf Seite 59 ist unsere Implementierung dieses Algorithmus zu finden. M wird dort durch die Variable `matching_edges` repräsentiert, P durch `P` und die symmetrische Differenz M' durch `newmatching`.

Nun bleibt noch zu klären, wie wir in jeder Phase die augmentierenden Pfade für das gegebene Matching M finden. In den nachfolgenden Ausführungen bezeichnen A und B die bipartite Partition der Knoten von V und M das Matching, für das augmentierende Pfade gesucht werden.

Zunächst wird ein gerichteter Untergraph von G erzeugt, den wir mit G' bezeichnen. Dieser Untergraph wird in Ebenen $L_0, L_1, \dots, L_{2k+1}$ aufgebaut wie folgt (vgl. [Ste06, S. 25] und [HK73, S. 229]):

1. L_0 enthält alle freien Knoten von A .
2. L_1 enthält alle Knoten aus B , die zu Knoten aus L_0 adjazent sind.
3. $1 \leq i \leq k$. L_{2i} enthält alle Knoten von A , die von L_{2i-1} aus über Kanten aus M erreichbar sind und die noch in keiner Ebene L_j , $j \leq 2i - 1$ enthalten sind.
4. $1 \leq i \leq k$. L_{2i+1} enthält alle Knoten von B , die von L_{2i} aus über Kanten aus $E \setminus M$ erreichbar sind und die noch in keiner Ebene L_j , $j \leq 2i$ enthalten sind.
5. Alle Kanten sind von L_i nach L_{i-1} gerichtet, $1 \leq i \leq 2k + 1$. Das heißt, Nicht-matchingkanten sind von B nach A gerichtet, Matchingkanten sind von A nach B gerichtet.

Dann hat der Untergraph G' folgende Eigenschaften:

- (i) Die Elemente der geraden Ebenen L_0, L_2, \dots, L_{2k} gehören zu A , die Elemente der ungeraden Ebenen $L_1, L_3, \dots, L_{2k+1}$ gehören zu B .
- (ii) Die letzte Ebene L_{2k+1} ist entweder leer oder enthält mindestens einen freien Knoten aus B .
- (iii) Weiterhin sind alle Knoten in $L_1, L_3, \dots, L_{2k-1}$ von M bedeckt.

Die M -augmentierenden Pfade sind genau die Wege in G' , die bei einem freien Knoten aus B bzw. L_{2k+1} starten und bei einem freien Knoten aus A bzw. L_0 enden. Um nun diese Wege zu finden, gehen wir wie folgt vor. Wir beginnen mit einem beliebigen freien Knoten der untersten Ebene L_{2k+1} eine Tiefensuche. Diese bricht spätestens dann ab, wenn wir einen Knoten der obersten Ebene L_0 erreichen. Wenn wir einen Knoten in L_0 erreicht haben, definiert dies einen augmentierenden Pfad, den wir zu unserer Menge hinzufügen. Dann löschen wir alle während der Tiefensuche besuchten Knoten aus G'

und starten von einem anderen freien Knoten von L_{2k+1} erneut eine Tiefensuche. Diesen Prozess wiederholen wir so lange, bis es in L_{2k+1} keine freien Knoten mehr gibt.

In Listing 4.1 ist diese Vorgehensweise als Algorithmus formuliert. Der Pseudocode ist [Ste06, S. 25-26] entnommen. Die Implementierung dieses Algorithmus für *SAGE* ist in Listing A.1 auf Seite 57 zu finden.

Listing 4.1: Pseudocode Algorithmus Augmentierende Pfade

Eingabe: zusammenhängender bipartiter Graph $G(A \dot{\cup} B, E)$, Matching $M \subseteq E$
Ausgabe: maximale Menge knotendisjunkter kürzester M -augmentierender Pfade
// Konstruiere gerichteten Untergraph $G'(V', E')$
 $E' := \emptyset$; $X := \emptyset$; $L_0 := \emptyset$;
for all $v \in A, v$ nicht überdeckt **do**:
 $L_0 := L_0 \cup \{v\}$;
 for all $\{v, w\} \in E$ **do**:
 $E' := E' \cup \{(w, v)\}$;
 $X := X \cup \{w\}$;
 $V' := L_0 \cup X$;
while ($X \neq \emptyset$) **and** (X enthält nur M -bedeckte Knoten) **do**:
 // folge Matchingkanten von X in die Menge A
 $Y := \emptyset$;
 for all $v \in X$ **and** $\{v, w\} \in M$ **do**:
 $Y := Y \cup \{w\}$; $E' := E' \cup \{(w, v)\}$;
 $V' := V' \cup Y$;
 // folge Nichtmatchingkanten von Y in die Menge B
 $X := \emptyset$;
 for all $v \in Y$ **and** $\{v, w\} \in E \setminus M$ **do**:
 if ($w \notin V'$) **then**:
 $X := X \cup \{w\}$; $E' := E' \cup \{(w, v)\}$;
 $V' := V' \cup X$;
if ($X = \emptyset$) **then**: **STOP**; *// M ist maximales Matching.*
// Starte bei jedem nicht überdeckten Knoten aus X eine Tiefensuche
 $P := \emptyset$;
for all $v \in X$, v nicht überdeckt **do**:
 Starte eine Tiefensuche in v und stoppe, sobald ein Knoten aus L_0 erreicht wird;
 if (Knoten aus L_0 erreicht) **then**:
 Sei p der gefundene Pfad zu dem Knoten aus L_0 ;
 $P := P \cup p$;
 Entferne alle bei der Tiefensuche besuchten Knoten aus V' und alle inzidenten
 Kanten aus E' ;
return P ;

Im Anhang in Listing A.4 auf Seite 63 zeigen wir beispielhaft die Berechnung eines maximalen Matchings für eine Teilmenge der Grundmenge der verdreifachten Vierpunktgerade.

4.3. Die verdreifachte Vierpunktgerade T_1

Die verdreifachte Vierpunktgerade hat ihren Namen von dem uniformen Matroid $U_{2,4}$, welches auch Vierpunktgerade genannt wird.

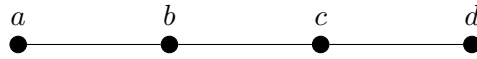


Abbildung 4.1.: Vierpunktgerade $U_{2,4}$

Sie ist ein Transversalmatroid, welches durch die Mengenfamilie $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_8\}$ mit

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = \{a_1, a_2, a_3\} & A_5 = \{a_1, b_1, c_1\} \\
 A_2 = \{b_1, b_2, b_4\} & A_6 = \{a_2, b_2, d_2\} \\
 A_3 = \{c_1, c_3, c_4\} & A_7 = \{a_3, c_3, d_3\} \\
 A_4 = \{d_2, d_3, d_4\} & A_8 = \{b_4, c_4, d_4\}
 \end{array}$$

erzeugt wird. Diese Mengenfamilie wird in Abbildung 4.2 veranschaulicht. Die verdreifachte Vierpunktgerade bezeichnen wir nachfolgend mit T_1 , den zugehörigen, in Abbildung 4.3 abgebildeten bipartiten Graphen mit B_1 .

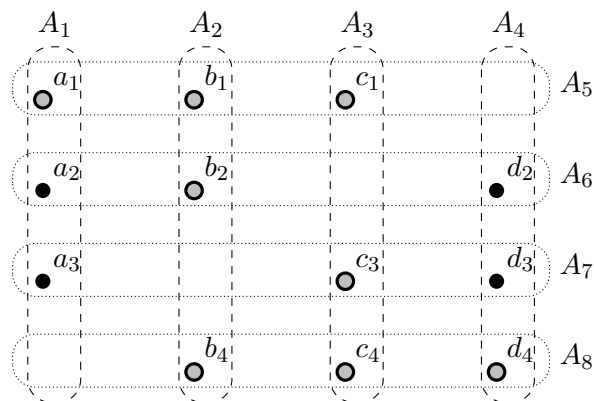


Abbildung 4.2.: Die verdreifachte Vierpunktgerade T_1 mit einer Basis

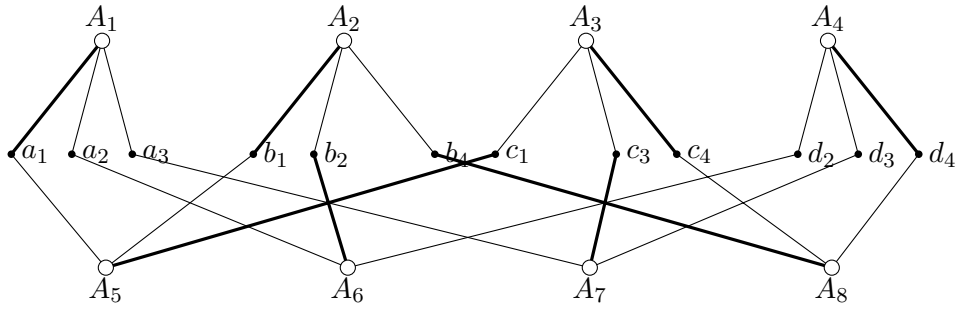


Abbildung 4.3.: Bipartiter Graph B_1 der verdreifachten Vierpunktgerade mit maximalem Matching

4.3.1. Eigenschaften von T_1

Der Rang der verdreifachten Vierpunktgerade T_1 ist $r = 8$, sie hat 411 Basen. Eine davon ist z.B. $\{a_1, b_1, b_2, b_4, c_1, c_3, c_4, d_4\}$. Ein zugehöriges Matching dieser Basis in B_1 , vgl. Abbildung 4.3, bzw. eine entsprechende Transversale in \mathcal{A} ist die Kantenmenge

$$\{(a_1, A_1), (b_1, A_2), (b_2, A_6), (b_4, A_8), (c_1, A_5), (c_3, A_7), (c_4, A_3), (d_4, A_4)\}.$$

Die Anzahl der abgeschlossenen Unterräume lässt sich durch den Vektor $(f_0, \dots, f_r)_{T_1} = (1, 12, 66, 220, 495, 792, 852, 452, 1)$ darstellen, wobei der i -te Eintrag jeweils die Anzahl der Unterräume vom Rang i angibt.

Die Kolinien sind die 852 Unterräume mit Korang 2, d.h. mit Rang $r - 2 = 6$. Davon haben nur 12 die Kardinalität 7, die übrigen 840 sind unabhängige Mengen der Kardinalität 6.

Bei den Kopunkten handelt es sich um die 452 Unterräume mit Korang 1. Sie enthalten jeweils 7 bis 9 Punkte. Insgesamt haben 432 Kopunkte die Kardinalität 7, was schon vermuten lässt, dass wir sehr viele einfache Kopunkte finden werden.

4.3.2. Untersuchung der positiven Kolinien von T_1

Betrachten wir nun die Kolinien, nachfolgend mit L notiert, und ihr Verhältnis darauf liegender einfacher und nichteinfacher Kopunkte. Wir bezeichnen im Folgenden eine Kolinie als *positiv* und notieren sie mit L_+ , wenn mehr einfache als nichteinfache Kopunkte darauf liegen, im umgekehrten Fall nennen wir sie *negativ* und notieren sie mit L_- . Als *neutral* bezeichnen wir Kolinien L_0 , deren Anzahl mehrfacher Kopunkte gleich der Anzahl einfacher Kopunkte ist.

Ziel dieses Abschnitts wird sein, die positiven Kolinien in Äquivalenzklassen einzuteilen.

Betrachten wir Tabelle 4.1, fällt zunächst auf, dass es überraschend viele positive Kolinien gibt. Sie alle haben die Kardinalität 6, sie sind also unabhängig.¹ Es gibt weiterhin 12 neutrale Kolinien, sie enthalten alle genau 6 Elemente und je genau 2 einfache und nicht-einfache Kopunkte. Es gibt 76 negative Kolinien. Diese haben stets 6 oder 7 Elemente und enthalten je 2 mehrfache Kopunkte und einen oder keinen einfachen Kopunkt.

Tabelle 4.1.: Klassifizierung der Kolinien von T_1 anhand ihrer Kopunkte

Klasse	Anzahl		Anzahl einfacher Kopunkte auf L	Anzahl nichteinfacher Kopunkte auf L
	Kolinien L	$ L $		
negativ	16	6	0	2
	48	6	1	2
	12	7	1	2
neutral	12	6	2	2
positiv	424	6	3	1
	180	6	4	1
	160	6	6	0

Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen den positiven Kolinien und unserem Mengensystem. 324 der positiven Kolinien enthalten keine der A_i als Teilmenge. 376 positive Kolinien sind Obermenge von A_i für genau ein $i \in \{1, \dots, 8\}$. Die übrigen 64 positiven Kolinien sind Obermenge von genau 2 der Mengen in \mathcal{A} .

Betrachten wir zunächst die letztgenannten 64 Kolinien.

positive Kolinien L_+ mit $A_i, A_j \subseteq L_+$ für $i \neq j$: Für die Kolinien L , die genau 2 der Mengen in \mathcal{A} enthalten, haben wir beobachtet, dass stets $L_+ \supseteq A_i \cup A_j$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, $j \in \{5, \dots, 8\}$ gilt.² Insgesamt gibt es $4 \cdot 4 = 16$ solcher Kombinationsmöglichkeiten.

Davon bilden die 4 Mengen $L_+ = A_i \dot{\cup} A_{9-i}$, $1 \leq i \leq 4$ je eine disjunkte Vereinigung. Dies sind gerade 4 Kolinien, welche ausschließlich einfache Kopunkte enthalten. Sie bilden eine Äquivalenzklasse:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= \{ \{a_1, a_2, a_3, b_4, c_4, d_4\} \\
 &\quad \{b_1, b_2, b_4, a_3, c_3, d_3\} \\
 &\quad \{c_1, c_3, c_4, a_2, b_2, d_2\} \\
 &\quad \{d_2, d_3, d_4, a_1, b_1, c_1\} \} \\
 &= \{L_+ \mid L_+ = A_i \dot{\cup} A_{9-i}, 1 \leq i \leq 4\}
 \end{aligned}$$

¹ Dass alle positiven Kolinien zugleich unabhängig sind, gilt im Allgemeinen nicht, wie das Beispiel der verdreifachten Fanoebene in Abschnitt 4.4 zeigen wird.

²Betrachtet man Abbildung 4.2, ist das die Vereinigung jeweils einer *horizontal* und einer *vertikal* dargestellten Menge.

Die übrigen 12 Kombinationen bilden nicht-disjunkte Vereinigungen, welche jeweils echte Teilmenge mehrerer Kolinien sind. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften von T_1 genügt es, wenn wir beispielhaft eine solche Kombination betrachten. Wir wählen $A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $A_5 = \{a_1, b_1, c_1\}$. Es gibt 5 positive Kolinien L_+ mit $L_+ \supseteq A_1 \cup A_5$. Jede dieser Kolinien erweitert die Vereinigung $A_1 \cup A_5$ um genau einen Punkt aus den zu A_1 und A_5 disjunkten Mengen, also aus $A_8 \cup A_4 = \{b_4, c_4, d_4, d_3, d_2\}$. 4 davon sind äquivalent (Fall a); sie enthalten jeweils 3 einfache Kopunkte und einen dreifachen Kopunkt. Auf der Kolinie, die den Punkt d_4 enthält, also gerade die Schnittmenge der zu A_1 und A_5 disjunkten Mengen, liegen 4 einfache und 2 zweifache Kopunkte (Fall b).

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{ \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, b_4\} \\
&\quad \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, c_4\} \\
&\quad \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, d_2\} \\
&\quad \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, d_3\} \} \\
&= \{L_+ \mid L_+ = A_1 \cup A_5 \cup \{x\}, x \in A_8 \triangle A_4\} \\
M_2 &= \{ \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, d_4\} \} \\
&= \{L_+ \mid L_+ = A_1 \cup A_5 \cup \{x\}, x \in A_8 \cap A_4\}
\end{aligned}$$

Die Kolinie $L = \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, b_4\}$ als Beispiel für Fall a hat die einfachen Kopunkte $L \cup x, x \in \{d_2, d_3, d_4\}$ und den dreifachen Kopunkt $L \cup \{b_2, c_3, c_4\}$, zu sehen in Abbildung 4.4. Die Punkte der Kolinie selbst sind dargestellt als ausgefüllte schwarze Kreise ●, die Erweiterungen zu einfachen Kopunkten als Kreise mit durchgezogener Linie ○ und die übrigen, zum nichteinfachen Kopunkt gehörenden Elemente als Kreise mit gepunkteter Linie ◐. Die Kolinie repräsentiert z.B. das Matching $\{(a_1, A_1), (a_2, A_6), (a_3, A_7), (b_1, A_5), (b_4, A_2), (c_1, A_3)\}$ in B_1 .

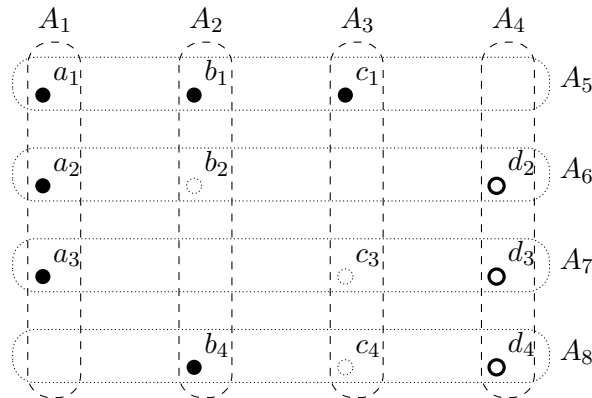


Abbildung 4.4.: Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_3

Die Kolinie $L = \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, d_4\}$ (Fall b) hat die vier einfachen Kopunkte $L \cup x$ mit $x \in \{d_2, d_3, b_4, c_4\}$ und den zweifachen Kopunkt $L \cup \{b_2, c_3\}$, dargestellt in Abbildung 4.5. Sie repräsentiert das Matching $\{(a_1, A_1), (a_2, A_6), (a_3, A_7), (b_1, A_5), (d_4, A_4), (c_1, A_3)\}$ in B_1 .

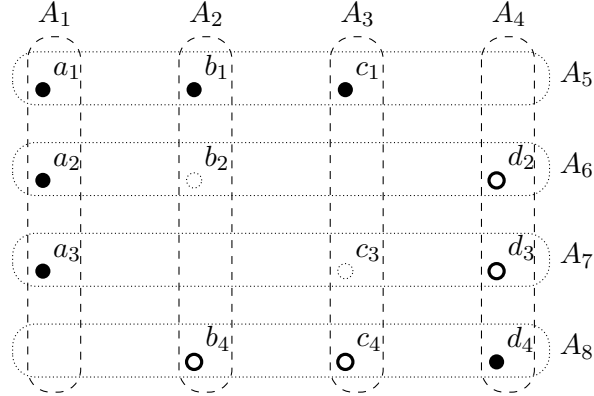


Abbildung 4.5.: Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_4

Fasst man diese Beobachtung für alle 12 Kombinationsmöglichkeiten zusammen, ergibt dies insgesamt $12 \cdot 5 = 60$ Kolinien, die wir in 2 weitere Äquivalenzklassen einteilen können:

$$\Lambda_2 = \{L_+ \mid L_+ = A_i \cup A_j \cup \{x\}, i \in \{1, \dots, 4\}, j \in \{5, \dots, 8\}, x \in A_{9-i} \Delta A_{9-j}\}$$

$$\Lambda_3 = \{L_+ \mid L_+ = A_i \cup A_j \cup \{x\}, i \in \{1, \dots, 4\}, j \in \{5, \dots, 8\}, x \in A_{9-i} \cap A_{9-j}\}$$

positive Kolinien L_+ mit $A_i \subseteq L_+$ für genau ein i : Insgesamt gibt es 376 positive Kolinien mit dieser Eigenschaft. Auch hier betrachten wir wegen der Symmetrie von T_1 nur die Kolinien L_+ mit $A_1 \subset L_+$ und $A_j \not\subset L_+$ für $j \neq 1$. Dies schränkt die Anzahl der Kolinien zunächst auf 47 ein. Anschließend verallgemeinern wir unsere Beobachtungen auf alle L_+ mit $A_i \subset L_+$ für genau ein i und $A_j \not\subset L_+, j \neq i$, um unsere Äquivalenzklassen zu definieren.

Unter den 47 betrachteten Kolinien finden wir solche (a) mit 6 einfachen Kopunkten, (b) mit 4 einfachen und einem zweifachen Kopunkt, sowie (c) mit 3 einfachen und einem dreifachen Kopunkt.

Fall (a) umfasst die folgenden Kolinien:

$$\{a_1, a_2, a_3, b_1, c_4, d_4\}, \{a_1, a_2, a_3, b_2, c_4, d_4\}$$

$$\{a_1, a_2, a_3, c_1, b_4, d_4\}, \{a_1, a_2, a_3, c_3, b_4, d_4\},$$

$$\{a_1, a_2, a_3, d_2, b_4, c_4\}, \{a_1, a_2, a_3, d_3, b_4, c_4\},$$

Diese lassen sich wie folgt charakterisieren. Es gibt genau 3 Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, deren Schnittmenge mit A_1 nicht leer sind, dies sind A_5, A_6, A_7 . Jeder der Punkte in $A_i \setminus A_1$, $i \in \{5, 6, 7\}$ ist in genau einer der Kolinien enthalten. Betrachten wir also eine beliebige dieser 6 Kolinien, nennen sie L und sei x_1 ein Punkt, der $x_1 \in A_i \setminus A_1$ für ein A_i mit $A_i \cap A_1 \neq \emptyset$, $i \in \{2, \dots, 8\}$ erfüllt. Die verbleibenden beiden Punkte von L , seien dies x_2 und x_3 , gehören zu A_8 , das ist gerade die zu A_1 disjunkte Menge (neben A_2, A_3, A_4), die auch zu A_5, A_6, A_7 disjunkt ist. x_2 und x_3 haben offenbar die Eigenschaft, dass für alle A_i mit $x_1 \in A_i$ gilt, dass $A_i \cap \{x_2, x_3\} \neq \emptyset$. Die Kolinie $\{a_1, a_2, a_3, b_1, c_4, d_4\}$ ist beispielhaft in Abbildung 4.6 dargestellt, ein ihr zugehöriges Matching in B_1 ist

$$\{(a_1, A_1), (a_2, A_6), (a_3, A_7), (b_1, A_5), (c_4, A_8), (d_4, A_4)\}$$

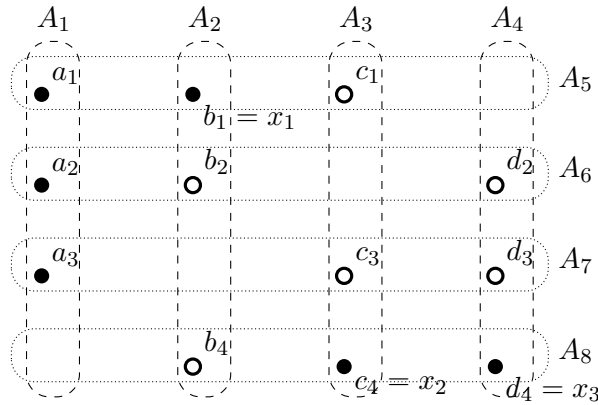


Abbildung 4.6.: Eine Kolinie der verdreifachten Vierpunktgerade aus Λ_5

Fall (b) umfasst die folgenden 9 Kolinien:

$$\begin{aligned} &\{a_1, a_2, a_3, b_4, c_1, d_2\}, \{a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_2\}, \\ &\{a_1, a_2, a_3, b_1, c_4, d_2\}, \{a_1, a_2, a_3, b_4, c_1, d_3\}, \\ &\{a_1, a_2, a_3, b_1, c_4, d_3\}, \{a_1, a_2, a_3, b_2, c_4, d_3\}, \\ &\{a_1, a_2, a_3, b_2, c_1, d_4\}, \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, d_4\}, \\ &\{a_1, a_2, a_3, b_2, c_3, d_4\} \end{aligned}$$

Die Kolinie $L = \{a_1, a_2, a_3, b_4, c_1, d_2\}$ hat beispielsweise den zweifachen Kopunkt $L \cup \{c_3, d_3\}$ und die einfachen Kopunkte $L \cup \{b_1\}$, $L \cup \{b_2\}$, $L \cup \{c_4\}$ und $L \cup \{d_4\}$.

Diese lassen sich ähnlich wie in Fall (a) charakterisieren. Es gibt genau 3 Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, deren Schnittmenge mit A_1 nicht leer sind, dies sind A_5, A_6, A_7 . Jede Kolinie L enthält genau 2 Punkte x_1 und x_2 aus genau 2 von 3 dieser Mengen, sowie genau einen Punkt $x_3 \in A_8$. Das ist genau die zu A_1 disjunkte Menge (neben A_2, A_3, A_4), die auch zu allen anderen Mengen A_i disjunkt ist, welche einen nichtleeren Schnitt mit A_1 haben. Es gibt

3 Möglichkeiten, um x_3 zu wählen. Fixieren wir eine beliebige Wahl, etwa b_4 . Nun prüfen wir die verbleibenden Punkte x_1 und x_2 . Diese sind in je 2 Mengen enthalten. Eine davon hat offenbar stets einen nichtleeren Schnitt mit A_1 und die andere einen nichtleeren Schnitt mit A_8 . Außerdem gibt es keine Menge A_i , sodass $\{x_1, x_2\} \subseteq A_i$. Durch diese Bedingungen gibt es bei gegebenem x_3 genau 3 Möglichkeiten, x_1 und x_2 festzulegen, sodass wir letztlich eine Beschreibung der Mengen für Fall (b) erhalten haben.

Fall (c): Für diese 32 Kolinien ist auf den ersten Blick keine offensichtliche Klassifizierung möglich, vgl. im Anhang Tabelle A.1. Jedoch lassen sich die Kolinien anhand ihrer ein- und mehrfachen Kopunkte gut klassifizieren.

Es gibt genau 2 Kolinien, bei denen die einfachen Kopunkte gerade durch die Punkte aus A_8 erweitert werden. Dies sind L_8 und L_{16} . Bei je 10 Kolinien sind die einfachen Kopunkte genau die Elemente aus A_2 , A_3 und A_4 , den übrigen zu A_1 disjunkten Mengen.

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften von T_1 liefert uns Fall (a) eine weitere Äquivalenzklasse Λ_4 mit $8 \cdot 6 = 48$ Kolinien, Fall (b) liefert Λ_5 mit $8 \cdot 9 = 72$ Kolinien und Fall (c) liefert Λ_6 mit $8 \cdot 32 = 256$ Vertretern. Zusammengenommen sind dies alle 376 positive Kolinien L mit $A_i \subseteq L$ für genau ein i .

$\Lambda_4 = \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und } L_+ \text{ hat nur einfache Kopunkte}\}$

$\Lambda_5 = \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 2-fach}\}$

$\Lambda_6 = \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 3-fach}\}$

positive Kolinien L_+ mit $A_i \not\subseteq L_+$ für alle i : 324 der positiven Kolinien enthalten keine der A_i als Teilmenge.

Davon haben 108 Kolinien ausschließlich einfache Kopunkte. Diese fassen wir in der Äquivalenzklasse

$$\Lambda_7 = \{L_+ \mid A_i \not\subseteq L_+ \forall i \text{ und alle Kopunkte auf } L_+ \text{ sind einfach}\}$$

zusammen. Einige Kolinien in dieser Klasse sind

$\{a_3, b_1, b_2, c_3, d_2, d_4\}$ mit Matching $\{(A_7, a_3), (A_2, b_1), (A_6, b_2), (A_3, c_3), (A_4, d_2), (A_8, d_4)\}$

$\{a_1, a_2, b_2, c_3, c_4, d_3\}$ mit Matching $\{(A_5, a_1), (A_1, a_2), (A_6, b_2), (A_3, c_3), (A_8, c_4), (A_7, d_3)\}$

$\{a_2, b_2, c_1, c_3, d_3, d_4\}$ mit Matching $\{(A_1, a_2), (A_6, b_2), (A_5, c_1), (A_3, c_3), (A_7, d_3), (A_4, d_4)\}$

$\{a_1, b_2, c_1, c_3, d_2, d_4\}$ mit Matching $\{(A_5, a_1), (A_6, b_2), (A_3, c_1), (A_7, c_3), (A_4, d_2), (A_8, d_4)\}$

$\{a_1, b_1, b_2, c_3, c_4, d_4\}$ mit Matching $\{(A_1, a_1), (A_5, b_1), (A_2, b_2), (A_7, c_3), (A_3, c_4), (A_8, d_4)\}$

96 weitere Kolinien haben 4 einfache und einen zweifachen Kopunkt. Diese seien zusammengefasst in

$$\Lambda_8 = \{L_+ \mid A_i \not\subseteq L_+ \forall i \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist zweifach}\}$$

Einige Beispiele sind

$$L_1 = \{a_1, b_2, b_4, c_3, c_4, d_3\}$$

mit Matching $\{(A_1, a_1), (A_2, b_2), (A_8, b_4), (A_7, c_3), (A_3, c_4), (A_4, d_3)\}$
und zweifachem Kopunkt $L_1 \cup \{d_2, d_4\}$

$$L_2 = \{a_1, b_1, b_4, c_3, c_4, d_2\}$$

mit Matching $\{(A_1, a_1), (A_5, b_1), (A_8, b_4), (A_7, c_3), (A_3, c_4), (A_4, d_2)\}$
und zweifachem Kopunkt $L_2 \cup \{a_3, c_1\}$

$$L_3 = \{a_1, a_2, b_4, c_3, d_2, d_3\}$$

mit Matching $\{(A_5, a_1), (A_1, a_2), (A_2, b_4), (A_3, c_3), (A_6, d_2), (A_7, d_3)\}$
und zweifachem Kopunkt $L_3 \cup \{a_3, c_1\}$

Die verbleibenden 120 positiven Kolinien haben einen dreifachen Kopunkt und 3 einfache Kopunkte, beispielsweise

$$L_1 = \{b_1, b_2, c_3, c_4, d_3, d_4\}$$

mit Matching $\{(A_5, b_1), (A_2, b_2), (A_7, c_3), (A_3, c_4), (A_4, d_3), (A_8, d_4)\}$
und dreifachem Kopunkt $L_1 \cup \{b_4, c_1, d_2\}$

$$L_2 = \{a_2, b_2, c_3, c_4, d_3, d_4\}$$

mit Matching $\{(A_1, a_2), (A_6, b_2), (A_3, c_3), (A_8, c_4), (A_7, d_3), (A_4, d_4)\}$
und dreifachem Kopunkt $L_2 \cup \{a_3, b_4, d_2\}$

$$L_3 = \{a_1, a_3, b_2, c_1, d_2, d_3\}$$

mit Matching $\{(A_5, a_1), (A_1, a_3), (A_6, b_2), (A_3, c_1), (A_4, d_2), (A_7, d_3)\}$
und dreifachem Kopunkt $L_3 \cup \{a_2, b_1, c_3\}$

Wir fassen diese in der Äquivalenzklasse

$$\Lambda_9 = \{L_+ \mid A_i \not\subseteq L_+ \forall i \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist dreifach}\}$$

zusammen.

4.3.3. Zusammenfassung der Analyse von T_1

Wir haben die positiven Kolinien von T_1 in 9 Äquivalenzklassen eingeteilt:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{L_+ \mid L_+ = A_i \dot{\cup} A_{9-i}, 1 \leq i \leq 4\} \\ \Lambda_2 &= \{L_+ \mid L_+ = A_i \cup A_j \cup \{x\}, i \in \{1, \dots, 4\}, j \in \{5, \dots, 8\}, x \in A_{9-i} \Delta A_{9-j}\} \\ \Lambda_3 &= \{L_+ \mid L_+ = A_i \cup A_j \cup \{x\}, i \in \{1, \dots, 4\}, j \in \{5, \dots, 8\}, x \in A_{9-i} \cap A_{9-j}\} \\ \Lambda_4 &= \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und } L_+ \text{ hat nur einfache Kopunkte}\} \\ \Lambda_5 &= \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 2-fach}\} \\ \Lambda_6 &= \{L_+ \mid A_i \subset L_+ \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 8\} \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 3-fach}\} \\ \Lambda_7 &= \{L_+ \mid A_i \not\subset L_+ \forall i \text{ und alle Kopunkte auf } L_+ \text{ sind einfach}\} \\ \Lambda_8 &= \{L_+ \mid A_i \not\subset L_+ \forall i \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 2-fach}\} \\ \Lambda_9 &= \{L_+ \mid A_i \not\subset L_+ \forall i \text{ und genau 1 Kopunkt auf } L_+ \text{ ist 3-fach}\} \end{aligned}$$

Dabei war ein Einteilungskriterium die Anzahl der einfachen und nichteinfachen Kopunkte auf der Kolinie. Für ein zweites Einteilungskriterium nutzten wir das Mengensystem, welches die verdreifachte Vierpunktgerade repräsentiert. Hier haben wir die Anzahl der in der Kolinie enthaltenen Mengen als einen Ansatz genutzt, um Muster zu erkennen. Die Kolinien aus Λ_1, Λ_2 und Λ_3 haben jeweils 2 Mengen aus \mathcal{A} als Teilmenge. Die Kolinien aus Λ_4, Λ_5 und Λ_6 haben genau 1 Menge aus \mathcal{A} als echte Teilmenge und die übrigen Kolinien haben keine der Mengen aus \mathcal{A} als Teilmenge.

Tabelle 4.2.: Einteilung der positiven Kolinien von T_1 in Äquivalenzklassen

Äquivalenz- klasse	Anzahl Kolinien L_+	$ L_+ $	Anzahl einfacher Kopunkte auf L_+	Anzahl nichteinfacher Kopunkte auf L_+
	424	6	3	1
Λ_2	48			
Λ_6	256			
Λ_9	120			
	180	6	4	1
Λ_3	12			
Λ_5	72			
Λ_8	96			
	160	6	6	0
Λ_1	4			
Λ_4	48			
Λ_7	108			

4.4. Die verdreifachte Fanoebene T_2

Die verdreifachte Fanoebene hat ihren Namen von der Fanoebene, einer Inzidenzstruktur, die man als projektive Ebene, Hypergraph oder Blockplan auffassen kann.

Die Fanoebene in Abbildung 4.7 ist ein Transversalmatroid auf einer Grundmenge S mit 7 Punkten, das durch ein Mengensystem mit 7 Teilmengen von S repräsentiert wird. Diese Teilmengen sind als Geraden bzw. als Kreis dargestellt. Jeder Punkt ist in genau 3 Teilmengen enthalten und jede Teilmenge enthält genau 3 Punkte. Weiterhin haben 3 beliebige dieser Teilmengen stets genau einen Punkt als Schnittmenge.

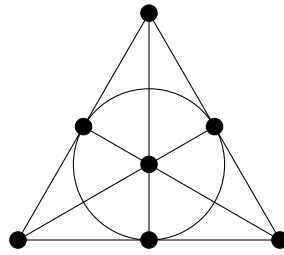


Abbildung 4.7.: Die Fanoebene P_7

Die verdreifachte Fanoebene, im Folgenden mit T_2 bezeichnet, wird durch die Mengenfamilie $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{14}\}$ mit

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = \{a_1, a_2, a_3\} & A_8 = \{a_1, b_1, d_1\} \\
 A_2 = \{b_1, b_4, b_5\} & A_9 = \{a_3, c_3, f_3\} \\
 A_3 = \{c_3, c_5, c_6\} & A_{10} = \{b_4, f_4, g_4\} \\
 A_4 = \{d_1, d_6, d_7\} & A_{11} = \{a_2, g_2, e_2\} \\
 A_5 = \{e_2, e_5, e_7\} & A_{12} = \{d_7, e_7, f_7\} \\
 A_6 = \{f_3, f_4, f_7\} & A_{13} = \{b_5, c_5, e_5\} \\
 A_7 = \{g_2, g_4, g_6\} & A_{14} = \{c_6, d_6, g_6\}
 \end{array}$$

erzeugt. Diese Mengenfamilie wird in Abbildung 4.8 veranschaulicht.

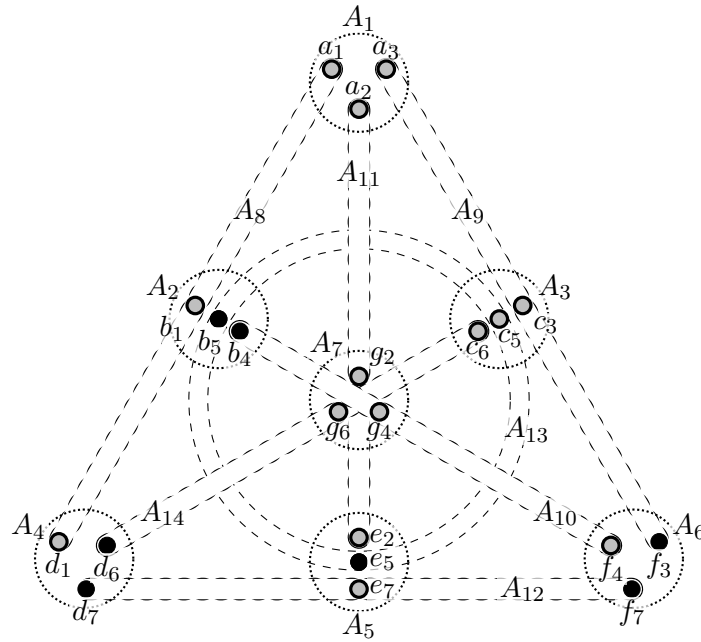


Abbildung 4.8.: Die verdreifachte Fanoebene T_2 mit einer Basis

4.4.1. Eigenschaften von T_2

Die verdreifachte Fanoebene T_2 hat den Rang $r = 14$ und 61428 Basen. Eine davon ist z.B. $\{a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, c_6, d_1, e_2, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6\}$. Ein zugehöriges Matching dieser Basis in dem zugehörigen bipartiten Graphen (bzw. eine entsprechende Transversale in A) ist die Kantenmenge

$$\{(a_1, A_8), (a_2, A_1), (a_3, A_9), (b_1, A_2), (c_3, A_3), (c_5, A_{13}), (c_6, A_{14}), \\ (d_1, A_4), (e_2, A_5), (e_7, A_{12}), (f_4, A_6), (g_2, A_{11}), (g_4, A_{10}), (g_6, A_7)\}.$$

Es gibt in T_2 170191 Kolinien bzw. Unterräume mit Korang 2, vgl. Tabelle 4.3. Die meisten, nämlich genau 167790, haben die Kardinalität 12 und sind somit unabhängige Mengen. Es gibt jedoch auch vereinzelt Kolinien mit Kardinalitäten 13 (1764), 14 (462), 15 und 16.

Bei den Kopunkten handelt es sich um die 53305 Unterräume mit Korang 1. Sie enthalten jeweils 13 bis 18 Punkte. Ähnlich wie im Fall der verdreifachten Vierpunktgeraden enthält auch hier ein Großteil der Kopunkte 13 Punkte, also nur einen mehr als die meisten Kolinien. Dies führt uns wieder zu der Erwartung, dass wir sehr viele einfache Kopunkte finden werden.

Tabelle 4.3.: Klassifizierung der Kolinien für die verdreifachte Fanoebene

Klasse	Anzahl Kolinien L	$ L $	Anzahl einfacher Kopunkte auf L	Anzahl nichteinfacher Kopunkte auf L
negativ	560	12	0	2
	336	13	0	2
	168	14	0	2
	70	15	0	2
	3633	12	1	2
	1008	13	1	2
	294	14	1	2
	84	15	1	2
	21	16	1	2
neutral	2184	12	2	2
	252	13	2	2
positiv	78736	12	3	1
	168	13	3	1
	532	12	3	2
	33096	12	4	1
	18816	12	5	1
	11872	12	6	1
	11760	12	7	1

4.4.2. Untersuchung der positiven Kolinien von T_2

Wie im Fall der verdreifachten Vierpunktgeraden teilen wir wieder die sogenannten *positiven* Kolinien, d.h. solche mit mehr einfachen als nichteinfachen Kopunkten, in Äquivalenzklassen ein. Wir gehen dabei genauso wie bei der verdreifachten Vierpunktgeraden in Abschnitt 4.3.2 vor: Ein Kriterium wird die Art und Anzahl der Kopunkte auf den Kolinien sein, ein anderes die in der Kolinie enthaltenen Mengen $A_i \in \mathcal{A}$. Nun kommt aber auch noch die Kardinalität der Kolinien als drittes Kriterium hinzu. Zur Veranschaulichung benutzen wir die Darstellung des Mengensystems \mathcal{A} in Abbildung 4.9.

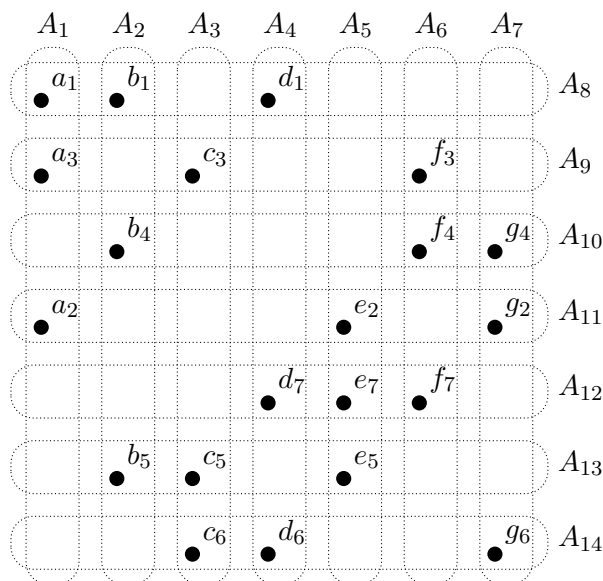


Abbildung 4.9.: verdreifachte Fanoebene T_2 , alternative Darstellung

Insgesamt gibt es 161581 Kolinien in T_2 , auf denen mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen. Wir nennen diese Kolinien wie in Abschnitt 4.3.2 *positiv* und notieren sie zur Unterscheidung von anderen Kolinien mit L_+ .

Zur Voreinteilung der Kolinien nutzen wir die Anzahl ihrer einfachen Kopunkte.

Kolinien mit genau 3 einfachen Kopunkten

Dies ist mit fast 80000 Vertretern die größte Klasse. Sehr wenige dieser Kolinien haben die besondere Eigenschaft, dass sie im Gegensatz zu allen anderen positiven Kolinien 13 Punkte enthalten und somit abhängige Mengen sind. Diese 168 Kolinien betrachten wir zuerst.

(A) Kolinien der Kardinalität 13: Wir stellen fest, dass jede dieser 168 Kolinien Obermenge von disjunkten Mengen $A_i, i \in \{1, \dots, 7\}$ und $A_j, j \in \{8, \dots, 14\}$, $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ ist. Es gibt 7 Möglichkeiten, ein $A_i, i \in \{1, \dots, 7\}$ zu wählen. Bei gegebener Menge A_i gibt es 4 Möglichkeiten, eine zu A_i disjunkte Menge $A_j, j \in \{8, \dots, 14\}$ zu wählen. Das sind insgesamt 28 Kombinationsmöglichkeiten. Aufgrund der Symmetrie von T_2 betrachten wir die willkürliche Wahl von A_1 und A_{14} und finden 6 Kolinien, die diese Mengen enthalten. Diese sind im Anhang in Tabelle A.2 zu sehen.

Die Kolinie L_1 ist in Abbildung 4.10 veranschaulicht. Die Punkte der Kolinie selbst sind dargestellt als ausgefüllte schwarze Kreise \bullet , die Erweiterungen zu einfachen Kopunkten als Kreise mit durchgezogener Linie \circ und die übrigen, zum nichteinfachen Kopunkt gehörenden Elemente als Kreise mit gepunkteter Linie \odot . L_1 repräsentiert beispielsweise das Matching

$$\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_2, b_4), (A_{13}, b_5), (A_9, c_3), (A_3, c_6), (A_8, d_1), (A_4, d_6), (A_5, e_5), (A_{12}, e_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$$

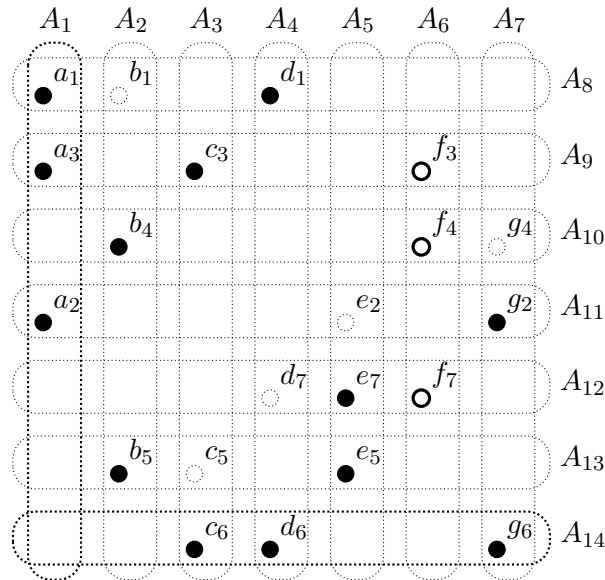


Abbildung 4.10.: eine Kolinie L_+ von T_2 mit $|L_+| = 13$

Unter Beachtung aller Kombinationsmöglichkeiten lassen sich die Ergebnisse auf die 168 Kolinien L_+ mit Kardinalität 13 verallgemeinern. Diese bilden die Äquivalenzklasse

$$\Lambda_1 = \{L_+ \in T_1 \mid |L_+| = 13\}$$

(B) Kolinien der Kardinalität 12 und 2 nichteinfachen Kopunkten: Nun betrachten wir die 532 Kolinien mit 3 einfachen und 2 nichteinfachen Kopunkten.

Jede der Mengen A_i ist in genau 16 Kolinien enthalten. Allerdings gibt es teilweise Überlappungen: 28 der Kolinien sind Obermenge von 2 Mengen $A_i \neq A_j \in \mathcal{A}$, 168 der Kolinien sind Obermenge von genau einer Menge A_i , die übrigen 336 Kolinien haben keine der A_i als Teilmenge. Damit erhalten wir 3 weitere Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} L_+ \text{ hat genau 3 ein- und 2 nichteinfache Kopunkte und} \\ L_+ \supset A_i \cup A_j, i \neq j \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_3 &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} L_+ \text{ hat genau 3 ein- und 2 nichteinfache Kopunkte und} \\ L_+ \supset A_i \text{ für genau ein } i \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_4 &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} L_+ \text{ hat genau 3 ein- und 2 nichteinfache Kopunkte und} \\ L_+ \not\supset A_i \forall i \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst Λ_2 und Λ_3 . Wegen der Symmetrieeigenschaften des Matroids können wir uns auf diejenigen Vertreter L_+ mit $A_1 \subset L_+$ beschränken, vgl. im Anhang Tabelle A.3.

12 dieser Kolinien enthalten nur $A_i, i = 1$, aber keine andere Menge $A_j \in \mathcal{A}, j \neq i$ als Teilmenge, sie sind also Vertreter von Λ_3 . Für beliebiges $i \in \{1, \dots, 14\}$ erhalten wir alle $14 * 12 = 168$ Vertreter dieser Klasse. Auf diesen Kolinien liegen jeweils 3 einfache, ein 2-facher und ein 4-facher Kopunkt.

Die übrigen 4 Kolinien, nämlich L_4, L_8, L_{10} und L_{14} , sind weiterhin Obermenge einer weiteren Menge $A_j \in \mathcal{A}, j \neq 1$. Als Beispiel ist L_4 in Abbildung 4.11 dargestellt. Sie sind Vertreter der Klasse Λ_2 , auf ihnen liegen jeweils 3 einfache und zwei 3-fache Kopunkte. Wir schauen uns die Kolinien L_4, L_8, L_{10} und L_{14} in Tabelle A.3 genauer an und stellen fest, dass sie neben A_1 auch Obermenge von A_{12}, A_{13}, A_{10} bzw. A_{14} sind. Das sind gerade die vier zu $A_i = A_1$ disjunkten Mengen A_j , für die es kein $k \in \{1, \dots, 14\} \setminus \{i, j\}$ gibt, sodass sowohl $A_i \cap A_k$ als auch $A_j \cap A_k$ nicht leer sind. Somit gibt es bei beliebigem $i \in \{1, \dots, 14\}$ insgesamt $14 * 4$ Wahlmöglichkeiten. Da dabei jede Kolinie doppelt gezählt wird, müssen wir noch durch 2 teilen und erhalten $|\Lambda_2| = 14 * 4 / 2 = 28$.

10 der 336 Vertreter von Λ_4 sind im Anhang in Tabelle A.4 zu finden. Wir beobachten, dass manche der Kolinien zwei 3-fache Kopunkte haben, und manche einen 2-fachen und einen 4-fachen Kopunkt. Wir verzichten an dieser Stelle jedoch auf eine weitere Unterteilung dieser Klasse.

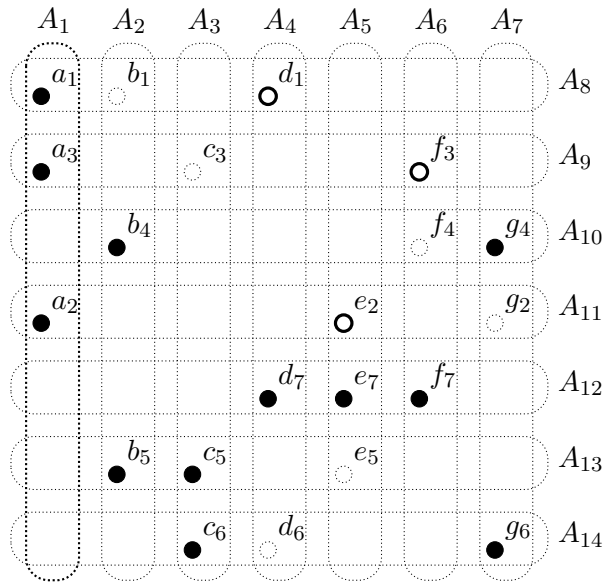


Abbildung 4.11.: eine Kolinie L_+ von T_2 aus Λ_2

(C) Kolinien der Kardinalität 12 und einem nichteinfachen Kopunkt: Es verbleibt noch die Betrachtung von 78736 Kolinien der Kardinalität 12, auf denen jeweils genau 3 einfache und ein nichteinfacher Kopunkt liegen. Wir prüfen, wieviele Mengen aus \mathcal{A} jeweils in diesen Kolinien enthalten sind, um eine Klassifizierung zu erhalten. Die Ergebnisse in Tabelle 4.4 deuten darauf hin, dass wir mindestens 6 weitere Äquivalenzklassen erhalten werden.

Tabelle 4.4.: Kolinien L_+ von T_2 mit Kardinalität 12 und genau 3 einfachen und einem nichteinfachen Kopunkt

$ \{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\} $	Anzahl Kolinien L_+ aus Fall C	Äquivalenz- klasse
0	1344	Λ_5
1	13384	Λ_6
2	31920	Λ_7
3	24864	Λ_8
4	6720	Λ_9
5	504	Λ_{10}
≥ 6	0	

Um die Betrachtung nicht zu komplex zu gestalten, belassen wir es bei dieser Einteilung und definieren diese 6 Klassen wie folgt:

$$\Lambda_5 = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ L_+ \not\supset A_i \forall i \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\}$$

$$\Lambda_6 = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 1 \end{array} \right. \right\}$$

$$\Lambda_7 = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 2 \end{array} \right. \right\}$$

$$\Lambda_8 = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 3 \end{array} \right. \right\}$$

$$\Lambda_9 = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 4 \end{array} \right. \right\}$$

$$\Lambda_{10} = \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 3 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 5 \end{array} \right. \right\}$$

In den Tabellen A.5 bis A.10 im Anhang ab Seite 74 sind jeweils 10 Vertreter dokumentiert.

Kolnien mit genau 4 einfachen Kopunkten

Insgesamt hat die verdreifachte Fanoebene genau 33096 positive Kolnien, auf denen genau 4 einfache und ein nichteinfacher Kopunkt liegen. Wie zuvor prufen wir, wieviele Mengen aus \mathcal{A} jeweils in diesen Kolnien enthalten sind, um eine Klassifizierung zu erhalten. Die Grofen der so definierten Unterklassen sind in Tabelle 4.5 zu sehen.

Tabelle 4.5.: Kolnien L_+ von T_2 mit Kardinalitat 12 und genau 4 einfachen und einem nichteinfachen Kopunkt

$ \{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\} $	Anzahl Kolnien L_+	Äquivalenz- klasse
0	840	Λ_{11}
1	7224	Λ_{12}
2	14112	Λ_{13}
3	9072	Λ_{14}
4	1848	Λ_{15}
≥ 5	0	

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine weiterführende Untersuchung dieser Klassen und geben stattdessen in den Tabellen A.11 bis A.15 ab Seite 80 jeweils 10 Beispiele für jede Äquivalenzklasse.

$$\begin{aligned}\Lambda_{11} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 4 einfache Kopunkte und} \\ L_+ \not\supset A_i \forall i \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{12} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 4 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 1 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{13} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 4 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 2 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{14} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 4 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 3 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{15} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 4 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 4 \end{array} \right. \right\}\end{aligned}$$

Kolnien mit 5 oder mehr einfachen Kopunkten

Unsere Vorgehensweise ist dieselbe wie für die Kolnien mit 4 einfachen Kopunkten. Wir ermitteln zunächst, wieviele Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ jeweils in den Kolnien enthalten sind und erhalten so eine Klasseneinteilung nach 2 verschiedenen Kriterien. Tabelle 4.6 liefert einen Überblick über die Kardinalitäten der Klassen.

$$\begin{aligned}\Lambda_{16} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 5 einfache Kopunkte und} \\ L_+ \not\supset A_i \forall i \in \{1, \dots, 14\} \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{17} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 5 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 1 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{18} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 5 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 2 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{19} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 5 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 3 \end{array} \right. \right\} \\ \Lambda_{20} &= \left\{ L_+ \left| \begin{array}{l} |L_+| = 12 \text{ und } L_+ \text{ hat genau 5 einfache Kopunkte und} \\ |\{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\}| = 4 \end{array} \right. \right\}\end{aligned}$$

und so weiter. Beispiele für diese Klassen befinden sich im Anhang ab Seite 85 in den Tabellen A.16 bis A.28.

Tabelle 4.6.: Kolinien L_+ von T_2 mit Kardinalität 12 und 5 oder mehr einfachen Kopunkten

Anzahl k einfacher Kopunkte	$ \{i \mid A_i \subset L_+, i \in \{1, \dots, 14\}\} $	Anzahl Kolinien L_+	Äquivalenzklasse
5	0	672	Λ_{16}
5	1	5544	Λ_{17}
5	2	8316	Λ_{18}
5	3	4200	Λ_{19}
5	4	84	Λ_{20}
5	≥ 5	0	
6	0	1176	Λ_{21}
6	1	3696	Λ_{22}
6	2	5320	Λ_{23}
6	3	1680	Λ_{24}
6	≥ 4	0	
7	0	1344	Λ_{25}
7	1	5544	Λ_{26}
7	2	4368	Λ_{27}
7	3	504	Λ_{28}
7	≥ 4	0	

4.4.3. Zusammenfassung der Analyse von T_2

Wir haben die positiven Kolinien von T_2 in insgesamt 28 Äquivalenzklassen eingeteilt. Dabei sind wir ebenso vorgegangen wie bei der Untersuchung der verdreifachten Vierpunktgeraden in Abschnitt 4.3.2 und haben als Einteilungskriterien die Anzahl der einfachen und nichteinfachen Kopunkte auf der Kolinie, sowie die Anzahl der in der Kolinie enthaltenen Mengen aus \mathcal{A} genutzt. Die Gesamtübersicht der Äquivalenzklassen von T_2 ist in Tabelle 4.7 zu finden.

Tabelle 4.7.: Einteilung der positiven Kolinien von T_2 in Äquivalenzklassen

Äquivalenzklasse	Anzahl Kolinien L_+	$ L_+ $	Anzahl einfacher Kopunkte auf L_+	Anzahl nichteinfacher Kopunkte auf L_+
Λ_1	168	13	3	1
$\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$	28, 168, 336	12	3	2
$\Lambda_5, \dots, \Lambda_{10}$	vgl. Tab. 4.4	12	3	1
$\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{15}$	vgl. Tab. 4.5	12	4	1
$\Lambda_{16}, \dots, \Lambda_{20}$	} vgl. Tab. 4.6	12	5	1
$\Lambda_{21}, \dots, \Lambda_{24}$		12	6	1
$\Lambda_{25}, \dots, \Lambda_{28}$		12	7	1

5. Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der Matroide haben wir in Kapitel 3.7 eine Definition der chromatischen Zahl auf orientierten Matroiden vorgestellt. Eine der offenen Fragen im Bereich der Färbungstheorie für Matroide ist die Fragestellung, ob es für ein gegebenes Matroid Orientierungen geben kann, sodass die chromatische Zahl verschieden ist. Die Übertragung der Hadwiger-Vermutung $H(3)$ von Graphen auf orientierbare Matroide motiviert die Fragestellung, ob Transversalmatroide dreifärbbar sind.

In Kapitel 3.8 haben wir gezeigt, dass aus der Existenz einer als *positiv* bezeichneten Kolinie in allen einfachen Vertretern einer unter Minoren abgeschlossenen Klasse von Matroiden die Dreifärbbarkeit aller schleifenfreien Matroide dieser Klasse folgt. Das Besondere an dieser Idee ist, dass wir anhand einer Eigenschaft der nichtorientierten Matroide die Färbbarkeit für orientierte Matroide nachweisen können, ohne eine konkrete Orientierung kennen zu müssen. Sie liefert sogar einen Nachweis für alle Orientierungsklassen.

Winfried Hochstättler und Louis Goddyn hatten zunächst die Vermutung, dass in allen Transversalmatroiden so eine Kolinie existiert. Später standen jedoch die verdreifachte Vierpunktgerade und die verdreifachte Fanoebene als potentielle Gegenbeispiele zur Debatte. Besonders das zweite Matroid war für eine nicht computergestützte Überprüfung jedoch zu komplex.

An diesem Punkt hat diese Arbeit angeknüpft. Wir haben Transversalmatroide für die Open-Source-Mathematiksoftware *SAGE* implementiert und anschließend die fraglichen Beispiele untersucht. Für beide Matroide konnten wir sogar überraschend viele positive Kolinien finden.

Aufgrund der Ergebnisse in dieser Arbeit kann man nun wieder vermuten, dass in allen Transversalmatroiden stets eine Kolinie mit mehr einfachen als nichteinfachen Kopunkten existiert. Leider sind Transversalmatroide aber nicht unter Bildung von Minoren abgeschlossen. Allerdings gibt es sogar eine noch stärkere Vermutung: Wenn ein Matroid keine positive Kolinie enthält, dann hat es einen $\mathcal{M}(K_4)$ oder einen P_7 -Minor. Der P_7 ist ein Matroid vom Rang 3, das viele Kolinien mit je zwei einfachen und nichteinfachen Kopunkten enthält. Er besitzt jedoch keine positive Kolinie. Der P_7 ist wie der $\mathcal{M}(K_4)$ kein Gammoid. Da Gammoide abgeschlossen unter Bildung von Minoren sind, kann man somit vermuten, dass sogar Gammoide stets eine positive Kolinie enthalten. Daraus würde die Dreifärbbarkeit aller Gammoide folgen.

A. Anhang

A.1. Quelltexte

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden mehrzeilige Kommentare und Dokumentationszeichenketten aus den Listings entfernt.

A.1.1. Implementierung des Algorithmus von Hopcroft und Karp

Listing A.1: Implementierung Algorithmus Augmentierende Pfade

```
1  cpdef augmentingpaths(self, A, matching_edges=[]):
2      verbose = self._verbose_augmentingpaths
3      if verbose: print "calculate augmenting paths for matching" + repr(A)
4      (matching_edges) + " in set " + repr(A)
5      matched_knots = set()
6      for e in matching_edges: matched_knots.update(e)
7      L=[]; X=[]; X_has_unmatched_vertices = False
8
9      subg = DiGraph()
10     # build directed graph containing the augmenting paths
11     for v in A:
12         if v in matched_knots: continue;
13         L.append(v)
14         subg.add_vertex(v)
15         for w in self._bibgraph.neighbors(v):
16             if verbose: print " root", v, "with X-successor", w
17             subg.add_vertex(w)
18             subg.add_edge(w,v) #backwards directed edge
19             if w not in X:
20                 X.append(w)
21                 if w not in matched_knots:
22                     X_has_unmatched_vertices = True
23
24     if verbose:
25         print " list of roots:", L, "\n", " X =", X
26
27     while len(X)>0 and not X_has_unmatched_vertices:
28         if verbose: print " follow matching edges from X into subset"
29         Y = []
30         for v in X:
31             for e in matching_edges:
32                 if v in e:
33                     w = e[1 - e.index(v)]
34                     if w not in Y:
35                         Y.append(w)
36                         subg.add_vertex(w)
37                         subg.add_edge(w,v) #backwards directed edge
```

```

37         if verbose: print " X-vertex", v, "with Y-↔
           successor", w
38     if verbose:
39         print " Y =", Y
40         print " follow non-matching edges from Y into self.↔
           bipartite_graph().right"
41     X = []; edges = []; X_has_unmatched_vertices = False
42
43     for v in Y:
44         for e in self._bibgraph.edges(labels=False):
45             # e is a tuple, so its vertices may be in wrong order
46             if v in e and set(e) not in [set(eta) for eta in ↔
           matching_edges]:
47                 w = e[1 - e.index(v)]
48                 if w not in subg.vertices():
49                     X.append(w)
50                     edges.append((w,v)) #backwards directed edge
51                     # first, we collect all the new edges
52                     # and add them to subg later
53                     # otherwise the algorithm won't work
54                     if verbose: print " Y-vertex", v, "with X-↔
           successor", w
55                 if w not in matched_knots: X_has_unmatched_vertices↔
           = True
56     subg.add_vertices(X)
57     subg.add_edges(edges)
58
59     if len(X) == 0:
60         if verbose: print " STOP, X is empty --> maximum Matching"
61         return []
62
63     P=[]
64     for v in X:
65         if v in matched_knots or v not in subg.vertices():
66             if verbose:
67                 print " ", v, "is matched or belongs to another aug.↔
           path, skip.";
68             continue
69
70         if verbose: print " start depth-first-search at", v
71         path = []
72
73         lastp = None
74         for w in subg.depth_first_search(v, ignore_direction=False):
75             if lastp != None:
76                 path.append((w, lastp) if w in self._bibgraph.left else↔
           (lastp, w))
77             subg.delete_vertex(w)
78             if verbose: print " augmenting path from", v, ": ", path
79             if w in L:
80                 if verbose: print w, "is in L, path finished."
81                 # append the edges of this augmenting path to the list P
82                 # of augmenting edges. Because this is a set of vertex-
83                 # disjoint pathes (Hopcroft/Carp 1973, p.230), no

```

```

84         # complicated merging is needed.
85         P = P + path
86         break
87         lastp = w
88     return P

```

Listing A.2: Implementierung Maximales Matching

```

1  cpdef matching(self, A=None, matching_edges=[]):
2
3      if A is None:
4          A = self._groundset
5          verbose = self._verbose_bibmatching
6          P = self.augmentingpathes(A, matching_edges)
7          if len(P) == 0:
8              if verbose: print " return maximum matching:", matching_edges
9              return matching_edges
10
11         # Matching is not maximal, augment it
12         if verbose: print " augment matching", matching_edges, "with  $\leftrightarrow$ 
13             augmenting edges", P
14         newmatching = set(P).symmetric_difference(set(matching_edges))
15         return self.matching(A, newmatching)

```

A.1.2. Implementierung der Transversalmatroide in SAGE

Listing A.3: Implementierung Klasse Transversalmatroid

```

1  from sage.matroids.matroid import Matroid
2  from sage.matroids.basis_matroid import BasisMatroid
3  from sage.matroids.set_system import SetSystem
4
5  from sage.combinat.subset import Subsets
6  from sage.graphs.bipartite_graph import BipartiteGraph
7  from sage.graphs.digraph import DiGraph
8  from sage.matroids.utilities import setprint_s
9
10 def __unpickle_transversal_matroid(version, data):
11     cdef TransversalBasisMatroid M
12     if version != 0:
13         raise TypeError("object was created with newer version of  $\leftrightarrow$ 
14             TransversalBasisMatroid-class. Please upgrade.")
15     E, BG, name = data
16     M = TransversalBasisMatroid(groundset=E, bipartite_graph=BG)
17     M._reset_invariants()
18     M.reset_current_basis()
19     if name is not None:
20         M.rename(name)
21     return M
22 cdef class TransversalBasisMatroid(BasisMatroid):
23
24     cpdef object _bibgraph

```



```

25 cpdef int _verbose_bibmatching
26 cpdef int _verbose_augmentingpaths
27
28 property verbosity_augmenting_paths:
29
30     def __get__(self):
31         return self._verbose_augmentingpaths
32     def __set__(self, value):
33         if value:
34             self._verbose_augmentingpaths = True
35         else:
36             self._verbose_augmentingpaths = False
37     def __del__(self):
38         self._verbose_augmentingpaths = False
39
40 property verbosity_matching:
41
42     def __get__(self):
43         return self._verbose_bibmatching
44     def __set__(self, value):
45         if value:
46             self._verbose_bibmatching = True
47         else:
48             self._verbose_bibmatching = False
49     def __del__(self):
50         self._verbose_bibmatching = False
51
52 # NECESSARY
53 def __init__(self, M=None, groundset=None, family_sets=None, ←
54             bipartite_graph=None, right=False):
55
56     self._verbose_augmentingpaths = False
57     self._verbose_bibmatching = False
58     groundset = set()
59     rank = 0
60     if isinstance(M, TransversalBasisMatroid):
61         self._bibgraph = M.bipartite_graph().copy(immutable=True)
62         groundset = frozenset(self._bibgraph.left)
63         rank = M.rank()
64     elif isinstance(bipartite_graph, BipartiteGraph):
65         # when right == True, we have to exchange the left and
66         # right set of vertices
67         if right:
68             B = BipartiteGraph()
69             B.add_vertices(bipartite_graph.left, right=True)
70             B.add_vertices(bipartite_graph.right, left=True)
71             B.add_edges(bipartite_graph.edges())
72         else:
73             B = BipartiteGraph(bipartite_graph)
74             self._bibgraph = B.copy(immutable=True)
75             groundset = frozenset(self._bibgraph.left)
76             rank = len(self.matching(groundset, []))
77     else:
78         # building our own bipartite graph...

```

```

78         E = set()
79         B = BipartiteGraph()
80         for k in family_sets:
81             E.update(k)
82         if groundset is not None:
83             # check if groundset contains union of all sets
84             # if not, we silently update the groundset
85             if not groundset.issuperset(E):
86                 groundset.update(E)
87         else:
88             groundset = frozenset(E)
89             B.add_vertices(groundset, left=True)
90             for k in family_sets:
91                 v = B.add_vertex(right=True)
92                 for e in k:
93                     B.add_edge(v,e)
94             self._bibgraph = B.copy(immutable=True)
95             rank = len(self.matching(groundset, []))
96
97             # collect the bases, needed for super.init()
98             BB = []
99             for subset in Subsets(self._bibgraph.left, rank):
100                 #if len(self.__augmentingpaths(subset, [])) == 0:
101                 if len(self.matching(subset, [])) == rank:
102                     BB.append(subset)
103             super(TransversalBasisMatroid, self).__init__(groundset=groundset, ←
rank=rank, bases=BB)
104
105 cpdef bipartite_graph(self):
106
107     return BipartiteGraph(self._bibgraph)
108
109
110 cpdef groundset(self):
111
112     return frozenset(self._groundset)
113
114 #! Listing A.1: Augmentierende Pfade ... !#
115
116
117 #! Listing A.2: Maximales Matching... !#
118
119
120 #cpdef _rank(self, X): # reuse function from parent class BasisMatroid
121
122 # REPRESENTATION
123 def _repr_(self):
124
125     return "Transversal" + Matroid._repr_(self) + " with a family of " ←
+ str(len(self._bibgraph.right)) + " sets"
126
127 # COMPARISON
128 def __hash__(self):
129

```

```

130     return hash(tuple([self.groundset(), self._bibgraph]))
131
132 def __richcmp__(left, right, int op):
133
134     cdef TransversalBasisMatroid lt, rt
135     if op in [0, 1, 4, 5]: # <, <=, >, >=
136         return NotImplemented
137     if not isinstance(left, TransversalBasisMatroid) or not isinstance(←
        right, TransversalBasisMatroid):
138         return NotImplemented
139     lt = <TransversalBasisMatroid> left
140     rt = <TransversalBasisMatroid> right
141     if op == 2: # ==
142         res = True
143     if op == 3: # !=
144         res = False
145     # res gets inverted if matroids are deemed different.
146     if lt.groundset() != rt.groundset():
147         return not res
148     if lt._bibgraph == rt._bibgraph:
149         return res
150     return not res
151
152 # COPYING, LOADING, SAVING
153 def __copy__(self):
154
155     N = TransversalBasisMatroid(M=self)
156     N._groundset = self._groundset
157     N._bibgraph = self._bibgraph
158     N._matroid_rank = self._matroid_rank
159     if getattr(self, '__custom_name') is not None: # because of name ←
        wrangling, this is not caught by the default copy
160         N.rename(getattr(self, '__custom_name'))
161     return N
162
163 def __deepcopy__(self, memo={}):
164
165     from copy import deepcopy
166     N = TransversalBasisMatroid(M=self)
167     if getattr(self, '__custom_name') is not None: # because of name ←
        wrangling, this is not caught by the default deepcopy
168         N.rename(deepcopy(getattr(self, '__custom_name'), memo))
169     return N
170
171 def __reduce__(self):
172
173     import sage.matroids.unpickling
174     data = (self._groundset, self._bibgraph, getattr(self, '←
        __custom_name'))
175     version = 0
176     return __unpickle_transversal_matroid, (version, data)

```

Listing A.4: Beispiel: Berechnung eines maximalen Matchings für eine gegebene Menge

```

sage: load('../transversalmatroids-1.0/src/transversal_basis_matroid.pyx')
Compiling ../transversalmatroids-1.0/src/transversal_basis_matroid.pyx...
sage: mysets = {'A_1': ['a_1', 'a_2', 'a_3'], 'A_2': ['b_1', 'b_2', 'b_4'],
.....:          'A_3': ['c_1', 'c_3', 'c_4'], 'A_4': ['d_2', 'd_3', 'd_4'],
.....:          'A_5': ['a_1', 'b_1', 'c_1'], 'A_6': ['a_2', 'b_2', 'd_2'],
.....:          'A_7': ['a_3', 'c_3', 'd_3'], 'A_8': ['b_4', 'c_4', 'd_4'] }
sage: TB = TransversalBasisMatroid(family_sets=mysets.values())
sage: TB
TransversalMatroid of rank 8 on 12 elements with a family of 8 sets
sage: TB.verbosity_matching = 1 # verbose output in matching-algorithm
sage: TB.verbosity_augmenting_pathes = 1 # verbose output in augmenting-↔
      pathes-algorithm
sage: S=frozenset({'a_1', 'a_2', 'a_3', 'c_1', 'c_3', 'd_2', 'd_3'})
sage: TB.is_dependent(S)
True
sage: TB.matching(S)
calculate augmenting pathes for matching[] in set frozenset(['c_1', 'c_3', ↔
      'a_3', 'a_2', 'a_1', 'd_2', 'd_3'])
root c_1 with X-successor 2
root c_1 with X-successor 4
root c_3 with X-successor 0
root c_3 with X-successor 4
root a_3 with X-successor 0
root a_3 with X-successor 6
root a_2 with X-successor 1
root a_2 with X-successor 6
root a_1 with X-successor 2
root a_1 with X-successor 6
root d_2 with X-successor 1
root d_2 with X-successor 3
root d_3 with X-successor 0
root d_3 with X-successor 3
list of roots: ['c_1', 'c_3', 'a_3', 'a_2', 'a_1', 'd_2', 'd_3']
X = [2, 4, 0, 6, 1, 3]
start depth-first-search at 2
augmenting path from 2 : []
augmenting path from 2 : [('a_1', 2)]
a_1 is in L, path finished.
start depth-first-search at 4
augmenting path from 4 : []
augmenting path from 4 : [('c_3', 4)]
c_3 is in L, path finished.
start depth-first-search at 0
augmenting path from 0 : []
augmenting path from 0 : [('d_3', 0)]
d_3 is in L, path finished.
start depth-first-search at 6
augmenting path from 6 : []
augmenting path from 6 : [('a_2', 6)]
a_2 is in L, path finished.
start depth-first-search at 1
augmenting path from 1 : []

```

```

    augmenting path from 1 : [('d_2', 1)]
d_2 is in L, path finished.
    start depth-first-search at 3
    augmenting path from 3 : []
    augment matching [] with augmenting edges [('a_1', 2), ('c_3', 4), ('d_3', ←
        0), ('a_2', 6), ('d_2', 1)]
    calculate augmenting pathes for matchingset([('a_2', 6), ('d_2', 1), ('d_3'←
        ', 0), ('a_1', 2), ('c_3', 4)]) in set frozenset(['c_1', 'c_3', 'a_3', ←
        'a_2', 'a_1', 'd_2', 'd_3'])
    root c_1 with X-successor 2
    root c_1 with X-successor 4
    root a_3 with X-successor 0
    root a_3 with X-successor 6
    list of roots: ['c_1', 'a_3']
    X = [2, 4, 0, 6]
    follow matching edges from X into subset
    X-vertex 2 with Y-successor a_1
    X-vertex 4 with Y-successor c_3
    X-vertex 0 with Y-successor d_3
    X-vertex 6 with Y-successor a_2
    Y = ['a_1', 'c_3', 'd_3', 'a_2']
    follow non-matching edges from Y into self.bipartite_graph().right
    Y-vertex d_3 with X-successor 3
    Y-vertex a_2 with X-successor 1
    start depth-first-search at 3
    augmenting path from 3 : []
    augmenting path from 3 : [('d_3', 3)]
    augmenting path from 3 : [('d_3', 3), ('d_3', 0)]
    augmenting path from 3 : [('d_3', 3), ('d_3', 0), ('a_3', 0)]
a_3 is in L, path finished.
    1 is matched or belongs to another aug.path, skip.
    augment matching set([('a_2', 6), ('d_2', 1), ('d_3', 0), ('a_1', 2), ('←
        c_3', 4)]) with augmenting edges [('d_3', 3), ('d_3', 0), ('a_3', 0)]
    calculate augmenting pathes for matchingset([('a_2', 6), ('d_3', 3), ('c_3'←
        ', 4), ('d_2', 1), ('a_1', 2), ('a_3', 0)]) in set frozenset(['c_1', '←
        c_3', 'a_3', 'a_2', 'a_1', 'd_2', 'd_3'])
    root c_1 with X-successor 2
    root c_1 with X-successor 4
    list of roots: ['c_1']
    X = [2, 4]
    follow matching edges from X into subset
    X-vertex 2 with Y-successor a_1
    X-vertex 4 with Y-successor c_3
    Y = ['a_1', 'c_3']
    follow non-matching edges from Y into self.bipartite_graph().right
    Y-vertex a_1 with X-successor 6
    Y-vertex c_3 with X-successor 0
    follow matching edges from X into subset
    X-vertex 6 with Y-successor a_2
    X-vertex 0 with Y-successor a_3
    Y = ['a_2', 'a_3']
    follow non-matching edges from Y into self.bipartite_graph().right
    Y-vertex a_2 with X-successor 1
    follow matching edges from X into subset

```

```

X-vertex 1 with Y-successor d_2
Y = ['d_2']
follow non-matching edges from Y into self.bipartite_graph().right
Y-vertex d_2 with X-successor 3
follow matching edges from X into subset
X-vertex 3 with Y-successor d_3
Y = ['d_3']
follow non-matching edges from Y into self.bipartite_graph().right
STOP, X is empty --> maximum Matching
return maximum matching: set([('a_2', 6), ('d_3', 3), ('c_3', 4), ('d_2', ←
    1), ('a_1', 2), ('a_3', 0)])
{('a_1', 2), ('a_2', 6), ('a_3', 0), ('c_3', 4), ('d_2', 1), ('d_3', 3)}

```

A.1.3. Implementierung der Kolinien-Suche

Listing A.5: Script zur Suche von Kolinien mit mehr einfachen als nichteinfachen Koinzidenzpunkten

```

1 #
2 # This Python file uses the following encoding: utf-8
3 #
4 #! Prerequisites: !#
5 # - MYDIR - a variable containing a string, where to save the DB
6 #   This should be a directory with trailing slash, otherwise the last
7 #   part of the string will be treated as a filename prefix.
8 #   If you dont want to create a DB, don't define this Variable.
9 # - EXAMPLE - a variable, containing a number: (default: 1)
10 #   1 = verdreifachte vierpunktgrade, 2 = ver3fachte Fanoebene
11 # - the file 'db-template.sql'
12
13 load('../transversalmatroids-1.0/src/transversal_basis_matroid.pyx')
14
15 from datetime import datetime
16 USEDDB = ( 'MYDIR' in locals() or 'MYDIR' in globals() )
17 if USEDDB:
18     import sqlite3
19     import os.path
20 from sage.matroids.utilities import setprint_s # help function for printing↔
    sets nicely
21 if not ('EXAMPLE' in locals() or 'EXAMPLE' in globals() ):
22     EXAMPLE = 1
23
24 #! help functions !#
25 ts = datetime.now()
26 def print_ts(what):
27     "print the string representation of the object together with the ↔
    timestamp"
28     print str(datetime.now()) + ' - ' + str(what)
29
30 def print_td(what):
31     "print the string representation of the object together with the ↔
    timedelta, and resets the timestamp"
32     print '          ' + str(reset_ts()) + ' - ' + str(what)

```

```

33
34 def reset_ts():
35     "reset internal timestamp to now() and returns the timedelta from last ←
        reset"
36     global ts
37     res = datetime.now() - ts
38     ts = datetime.now()
39     return res
40
41 def printset(iter):
42     return " ".join(sorted(list(iter)))
43
44 def latexset(iter):
45     rstr = '\{ ' + ", ".join([setprint_s(x) for x in iter]) + ' \}'
46     return rstr
47
48 def get_copoints(coline_index=0):
49
50     try:
51         L = colines[coline_index]
52     except TypeError, te:
53         L = coline_index
54     res = []
55     for H in copoints:
56         if L.issubset(H): res.append(H.difference(L))
57     return res
58
59 def contractable(mymatroid):
60
61     for l in mymatroid.flats(mymatroid.rank()-2):
62         anz_simple=0
63         anz_nonsimple=0
64         contractme = False
65         for h in mymatroid.flats(mymatroid.rank()-1):
66             if l.issubset(h):
67                 if len(h.difference(l)) == 1:
68                     contractme = h
69                     anz_simple += 1
70                 else: anz_nonsimple += 1
71         if anz_simple > anz_nonsimple:
72             print "coline", l, "is positive"
73             print "try to contract", contractme
74             return contractme.difference(l)
75     return false
76
77 #! prepare the matroid: !#
78
79 grundliste = (); mysets = []
80
81 if EXAMPLE == 1:
82     grundliste = [j + '_' + str(i+1)
83                 for j in ['a', 'b', 'c', 'd']
84                 for i in range(4)]
85     mysets = {'A_1': ['a_1', 'a_2', 'a_3'], 'A_2': ['b_1', 'b_2', 'b_4'],

```

```

86         'A_3':['c_1', 'c_3', 'c_4'], 'A_4':['d_2', 'd_3', 'd_4'],
87         'A_5':['a_1', 'b_1', 'c_1'], 'A_6':['a_2', 'b_2', 'd_2'],
88         'A_7':['a_3', 'c_3', 'd_3'], 'A_8':['b_4', 'c_4', 'd_4'] }
89     else:
90         grundliste = [j + '_' + str(i+1)
91                       for j in ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g']
92                       for i in range(7)]
93     mysets = { 'A_1':['a_1', 'a_2', 'a_3'], 'A_2':['b_1', 'b_4', 'b_5'],
94              'A_3':['c_3', 'c_5', 'c_6'], 'A_4':['d_1', 'd_6', 'd_7'],
95              'A_5':['e_2', 'e_5', 'e_7'], 'A_6':['f_3', 'f_4', 'f_7'],
96              'A_7':['g_2', 'g_4', 'g_6'], 'A_8':['a_1', 'b_1', 'd_1'],
97              'A_{11}':['a_2', 'e_2', 'g_2'], 'A_9':['a_3', 'c_3', 'f_3'],
98              'A_{10}':['b_4', 'f_4', 'g_4'], 'A_{13}':['b_5', 'c_5', 'e_5',
99              ''],
100             'A_{14}':['c_6', 'd_6', 'g_6'], 'A_{12}':['d_7', 'e_7', 'f_7'] }
101
102 B = BipartiteGraph(mysets)
103
104 print_ts( "Create the Matroid... (will take some time to determine all ↵
105          bases) ")
106 reset_ts()
107 TB = TransversalBasisMatroid(bipartite_graph=B, right=('A_1' in B.left))
108 print_td( "Matroid TB successfully created")
109
110 #! prepare database !#
111 if USEDB:
112     __path = str(MYDIR) + 'fall' + str(EXAMPLE) + '.db'
113     print_ts("Prepare Database " + __path + " ...")
114     if os.path.isfile(__path):
115         print_ts("Removing old file " + __path)
116         os.remove(__path)
117
118     conn = sqlite3.connect(__path)
119     c = conn.cursor()
120     with open("db_template.sql") as f:
121         for line in f:
122             if line.startswith("#"): continue
123             c.execute(line)
124     conn.commit()
125
126 #! fill database !#
127 if USEDB:
128     for i in range(len(grundliste)):
129         c.execute("INSERT INTO points VALUES(?, ?)", (i, grundliste[i] ))
130
131 print_ts("Detecting number of flats")
132 reset_ts()
133 rg = TB.full_rank()
134 flatcount = TB.f_vector()
135 no_colines = flatcount[rg-2]
136 no_copoints = flatcount[rg-1]
137 print_td(str(no_colines) + ' colines, ' + str(no_copoints) + ' copoints.')
138

```



```

137 copoints = list(TB.flats(TB.full_rank()-1))
138 if USEDB:
139     print_ts("Save all copoints into database...")
140     reset_ts()
141     for h in range(len(copoints)):
142         c.execute("INSERT INTO copoints VALUES(?, ?, ?)", (h, len(copoints[←
                h]), printset(copoints[h]) ))
143         if mod(h, 1000) == 0:
144             print_ts( str(h) + " copoints saved into database.")
145             conn.commit()
146     conn.commit()
147     print_td('Finished saving the copoints.')
148
149 #! Main Part !#
150 print_ts("Checking all colines for simple and non-simple copoints...")
151 reset_ts()
152 l=0
153 # list of all colines
154 colines = []
155 # list of colines with more simple than nonsimple copoints
156 # every entry is a tuple: ( coline-set, coline-index )
157 colines_wsimple = []
158
159 for L in TB.flats(rg -2 ):
160     p_einf=0; p_neinf=0; h=0
161     for H in copoints:
162         if L.issubset(H):
163             # Copoint H lies on L, check if its simple
164             sizediff = len(H.difference(L))
165             if sizediff == 1: p_einf += 1
166             else: p_neinf += 1
167             if USEDB: c.execute("INSERT INTO copoints_colines VALUES(?, ?, ?)←
                ", (l, h, sizediff))
168         h += 1
169
170     colines.append(L)
171     if p_einf > p_neinf: colines_wsimple.append((L, l))
172
173     if USEDB: c.execute("INSERT INTO colines VALUES(?, ?, ?, ?, ?)", (l, ←
        len(L), printset(L), p_einf, p_neinf ))
174     l += 1
175
176     if mod(l, 200) == 0:
177         if USEDB: conn.commit()
178         if mod(l, 2000) == 0:
179             print_ts( str(l) + " colines checked. Found "
180                 + str(len(colines_wsimple)) +
181                 " colines with more simple than non-simple copoints.")
182
183 if USEDB:
184     conn.commit()
185     conn.close()
186 grundliste = sorted(TB.groundset_list())
187

```

```

188 print_td( "FINISHED.")
189 print_ts( str(l) + " colines checked. Found " + str(len(colines_wsimple))
190           + " colines with more simple than non-simple copoints.")
191
192 reset(['i','sizediff','j','USEDDB','H','L','l','flatcount','p_neinf','p_einf←
      ','h','B'])
193
194

```

Listing A.6: SQL-Vorlage für das Script zur Kolinienuche

```

1 # exactly one statement per line!
2 PRAGMA page_size = 8192
3 PRAGMA quick_check
4 CREATE TABLE colines ( id INTEGER NOT NULL PRIMARY KEY, size INTEGER, ←
      representation TEXT, simple_copoints INTEGER, nonsimple_copoints ←
      INTEGER )
5 CREATE TABLE copoints ( id INTEGER NOT NULL PRIMARY KEY, size INTEGER, ←
      representation TEXT )
6 CREATE TABLE points ( id INTEGER NOT NULL PRIMARY KEY, name TEXT )
7 CREATE TABLE copoints_colines ( coline_id INTEGER, copoint_id INTEGER, ←
      sizediff INTEGER, FOREIGN KEY(copoint_id) REFERENCES copoints(id), ←
      FOREIGN KEY(coline_id) REFERENCES colines(id) )

```

A.2. Auswahl positiver Kolinien

Für die in Kapitel 4 vorgestellten Matroide sind nachstehend ausgewählte Kolinien dokumentiert, auf denen mehr einfache als nichteinfache Kopunkte liegen.

A.2.1. Kolinien der verdreifachten Vierpunktgeraden T_1

Tabelle A.1.: Kolinien L_+ von T_1 mit 3 einfachen Kopunkten und mit $A_1 \subset L_+$ und $A_i \not\subset L_+$ für $i \neq 1$.

Kolinie	einfache Kopunkte	mehrfache Kopunkte
$L_1 := A_1 \cup \{c_1, d_2, d_4\}$	$L_1 \cup \{b_1\}, L_1 \cup \{b_2\}, L_1 \cup \{b_4\}$	$L_1 \cup \{c_3, c_4, d_3\}$
$L_2 := A_1 \cup \{c_3, d_2, d_4\}$	$L_2 \cup \{b_1\}, L_2 \cup \{b_2\}, L_2 \cup \{b_4\}$	$L_2 \cup \{c_1, c_4, d_3\}$
$L_3 := A_1 \cup \{c_4, d_2, d_4\}$	$L_3 \cup \{b_1\}, L_3 \cup \{b_2\}, L_3 \cup \{b_4\}$	$L_3 \cup \{c_1, c_3, d_3\}$
$L_4 := A_1 \cup \{b_1, d_2, d_4\}$	$L_4 \cup \{c_1\}, L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_4\}$	$L_4 \cup \{b_2, b_4, d_3\}$
$L_5 := A_1 \cup \{b_4, d_2, d_4\}$	$L_5 \cup \{c_1\}, L_5 \cup \{c_3\}, L_5 \cup \{c_4\}$	$L_5 \cup \{b_1, b_2, d_3\}$
$L_6 := A_1 \cup \{c_1, c_4, d_2\}$	$L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_2\}, L_6 \cup \{b_4\}$	$L_6 \cup \{c_3, d_3, d_4\}$
$L_7 := A_1 \cup \{c_3, c_4, d_2\}$	$L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{b_2\}, L_7 \cup \{b_4\}$	$L_7 \cup \{c_1, d_3, d_4\}$
$L_8 := A_1 \cup \{b_1, c_3, d_2\}$	$L_8 \cup \{d_4\}, L_8 \cup \{c_4\}, L_8 \cup \{b_4\}$	$L_8 \cup \{b_2, c_1, d_3\}$
$L_9 := A_1 \cup \{b_1, b_4, d_2\}$	$L_9 \cup \{c_1\}, L_9 \cup \{c_3\}, L_9 \cup \{c_4\}$	$L_9 \cup \{b_2, d_3, d_4\}$
$L_{10} := A_1 \cup \{c_1, d_3, d_4\}$	$L_{10} \cup \{b_1\}, L_{10} \cup \{b_2\}, L_{10} \cup \{b_4\}$	$L_{10} \cup \{c_3, c_4, d_2\}$
$L_{11} := A_1 \cup \{c_4, d_3, d_4\}$	$L_{11} \cup \{b_1\}, L_{11} \cup \{b_2\}, L_{11} \cup \{b_4\}$	$L_{11} \cup \{c_1, c_3, d_2\}$
$L_{12} := A_1 \cup \{b_1, d_3, d_4\}$	$L_{12} \cup \{c_1\}, L_{12} \cup \{c_3\}, L_{12} \cup \{c_4\}$	$L_{12} \cup \{b_2, b_4, d_2\}$

$$\begin{array}{lll}
L_{13} := A_1 \cup \{b_2, d_3, d_4\} & L_{13} \cup \{c_1\}, L_{13} \cup \{c_3\}, L_{13} \cup \{c_4\} & L_{13} \cup \{b_1, b_4, d_2\} \\
L_{14} := A_1 \cup \{b_4, d_3, d_4\} & L_{14} \cup \{c_1\}, L_{14} \cup \{c_3\}, L_{14} \cup \{c_4\} & L_{14} \cup \{b_1, b_2, d_2\} \\
L_{15} := A_1 \cup \{c_1, c_4, d_3\} & L_{15} \cup \{b_1\}, L_{15} \cup \{b_2\}, L_{15} \cup \{b_4\} & L_{15} \cup \{c_3, d_2, d_4\} \\
L_{16} := A_1 \cup \{b_2, c_1, d_3\} & L_{16} \cup \{d_4\}, L_{16} \cup \{c_4\}, L_{16} \cup \{b_4\} & L_{16} \cup \{b_1, c_3, d_2\} \\
L_{17} := A_1 \cup \{b_1, b_4, d_3\} & L_{17} \cup \{c_1\}, L_{17} \cup \{c_3\}, L_{17} \cup \{c_4\} & L_{17} \cup \{b_2, d_2, d_4\} \\
L_{18} := A_1 \cup \{b_2, b_4, d_3\} & L_{18} \cup \{c_1\}, L_{18} \cup \{c_3\}, L_{18} \cup \{c_4\} & L_{18} \cup \{b_1, d_2, d_4\} \\
L_{19} := A_1 \cup \{c_1, c_4, d_4\} & L_{19} \cup \{b_1\}, L_{19} \cup \{b_2\}, L_{19} \cup \{b_4\} & L_{19} \cup \{c_3, d_2, d_3\} \\
L_{20} := A_1 \cup \{c_3, c_4, d_4\} & L_{20} \cup \{b_1\}, L_{20} \cup \{b_2\}, L_{20} \cup \{b_4\} & L_{20} \cup \{c_1, d_2, d_3\} \\
L_{21} := A_1 \cup \{b_1, b_4, d_4\} & L_{21} \cup \{c_1\}, L_{21} \cup \{c_3\}, L_{21} \cup \{c_4\} & L_{21} \cup \{b_2, d_2, d_3\} \\
L_{22} := A_1 \cup \{b_2, b_4, d_4\} & L_{22} \cup \{c_1\}, L_{22} \cup \{c_3\}, L_{22} \cup \{c_4\} & L_{22} \cup \{b_1, d_2, d_3\} \\
L_{23} := A_1 \cup \{b_2, c_1, c_4\} & L_{23} \cup \{d_2\}, L_{23} \cup \{d_3\}, L_{23} \cup \{d_4\} & L_{23} \cup \{b_1, b_4, c_3\} \\
L_{24} := A_1 \cup \{b_4, c_1, c_4\} & L_{24} \cup \{d_2\}, L_{24} \cup \{d_3\}, L_{24} \cup \{d_4\} & L_{24} \cup \{b_1, b_2, c_3\} \\
L_{25} := A_1 \cup \{b_2, b_4, c_1\} & L_{25} \cup \{d_2\}, L_{25} \cup \{d_3\}, L_{25} \cup \{d_4\} & L_{25} \cup \{b_1, c_3, c_4\} \\
L_{26} := A_1 \cup \{b_1, c_3, c_4\} & L_{26} \cup \{d_2\}, L_{26} \cup \{d_3\}, L_{26} \cup \{d_4\} & L_{26} \cup \{b_2, b_4, c_1\} \\
L_{27} := A_1 \cup \{b_2, c_3, c_4\} & L_{27} \cup \{d_2\}, L_{27} \cup \{d_3\}, L_{27} \cup \{d_4\} & L_{27} \cup \{b_1, b_4, c_1\} \\
L_{28} := A_1 \cup \{b_4, c_3, c_4\} & L_{28} \cup \{d_2\}, L_{28} \cup \{d_3\}, L_{28} \cup \{d_4\} & L_{28} \cup \{b_1, b_2, c_1\} \\
L_{29} := A_1 \cup \{b_1, b_4, c_3\} & L_{29} \cup \{d_2\}, L_{29} \cup \{d_3\}, L_{29} \cup \{d_4\} & L_{29} \cup \{b_2, c_1, c_4\} \\
L_{30} := A_1 \cup \{b_2, b_4, c_3\} & L_{30} \cup \{d_2\}, L_{30} \cup \{d_3\}, L_{30} \cup \{d_4\} & L_{30} \cup \{b_1, c_1, c_4\} \\
L_{31} := A_1 \cup \{b_1, b_4, c_4\} & L_{31} \cup \{d_2\}, L_{31} \cup \{d_3\}, L_{31} \cup \{d_4\} & L_{31} \cup \{b_2, c_1, c_3\} \\
L_{32} := A_1 \cup \{b_2, b_4, c_4\} & L_{32} \cup \{d_2\}, L_{32} \cup \{d_3\}, L_{32} \cup \{d_4\} & L_{32} \cup \{b_1, c_1, c_3\}
\end{array}$$

A.2.2. Kolinien der verdreifachten Fanoebene T_2

Tabelle A.2.: Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_1 mit $A_1, A_{14} \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \{b_4, b_5, c_3, d_1, e_5, e_7, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{f_3\},$ $L_1 \cup \{b_1, c_5, d_7, e_2, g_4\}$
Matching in L_1 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_2, b_4), (A_{13}, b_5), (A_9, c_3), (A_3, c_6),$ $(A_8, d_1), (A_4, d_6), (A_5, e_5), (A_{12}, e_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	
$L_2 = \{b_4, b_5, c_3, d_1, e_5, f_4, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_2 \cup \{e_7\}, L_2 \cup \{d_7\}, L_2 \cup \{f_7\},$ $L_2 \cup \{b_1, c_5, e_2, f_3, g_4\}$
Matching in L_2 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_9, a_3), (A_{10}, b_4), (A_{13}, b_5), (A_3, c_6),$ $(A_8, d_1), (A_4, d_6), (A_5, e_5), (A_6, f_4), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	
$L_3 = \{b_4, b_5, c_3, d_1, f_4, f_7, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{e_5\},$ $L_3 \cup \{b_1, c_5, d_7, f_3, g_4\}$
Matching in L_3 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_9, a_3), (A_{10}, b_4), (A_2, b_5), (A_3, c_6),$ $(A_8, d_1), (A_4, d_6), (A_6, f_4), (A_{12}, f_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	
$L_4 = \{b_4, c_3, d_1, e_7, f_4, f_7, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_5\}, L_4 \cup \{e_5\},$ $L_4 \cup \{b_1, d_7, e_2, f_3, g_4\}$
Matching in L_4 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_9, a_3), (A_{10}, b_4), (A_3, c_6), (A_8, d_1),$ $(A_4, d_6), (A_5, e_7), (A_6, f_4), (A_{12}, f_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	
$L_5 = \{b_5, c_3, d_1, e_5, e_7, f_7, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{f_4\},$ $L_5 \cup \{b_1, c_5, d_7, e_2, f_3\}$
Matching in L_5 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_{13}, b_5), (A_9, c_3), (A_3, c_6), (A_8, d_1),$ $(A_4, d_6), (A_5, e_5), (A_{12}, e_7), (A_6, f_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	
$L_6 = \{c_3, d_1, e_5, e_7, f_4, f_7, g_2\} \cup A_1 \cup A_{14}$	$L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_4\}, L_6 \cup \{b_5\},$ $L_6 \cup \{c_5, d_7, e_2, f_3, g_4\}$
Matching in L_6 : $\{(A_1, a_1), (A_{11}, a_2), (A_9, a_3), (A_3, c_6), (A_8, d_1), (A_4, d_6),$ $(A_5, e_5), (A_{12}, e_7), (A_{10}, f_4), (A_6, f_7), (A_7, g_2), (A_{14}, g_6)\}$	

Tabelle A.3.: Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_2 und Λ_3 mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \{b_5, c_3, d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_1\}, L_1 \cup \{e_2\}$ $L_1 \cup \{c_6, d_1, f_3, g_2\}, L_1 \cup \{b_4, e_7\}$
$L_2 = \{b_4, b_5, c_5, c_6, d_7, e_2, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_2 \cup \{e_7\}, L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{f_3\}$ $L_2 \cup \{b_1, c_3, e_5, g_2\}, L_2 \cup \{d_6, f_4\}$
$L_3 = \{b_4, b_5, c_5, c_6, d_1, e_7, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_3\}$ $L_3 \cup \{b_1, c_3, d_6, g_2\}, L_3 \cup \{e_5, f_4\}$
$L_4 = \{b_4, b_5, c_5, c_6, d_7, e_7, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{d_1\}, L_4 \cup \{f_3\}$ $L_4 \cup \{b_1, c_3, g_2\}, L_4 \cup \{d_6, e_5, f_4\}$
$L_5 = \{b_4, b_5, c_5, c_6, d_7, e_7, f_3, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_5 \cup \{e_2\}, L_5 \cup \{d_1\}, L_5 \cup \{f_7\}$ $L_5 \cup \{b_1, c_3, f_4, g_2\}, L_5 \cup \{d_6, e_5\}$
$L_6 = \{b_1, c_5, d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{b_5\}, L_6 \cup \{e_2\}$ $L_6 \cup \{b_4, d_1, f_3, g_2\}, L_6 \cup \{c_6, e_7\}$
$L_7 = \{b_5, c_5, d_6, d_7, e_2, f_4, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_7 \cup \{c_3\}, L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{e_5\}$ $L_7 \cup \{d_1, e_7, f_3, g_2\}, L_7 \cup \{b_4, c_6\}$
$L_8 = \{b_5, c_5, d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\} \cup A_1$	$L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{e_2\}$ $L_8 \cup \{d_1, f_3, g_2\}, L_8 \cup \{b_4, c_6, e_7\}$
$L_9 = \{b_1, c_5, c_6, d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_4\} \cup A_1$	$L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{b_4\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{f_7, g_6\}, L_9 \cup \{b_5, c_3, d_1, e_2\}$
$L_{10} = \{b_4, c_5, c_6, d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_4\} \cup A_1$	$L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{b_1\}, L_{10} \cup \{f_3\}$ $L_{10} \cup \{b_5, f_7, g_6\}, L_{10} \cup \{c_3, d_1, e_2\}$
$L_{11} = \{b_4, c_5, c_6, d_6, d_7, e_5, e_7, f_3, g_4\} \cup A_1$	$L_{11} \cup \{g_2\}, L_{11} \cup \{b_1\}, L_{11} \cup \{f_4\}$ $L_{11} \cup \{b_5, g_6\}, L_{11} \cup \{c_3, d_1, e_2, f_7\}$
$L_{12} = \{b_4, b_5, c_3, d_6, e_5, e_7, f_4, f_7, g_6\} \cup A_1$	$L_{12} \cup \{g_2\}, L_{12} \cup \{c_6\}, L_{12} \cup \{d_1\}$ $L_{12} \cup \{d_7, g_4\}, L_{12} \cup \{b_1, c_5, e_2, f_3\}$
$L_{13} = \{b_4, b_5, c_6, d_1, e_5, e_7, f_4, f_7, g_6\} \cup A_1$	$L_{13} \cup \{g_2\}, L_{13} \cup \{c_3\}, L_{13} \cup \{d_6\}$ $L_{13} \cup \{c_5, g_4\}, L_{13} \cup \{b_1, d_7, e_2, f_3\}$
$L_{14} = \{b_4, b_5, c_6, d_6, e_5, e_7, f_4, f_7, g_6\} \cup A_1$	$L_{14} \cup \{g_2\}, L_{14} \cup \{c_3\}, L_{14} \cup \{d_1\}$ $L_{14} \cup \{c_5, d_7, g_4\}, L_{14} \cup \{b_1, e_2, f_3\}$
$L_{15} = \{b_4, c_5, c_6, d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_2\} \cup A_1$	$L_{15} \cup \{g_4\}, L_{15} \cup \{b_1\}, L_{15} \cup \{f_3\}$ $L_{15} \cup \{c_3, d_1, e_2, g_6\}, L_{15} \cup \{b_5, f_7\}$
$L_{16} = \{b_4, b_5, c_6, d_6, e_5, e_7, f_4, f_7, g_2\} \cup A_1$	$L_{16} \cup \{g_6\}, L_{16} \cup \{c_3\}, L_{16} \cup \{d_1\}$ $L_{16} \cup \{b_1, e_2, f_3, g_4\}, L_{16} \cup \{c_5, d_7\}$

Tabelle A.4.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_4

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \{a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, c_5, d_7, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{d_1\}, L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_4\}$ $L_1 \cup \{a_1, b_5, c_6, g_2\}, L_1 \cup \{e_7, f_3\}$
$L_2 = \{a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, c_5, d_1, d_6, e_7, f_7, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{e_2\}, L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{f_3\}$ $L_2 \cup \{a_1, b_5, c_6, g_2\}, L_2 \cup \{d_7, f_4\}$
$L_3 = \{a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, d_1, d_7, e_2, e_5, f_4, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{b_4\}, L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{a_1, b_5, e_7\}, L_3 \cup \{c_6, f_3, g_2\}$
$L_4 = \{a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, d_1, d_7, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6\}$	$L_4 \cup \{b_4\}, L_4 \cup \{d_6\}, L_4 \cup \{f_4\}$ $L_4 \cup \{a_1, b_5, e_7, f_3\}, L_4 \cup \{c_6, g_2\}$
$L_5 = \{a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, d_1, e_2, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{d_6\}, L_5 \cup \{d_7\}$ $L_5 \cup \{a_1, b_5\}, L_5 \cup \{c_6, e_7, f_3, g_2\}$
$L_6 = \{a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, d_1, d_7, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6\}$	$L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{f_4\}$ $L_6 \cup \{a_1, e_7, f_3\}, L_6 \cup \{b_5, c_6, g_2\}$
$L_7 = \{a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, d_1, d_6, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6\}$	$L_7 \cup \{c_5\}, L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{f_3\}$ $L_7 \cup \{a_1, c_6, g_2\}, L_7 \cup \{b_5, d_7, f_4\}$
$L_8 = \{a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_6, d_7, e_2, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{e_5\}$ $L_8 \cup \{c_6, e_7, f_3, g_2\}, L_8 \cup \{b_4, d_1\}$
$L_9 = \{a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_1, d_7, e_5, e_7, f_4, g_4, g_6\}$	$L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{a_1, c_5, e_2\}, L_9 \cup \{b_4, d_6, f_7\}$
$L_{10} = \{a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_{10} \cup \{a_1\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{e_2\}$ $L_{10} \cup \{c_6, f_3, g_2\}, L_{10} \cup \{b_4, d_1, e_7\}$

Tabelle A.5.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_5

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \{a_2, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, d_1, e_2, e_5, f_3, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{e_7\}, L_1 \cup \{d_7\}, L_1 \cup \{f_7\}$ $L_1 \cup \{a_1, b_5, c_3, d_6, f_4, g_2\}$
$L_2 = \{a_2, a_3, b_4, b_5, d_1, d_6, e_2, e_5, f_3, f_7, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{c_5\}, L_2 \cup \{c_6\}$ $L_2 \cup \{a_1, b_1, d_7, e_7, f_4, g_2\}$
$L_3 = \{a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, d_6, e_5, e_7, f_3, f_7, g_2, g_4\}$	$L_3 \cup \{a_1\}, L_3 \cup \{b_1\}, L_3 \cup \{d_1\}$ $L_3 \cup \{b_5, c_3, d_7, e_2, f_4, g_6\}$
$L_4 = \{a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, c_5, d_1, d_6, f_4, f_7, g_2, g_6\}$	$L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{e_5\}$ $L_4 \cup \{a_1, b_1, c_6, d_7, f_3, g_4\}$
$L_5 = \{a_2, a_3, b_1, b_5, d_1, d_7, e_5, e_7, f_3, f_4, g_2, g_6\}$	$L_5 \cup \{c_3\}, L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{c_6\}$ $L_5 \cup \{a_1, b_4, d_6, e_2, f_7, g_4\}$
$L_6 = \{a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, c_6, d_6, d_7, e_2, e_5, f_4, f_7\}$	$L_6 \cup \{g_4\}, L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{g_2\}$ $L_6 \cup \{a_1, b_4, c_5, d_1, e_7, f_3\}$
$L_7 = \{a_1, a_3, b_4, b_5, c_3, c_6, d_1, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6\}$	$L_7 \cup \{a_2\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{e_2\}$ $L_7 \cup \{b_1, c_5, d_6, d_7, f_3, f_4\}$
$L_8 = \{a_1, a_3, b_4, b_5, c_3, c_5, d_1, d_6, e_2, e_7, g_2, g_4\}$	$L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{f_3\}$ $L_8 \cup \{a_2, b_1, c_6, d_7, e_5, g_6\}$
$L_9 = \{a_1, a_3, b_1, b_5, c_5, c_6, d_6, e_2, f_3, f_4, g_2, g_4\}$	$L_9 \cup \{e_7\}, L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{f_7\}$ $L_9 \cup \{a_2, b_4, c_3, d_1, e_5, g_6\}$
$L_{10} = \{a_1, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, d_6, e_5, e_7, f_3, f_7, g_4\}$	$L_{10} \cup \{a_2\}, L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{e_2\}$ $L_{10} \cup \{b_5, c_3, d_1, d_7, f_4, g_6\}$

Tabelle A.6.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_6 mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = A_1 \cup \{c_3, c_5, d_1, d_6, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{b_1\}, L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{b_5\}$ $L_1 \cup \{c_6, d_7, e_2, e_7, f_3, g_2\}$
$L_2 = A_1 \cup \{b_4, b_5, c_3, d_1, d_6, e_2, e_7, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{f_4\}, L_2 \cup \{f_7\}, L_2 \cup \{f_3\}$ $L_2 \cup \{b_1, c_5, c_6, d_7, e_5, g_2\}$
$L_3 = A_1 \cup \{b_4, c_5, c_6, d_1, d_7, e_5, e_7, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{f_4\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{f_3\}$ $L_3 \cup \{b_1, b_5, c_3, d_6, e_2, g_2\}$
$L_4 = A_1 \cup \{c_5, d_6, d_7, e_2, e_5, f_3, f_7, g_4, g_6\}$	$L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{b_4\}, L_4 \cup \{b_5\}$ $L_4 \cup \{c_3, c_6, d_1, e_7, f_4, g_2\}$
$L_5 = A_1 \cup \{b_4, b_5, d_6, e_2, e_7, f_3, f_7, g_4, g_6\}$	$L_5 \cup \{c_3\}, L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{c_6\}$ $L_5 \cup \{b_1, d_1, d_7, e_5, f_4, g_2\}$
$L_6 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_3, c_6, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4\}$	$L_6 \cup \{d_1\}, L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{d_7\}$ $L_6 \cup \{b_4, c_5, e_2, f_3, f_4, g_6\}$
$L_7 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_5, c_6, d_7, f_4, f_7, g_2, g_4\}$	$L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{e_7\}, L_7 \cup \{e_5\}$ $L_7 \cup \{b_4, c_3, d_1, d_6, f_3, g_6\}$
$L_8 = A_1 \cup \{c_5, d_1, d_6, e_5, e_7, f_4, f_7, g_2, g_4\}$	$L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{b_4\}, L_8 \cup \{b_5\}$ $L_8 \cup \{c_3, c_6, d_7, e_2, f_3, g_6\}$
$L_9 = A_1 \cup \{b_4, b_5, c_3, d_1, d_7, e_2, e_5, f_7, g_4\}$	$L_9 \cup \{g_6\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{d_6\}$ $L_9 \cup \{b_1, c_5, e_7, f_3, f_4, g_2\}$
$L_{10} = A_1 \cup \{b_1, b_4, c_3, c_5, d_6, d_7, f_4, g_2, g_6\}$	$L_{10} \cup \{e_2\}, L_{10} \cup \{e_7\}, L_{10} \cup \{e_5\}$ $L_{10} \cup \{b_5, c_6, d_1, f_3, f_7, g_4\}$

Tabelle A.7.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_7 mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_3, d_6, d_7, e_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{f_3\}$ $L_1 \cup \{b_4, c_5, c_6, d_1, e_2, e_5\}$
$L_2 = A_1 \cup \{b_4, c_5, c_6, d_7, f_3, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{e_2\}, L_2 \cup \{e_7\}, L_2 \cup \{e_5\}$ $L_2 \cup \{b_1, b_5, c_3, d_1, d_6, f_4\}$
$L_3 = A_1 \cup \{c_5, d_1, d_7, e_5, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{b_1\}, L_3 \cup \{b_4\}, L_3 \cup \{b_5\}$ $L_3 \cup \{c_3, c_6, d_6, e_2, f_4, f_7\}$
$L_4 = A_1 \cup \{b_1, b_5, d_6, d_7, e_5, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{c_6\}$ $L_4 \cup \{b_4, d_1, e_2, e_7, f_4, f_7\}$
$L_5 = A_1 \cup \{b_4, c_3, c_5, c_6, d_1, d_7, e_7, g_4, g_6\}$	$L_5 \cup \{f_4\}, L_5 \cup \{f_7\}, L_5 \cup \{f_3\}$ $L_5 \cup \{b_1, b_5, d_6, e_2, e_5, g_2\}$
$L_6 = A_1 \cup \{b_1, b_4, c_3, c_5, d_6, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_6 \cup \{e_2\}, L_6 \cup \{e_7\}, L_6 \cup \{e_5\}$ $L_6 \cup \{b_5, c_6, d_1, d_7, f_3, g_2\}$
$L_7 = A_1 \cup \{b_4, c_3, c_5, d_1, d_6, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{e_7\}, L_7 \cup \{e_5\}$ $L_7 \cup \{b_1, b_5, c_6, d_7, f_3, g_2\}$
$L_8 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_3, c_6, d_6, e_2, e_7, g_4, g_6\}$	$L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{f_3\}$ $L_8 \cup \{b_4, c_5, d_1, d_7, e_5, g_2\}$
$L_9 = A_1 \cup \{b_4, b_5, c_3, c_6, d_6, e_2, e_7, g_4, g_6\}$	$L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{b_1, c_5, d_1, d_7, e_5, g_2\}$
$L_{10} = A_1 \cup \{b_4, c_3, c_6, d_1, e_7, f_3, f_7, g_4, g_6\}$	$L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{e_5\}$ $L_{10} \cup \{b_1, d_6, d_7, e_2, f_4, g_2\}$

Tabelle A.8.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_8 mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = A_1 \cup \{b_5, c_3, c_5, d_1, e_2, f_4, g_2, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{e_7\}, L_1 \cup \{d_7\}, L_1 \cup \{f_7\}$ $L_1 \cup \{b_1, b_4, c_6, d_6, e_5, f_3\}$
$L_2 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_3, e_2, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{d_7\}$ $L_2 \cup \{b_4, c_5, c_6, e_5, e_7, f_3\}$
$L_3 = A_1 \cup \{b_4, b_5, c_3, d_6, d_7, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{e_5\}$ $L_3 \cup \{b_1, c_5, c_6, d_1, f_4, f_7\}$
$L_4 = A_1 \cup \{b_1, c_5, c_6, d_1, e_5, f_4, g_2, g_4, g_6\}$	$L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{f_7\}$ $L_4 \cup \{b_4, b_5, c_3, d_6, e_2, f_3\}$
$L_5 = A_1 \cup \{b_5, c_5, c_6, d_1, e_5, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{f_7\}$ $L_5 \cup \{b_1, b_4, c_3, d_6, e_2, f_4\}$
$L_6 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_5, d_6, e_5, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_6 \cup \{e_7\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{f_7\}$ $L_6 \cup \{b_4, c_3, c_6, d_1, e_2, f_4\}$
$L_7 = A_1 \cup \{c_5, d_1, e_2, e_5, f_3, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{b_4\}, L_7 \cup \{b_5\}$ $L_7 \cup \{c_3, c_6, d_6, d_7, e_7, f_4\}$
$L_8 = A_1 \cup \{b_1, c_6, d_7, e_7, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_5\}, L_8 \cup \{e_5\}$ $L_8 \cup \{b_4, c_3, d_1, d_6, e_2, f_3\}$
$L_9 = A_1 \cup \{c_6, d_1, d_7, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_9 \cup \{b_1\}, L_9 \cup \{b_4\}, L_9 \cup \{b_5\}$ $L_9 \cup \{c_3, c_5, d_6, e_2, f_3, f_4\}$
$L_{10} = A_1 \cup \{b_4, b_5, d_1, d_7, e_2, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_{10} \cup \{c_3\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{c_6\}$ $L_{10} \cup \{b_1, d_6, e_5, e_7, f_3, f_4\}$

Tabelle A.9.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_9 mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = A_1 \cup \{b_1, c_3, d_1, d_7, e_2, e_5, g_2, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{f_3\}$ $L_1 \cup \{b_4, b_5, c_5, c_6, d_6, e_7\}$
$L_2 = A_1 \cup \{b_5, c_3, e_2, e_5, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{d_7\}$ $L_2 \cup \{b_1, b_4, c_5, c_6, f_3, f_7\}$
$L_3 = A_1 \cup \{b_1, b_5, c_5, d_1, e_2, f_3, g_2, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{b_4, c_3, c_6, d_6, e_5, f_4\}$
$L_4 = A_1 \cup \{b_1, c_6, e_2, e_5, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6\}$	$L_4 \cup \{d_1\}, L_4 \cup \{d_6\}, L_4 \cup \{d_7\}$ $L_4 \cup \{b_4, b_5, c_3, c_5, f_3, f_7\}$
$L_5 = A_1 \cup \{b_4, c_6, d_6, e_2, f_3, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_5\}, L_5 \cup \{e_5\}$ $L_5 \cup \{b_1, c_3, d_1, d_7, e_7, f_4\}$
$L_6 = A_1 \cup \{b_4, b_5, d_7, e_2, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{c_5\}, L_6 \cup \{c_6\}$ $L_6 \cup \{b_1, d_1, d_6, e_5, e_7, f_3\}$
$L_7 = A_1 \cup \{c_3, c_5, c_6, d_6, d_7, e_5, f_3, g_4, g_6\}$	$L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{b_4\}, L_7 \cup \{b_5\}$ $L_7 \cup \{d_1, e_2, e_7, f_4, f_7, g_2\}$
$L_8 = A_1 \cup \{c_5, c_6, d_1, d_6, d_7, e_7, f_7, g_4, g_6\}$	$L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{b_4\}, L_8 \cup \{b_5\}$ $L_8 \cup \{c_3, e_2, e_5, f_3, f_4, g_2\}$
$L_9 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, d_1, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6\}$	$L_9 \cup \{c_3\}, L_9 \cup \{c_5\}, L_9 \cup \{c_6\}$ $L_9 \cup \{d_6, d_7, e_2, e_7, f_3, g_2\}$
$L_{10} = A_1 \cup \{b_1, c_3, c_6, d_1, d_7, e_2, f_3, g_2, g_4\}$	$L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{e_5\}$ $L_{10} \cup \{b_4, d_6, e_7, f_4, f_7, g_6\}$

Tabelle A.10.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{10} mit $A_1 \subset L_+$

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = A_1 \cup \{b_1, c_5, d_1, e_2, e_5, e_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{f_3\}$ $L_1 \cup \{b_4, b_5, c_3, c_6, d_6, d_7\}$
$L_2 = A_1 \cup \{b_4, c_6, d_6, e_2, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6\}$	$L_2 \cup \{c_5\}, L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{e_5\}$ $L_2 \cup \{b_1, c_3, d_1, d_7, e_7, f_3\}$
$L_3 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, c_5, d_1, e_5, f_4, g_4, g_6\}$	$L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{c_3, c_6, d_6, e_2, f_3, g_2\}$
$L_4 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, c_3, d_1, d_6, d_7, f_4, g_4\}$	$L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{e_5\}$ $L_4 \cup \{c_5, c_6, f_3, f_7, g_2, g_6\}$
$L_5 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, c_3, d_1, e_2, f_3, g_2, g_6\}$	$L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{f_7\}$ $L_5 \cup \{c_5, c_6, d_6, e_5, f_4, g_4\}$
$L_6 = A_1 \cup \{c_3, c_5, c_6, d_6, e_5, f_3, f_4, f_7, g_6\}$	$L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_4\}, L_6 \cup \{b_5\}$ $L_6 \cup \{d_1, d_7, e_2, e_7, g_2, g_4\}$
$L_7 = A_1 \cup \{b_1, c_3, c_5, c_6, d_1, d_7, e_2, f_3, g_2\}$	$L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{b_4\}, L_7 \cup \{f_4\}$ $L_7 \cup \{b_5, d_6, e_5, e_7, f_7, g_6\}$
$L_8 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, c_3, d_1, e_2, e_7, f_3, g_2\}$	$L_8 \cup \{g_6\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{d_6\}$ $L_8 \cup \{c_5, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4\}$
$L_9 = A_1 \cup \{b_1, b_4, b_5, c_5, d_1, d_6, d_7, e_2, g_2\}$	$L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{c_3, c_6, e_5, e_7, g_4, g_6\}$
$L_{10} = A_1 \cup \{b_5, c_3, c_5, c_6, d_6, e_5, f_3, f_4, f_7\}$	$L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{g_2\}$ $L_{10} \cup \{b_1, b_4, d_1, d_7, e_2, e_7\}$

Tabelle A.11.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{11}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, c_5, \\ d_1, d_6, e_5, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{e_7\}, L_1 \cup \{d_7\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_3\}$ $L_1 \cup \{a_1, b_5, c_6, e_2, g_6\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_5, c_6, d_6, \\ d_7, e_2, e_7, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{a_1\}, L_2 \cup \{b_4\}, L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{d_1\}$ $L_2 \cup \{c_3, e_5, f_7, g_2, g_6\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, c_5, \\ d_1, d_7, e_2, e_7, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{g_4\}, L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{c_6\}, L_3 \cup \{d_6\}$ $L_3 \cup \{a_1, b_5, e_5, f_3, f_7\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{d_1\}, L_4 \cup \{d_6\}, L_4 \cup \{f_7\}$ $L_4 \cup \{a_2, b_5, c_3, f_4, g_2\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_4, c_6, d_6, \\ d_7, e_5, f_3, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_5\}, L_5 \cup \{e_2\}, L_5 \cup \{e_7\}$ $L_5 \cup \{a_2, c_3, d_1, f_4, g_6\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_4, b_5, c_3, d_1, \\ d_6, e_2, e_5, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{e_7\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{f_4\}, L_6 \cup \{f_3\}$ $L_6 \cup \{a_2, b_1, c_5, c_6, g_4\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, \\ d_6, e_5, e_7, f_4, f_7, g_2 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{a_2\}, L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{e_2\}$ $L_7 \cup \{b_5, c_3, d_1, d_7, f_3\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_3, b_4, b_5, c_5, c_6, d_1, \\ d_6, e_2, e_7, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{a_2\}, L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{f_3\}$ $L_8 \cup \{b_1, d_7, e_5, f_4, g_6\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, b_4, b_5, c_3, c_5, \\ d_1, d_6, e_2, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{e_7\}, L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{a_3, b_1, c_6, e_5, g_2\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, b_1, b_5, c_3, c_6, \\ d_6, e_7, f_3, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{e_2\}, L_{10} \cup \{e_5\}, L_{10} \cup \{d_7\}, L_{10} \cup \{f_7\}$ $L_{10} \cup \{a_3, b_4, c_5, d_1, g_6\}$

Tabelle A.12.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{12}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ c_6, d_1, e_2, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{e_7\}, L_1 \cup \{d_7\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_3\}$ $L_1 \cup \{b_1, c_3, d_6, e_5, g_2\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, \\ d_6, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{c_6\}, L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{d_7\}$ $L_2 \cup \{b_4, b_5, e_2, f_3, f_4\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, \\ d_1, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{g_6\}, L_3 \cup \{c_3\}, L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{d_6\}$ $L_3 \cup \{b_1, d_7, e_2, f_3, f_4\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_5, \\ c_6, d_6, d_7, e_2, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{b_4\}, L_4 \cup \{f_4\}$ $L_4 \cup \{c_3, d_1, e_5, e_7, f_3\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_1, \\ d_6, e_2, e_7, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{e_5\}$ $L_5 \cup \{c_3, d_7, f_7, g_2, g_6\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, c_6, \\ d_1, d_7, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_4\}, L_6 \cup \{b_4\}, L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{f_3\}$ $L_6 \cup \{b_1, c_3, d_6, e_2, e_5\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ d_1, e_2, e_7, f_4, f_7, g_6 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{c_6\}, L_7 \cup \{d_6\}$ $L_7 \cup \{b_1, b_4, d_7, e_5, f_3\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_5, d_6, \\ d_7, e_2, e_7, f_3, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{b_5\}, L_8 \cup \{e_5\}$ $L_8 \cup \{b_4, d_1, f_7, g_2, g_4\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, d_6, e_5, e_7, f_3, g_2 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{g_4\}, L_9 \cup \{b_1\}, L_9 \cup \{b_5\}, L_9 \cup \{f_4\}$ $L_9 \cup \{c_3, d_7, e_2, f_7, g_6\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_3, d_6, d_7, \\ e_5, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{a_1\}, L_{10} \cup \{b_4\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{d_1\}$ $L_{10} \cup \{c_5, c_6, e_2, f_3, f_7\}$

Tabelle A.13.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{13}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_1\}, L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{e_5\}$ $L_1 \cup \{c_3, d_6, e_2, f_4, f_7\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_6, \\ d_6, d_7, e_5, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{c_5\}, L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{e_2\}, L_2 \cup \{e_7\}$ $L_2 \cup \{b_4, d_1, f_3, f_4, g_2\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, \\ d_1, d_6, e_7, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{e_5\}, L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{b_4, c_5, c_6, f_3, g_2\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_5, c_6, \\ d_1, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{f_4\}, L_4 \cup \{f_3\}$ $L_4 \cup \{b_4, b_5, c_3, d_6, g_2\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_5, d_1, \\ d_6, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{f_4\}, L_5 \cup \{f_3\}$ $L_5 \cup \{b_4, b_5, c_3, c_6, g_2\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_6, \\ d_1, e_7, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{e_2\}, L_6 \cup \{e_5\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{f_7\}$ $L_6 \cup \{b_4, c_3, c_5, d_6, g_2\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, \\ d_1, d_6, e_5, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{e_7\}, L_7 \cup \{d_7\}, L_7 \cup \{f_4\}, L_7 \cup \{f_3\}$ $L_7 \cup \{b_4, b_5, c_6, e_2, g_6\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_6, \\ d_7, e_5, f_4, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_5\}, L_8 \cup \{e_2\}, L_8 \cup \{e_7\}$ $L_8 \cup \{b_1, d_1, d_6, f_3, g_6\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, d_1, \\ d_6, e_2, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{c_5\}, L_9 \cup \{b_1\}, L_9 \cup \{b_4\}, L_9 \cup \{e_5\}$ $L_9 \cup \{c_6, d_7, f_3, f_7, g_6\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_5, d_6, \\ e_2, e_5, f_4, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{c_6\}, L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{d_7\}$ $L_{10} \cup \{b_4, b_5, c_3, e_7, f_3\}$

Tabelle A.14.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{14}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_6, \\ e_5, f_3, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_5\}, L_1 \cup \{e_2\}, L_1 \cup \{e_7\}$ $L_1 \cup \{b_1, c_6, d_1, d_7, f_4\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_5, \\ d_7, e_5, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{e_7\}, L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_7\}$ $L_2 \cup \{b_4, c_3, c_6, e_2, f_4\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_6, \\ d_7, e_2, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{d_1\}, L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{b_4, c_3, c_5, e_5, f_4\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_7, \\ e_7, f_3, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{b_4\}, L_4 \cup \{e_5\}$ $L_4 \cup \{c_3, d_1, d_6, e_2, f_4\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, \\ c_3, d_7, e_2, f_4, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_1\}, L_5 \cup \{d_6\}, L_5 \cup \{f_7\}$ $L_5 \cup \{c_5, c_6, e_5, f_3, g_2\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, \\ c_5, d_7, e_5, f_3, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{e_7\}, L_6 \cup \{d_1\}, L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{f_7\}$ $L_6 \cup \{c_3, c_6, e_2, f_4, g_2\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_6, d_1, \\ d_6, d_7, e_5, f_3, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{c_5\}, L_7 \cup \{b_5\}, L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{e_7\}$ $L_7 \cup \{b_1, c_3, f_4, f_7, g_2\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_6, \\ d_1, d_7, e_5, f_3, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_5\}, L_8 \cup \{e_2\}, L_8 \cup \{e_7\}$ $L_8 \cup \{b_4, d_6, f_4, f_7, g_6\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ c_6, d_7, e_2, f_4, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{e_7\}, L_9 \cup \{d_1\}, L_9 \cup \{d_6\}, L_9 \cup \{f_7\}$ $L_9 \cup \{b_1, c_3, e_5, f_3, g_6\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, c_6, d_1, \\ d_6, e_2, e_5, f_7, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{e_7\}, L_{10} \cup \{d_7\}, L_{10} \cup \{f_4\}, L_{10} \cup \{f_3\}$ $L_{10} \cup \{b_4, b_5, c_3, c_5, g_6\}$

Tabelle A.15.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{15}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, d_7, \\ e_2, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_5\}, L_1 \cup \{e_5\}$ $L_1 \cup \{b_1, d_1, d_6, f_3, f_7\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, d_7, \\ e_7, f_3, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{c_6\}, L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{e_5\}$ $L_2 \cup \{b_1, d_1, d_6, e_2, g_2\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, \\ c_6, d_7, e_2, f_3, f_4, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{d_1\}, L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_7\}$ $L_3 \cup \{b_1, b_5, e_5, g_2, g_6\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_6, \\ d_7, e_5, f_3, f_4, f_7, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_5\}, L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{e_7\}$ $L_4 \cup \{b_1, c_6, d_1, g_2, g_6\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, d_7, \\ e_2, f_3, f_4, f_7, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{e_5\}$ $L_5 \cup \{c_6, d_1, d_6, e_7, g_4\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_6, \\ d_6, e_5, f_3, f_4, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{c_5\}, L_6 \cup \{b_5\}, L_6 \cup \{e_2\}, L_6 \cup \{e_7\}$ $L_6 \cup \{b_1, d_1, d_7, g_2, g_4\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ d_7, e_2, e_5, e_7, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{c_6\}, L_7 \cup \{d_6\}$ $L_7 \cup \{b_1, c_3, d_1, f_3, f_4\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_6, \\ d_1, e_2, e_5, e_7, f_4, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{g_4\}, L_8 \cup \{b_4\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{f_3\}$ $L_8 \cup \{b_5, c_5, d_6, d_7, g_6\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, c_5, d_1, \\ d_6, e_2, e_5, e_7, f_4, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{g_4\}, L_9 \cup \{b_4\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{f_3\}$ $L_9 \cup \{b_5, c_3, c_6, d_7, g_6\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_1, c_5, d_7, e_2, \\ e_5, e_7, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{a_1\}, L_{10} \cup \{b_4\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{d_1\}$ $L_{10} \cup \{c_3, c_6, d_6, f_3, f_4\}$

Tabelle A.16.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{16}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, c_6, \\ d_6, d_7, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{a_1\}, L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{e_5\},$ $L_1 \cup \{d_1\}, L_1 \cup \{e_2, f_3, f_7, g_6\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, d_1, \\ d_7, e_5, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{g_4\}, L_2 \cup \{b_1\}, L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{f_7\},$ $L_2 \cup \{f_3\}, L_2 \cup \{a_1, c_6, d_6, e_2\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_5, c_3, c_5, d_1, \\ d_6, e_2, e_7, f_4, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{a_2\}, L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{e_5\}, L_3 \cup \{d_7\},$ $L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{b_1, b_4, c_6, f_3\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_1, b_5, c_6, d_6, \\ e_2, e_5, f_3, f_7, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{d_1\},$ $L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{a_2, b_4, e_7, f_4\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_4, c_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_2, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_5\}, L_5 \cup \{f_7\},$ $L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{a_2, c_3, d_6, e_5\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_3, b_1, b_5, c_3, d_1, d_6, \\ e_2, e_7, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{a_2\}, L_6 \cup \{a_1\}, L_6 \cup \{c_5\}, L_6 \cup \{c_6\},$ $L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{b_4, d_7, e_5, g_2\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_3, b_1, b_4, c_5, d_6, d_7, \\ e_2, e_5, f_3, f_7, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{a_1\}, L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{b_5\}, L_7 \cup \{d_1\},$ $L_7 \cup \{f_4\}, L_7 \cup \{a_2, c_3, c_6, e_7\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, b_4, b_5, c_6, d_1, \\ e_2, e_5, f_3, f_7, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{a_3\}, L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{e_7\}, L_8 \cup \{d_7\},$ $L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{b_1, c_5, d_6, g_2\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, b_1, b_4, c_3, c_5, \\ d_6, e_7, f_4, f_7, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{a_3\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{b_5\}, L_9 \cup \{e_5\},$ $L_9 \cup \{f_3\}, L_9 \cup \{d_1, d_7, e_2, g_4\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, b_4, b_5, c_3, c_6, \\ d_1, d_6, e_7, f_3, f_7, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{b_1\}, L_{10} \cup \{e_5\},$ $L_{10} \cup \{f_4\}, L_{10} \cup \{a_3, d_7, e_2, g_6\}$

Tabelle A.17.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{17}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, d_1, \\ d_6, e_2, e_7, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_1\},$ $L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{e_5\}, L_1 \cup \{d_7, f_3, f_7, g_2\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, e_7, f_3, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{b_5\},$ $L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{b_1, d_7, e_2, f_4\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_6, \\ d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{g_6\}, L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{b_4\},$ $L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{f_3\}, L_3 \cup \{b_1, c_5, d_1, e_2\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_6, \\ d_6, e_2, e_7, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_5\},$ $L_4 \cup \{d_1\}, L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{b_4, e_5, f_7, g_2\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, d_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_5\},$ $L_5 \cup \{f_7\}, L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{c_3, c_6, d_1, e_2\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_5, \\ c_6, d_7, e_7, f_3, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{e_2\}, L_6 \cup \{e_5\}, L_6 \cup \{d_1\},$ $L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{b_4, c_3, g_2, g_4\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_6, \\ d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_2 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{b_5\},$ $L_7 \cup \{f_7\}, L_7 \cup \{f_3\}, L_7 \cup \{c_5, d_1, e_2, g_6\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_5, d_1, \\ d_7, e_5, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{b_5\},$ $L_8 \cup \{e_2\}, L_8 \cup \{e_7\}, L_8 \cup \{a_1, d_6, f_3, f_4\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, d_1, \\ d_7, e_2, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{b_4\},$ $L_9 \cup \{d_6\}, L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{a_1, b_5, e_5, f_3\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_7, \\ e_2, e_7, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{a_1\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{b_4\},$ $L_{10} \cup \{e_5\}, L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{c_6, d_6, f_7, g_2\}$

Tabelle A.18.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{18}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, d_1, \\ d_7, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_1\},$ $L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{e_5\}, L_1 \cup \{d_6, e_2, f_4, f_7\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ d_1, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{c_6\}, L_2 \cup \{b_4\},$ $L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_4\}, L_2 \cup \{b_1, d_7, e_2, f_3\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, d_1, \\ d_6, e_5, f_3, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{b_1\}, L_3 \cup \{b_4\},$ $L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{c_6, d_7, f_4, g_2\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, d_1, \\ d_7, e_5, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_6\}, L_4 \cup \{b_5\},$ $L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{b_1, d_6, f_7, g_2\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ d_6, d_7, e_5, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{g_6\}, L_5 \cup \{c_6\}, L_5 \cup \{e_7\},$ $L_5 \cup \{d_1\}, L_5 \cup \{f_7\}, L_5 \cup \{b_1, b_4, e_2, f_3\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, e_2, e_7, f_3, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{b_5\},$ $L_6 \cup \{e_5\}, L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{b_1, d_7, f_4, f_7\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, \\ d_6, e_7, f_4, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{c_3\}, L_7 \cup \{c_5\},$ $L_7 \cup \{d_1\}, L_7 \cup \{d_7\}, L_7 \cup \{b_1, e_2, e_5, f_3\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, \\ d_6, d_7, e_2, f_3, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{g_6\}, L_8 \cup \{g_2\}, L_8 \cup \{b_1\},$ $L_8 \cup \{b_5\}, L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{c_6, d_1, e_5, e_7\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{g_6\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{e_7\},$ $L_9 \cup \{d_1\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{b_4, b_5, c_5, g_2\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_7, e_2, e_5, e_7, f_3, g_4 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{b_1\},$ $L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{f_4\}, L_{10} \cup \{c_3, d_1, d_6, f_7\}$

Tabelle A.19.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{19}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, d_6, \\ d_7, e_5, f_4, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_5\},$ $L_1 \cup \{e_2\}, L_1 \cup \{e_7\}, L_1 \cup \{b_1, d_1, f_3, f_7\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ c_6, d_7, e_7, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{e_2\}, L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_1\},$ $L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_7\}, L_2 \cup \{b_1, b_4, f_4, g_2\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_6, \\ e_5, e_7, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{b_5\}, L_3 \cup \{e_2\},$ $L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{b_1, c_6, d_1, g_2\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_6, \\ e_5, f_3, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{b_4\},$ $L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{e_7\}, L_4 \cup \{c_3, d_1, d_7, g_2\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, d_1, \\ d_6, d_7, e_2, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{c_3\}, L_5 \cup \{c_6\}, L_5 \cup \{b_1\},$ $L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{e_5\}, L_5 \cup \{e_7, f_3, f_4, g_6\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ c_6, d_1, d_7, e_5, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{b_4\},$ $L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{b_1, d_6, e_2, e_7\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{c_6\}, L_7 \cup \{e_7\},$ $L_7 \cup \{d_1\}, L_7 \cup \{f_7\}, L_7 \cup \{b_1, b_5, c_5, g_2\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ d_6, d_7, e_2, e_5, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{g_6\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{e_7\},$ $L_8 \cup \{d_1\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{b_1, c_3, f_3, g_2\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ d_7, e_2, f_3, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{g_4\}, L_9 \cup \{c_5\}, L_9 \cup \{b_1\},$ $L_9 \cup \{e_5\}, L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{c_6, d_1, d_6, e_7\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, \\ c_6, d_1, e_2, f_4, f_7, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{b_4\}, L_{10} \cup \{e_7\},$ $L_{10} \cup \{d_7\}, L_{10} \cup \{f_3\}, L_{10} \cup \{b_5, d_6, e_5, g_2\}$

Tabelle A.20.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{20}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, d_1, \\ e_2, e_5, e_7, f_3, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_4\},$ $L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{b_5, c_5, d_7, f_7\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_7, e_7, f_3, f_4, f_7, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{b_5\},$ $L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{b_1, d_1, e_2, g_2\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ c_6, d_6, e_5, f_4, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{g_4\}, L_3 \cup \{b_4\}, L_3 \cup \{e_7\},$ $L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_3\}, L_3 \cup \{b_1, d_1, e_2, g_2\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, \\ d_1, d_6, d_7, e_7, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{g_4\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_1\},$ $L_4 \cup \{e_5\}, L_4 \cup \{f_4\}, L_4 \cup \{c_3, e_2, f_3, g_2\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_1, c_3, d_1, e_2, \\ e_5, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{a_1\}, L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{b_5\},$ $L_5 \cup \{d_6\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{c_5, c_6, f_4, f_7\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_4, c_6, d_6, e_2, \\ e_5, e_7, f_4, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{a_2\}, L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{b_1\},$ $L_6 \cup \{d_1\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{b_5, c_5, d_7, f_7\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_3, b_1, b_4, b_5, c_3, d_7, \\ e_7, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{a_2\}, L_7 \cup \{a_1\}, L_7 \cup \{c_5\},$ $L_7 \cup \{c_6\}, L_7 \cup \{f_3\}, L_7 \cup \{d_1, d_6, e_2, e_5\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_3, b_4, c_3, d_1, d_6, d_7, \\ e_2, e_5, e_7, f_4, f_7, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{a_2\}, L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{c_5\},$ $L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{f_3\}, L_8 \cup \{b_1, b_5, g_2, g_6\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_3, b_1, b_4, b_5, c_3, c_5, \\ c_6, d_6, e_2, e_7, f_3, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{a_2\}, L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{e_5\},$ $L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{a_1, d_1, f_4, g_4\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, b_4, c_3, c_5, c_6, \\ d_7, e_7, f_3, f_4, f_7, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{a_3\}, L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{b_1\},$ $L_{10} \cup \{e_2\}, L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{b_5, d_6, e_5, g_6\}$

Tabelle A.21.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{21}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_5, c_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_2, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{a_1\}, L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{e_7\},$ $L_1 \cup \{e_5\}, L_1 \cup \{f_3\}, L_1 \cup \{b_1, b_4, d_6\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_3, d_1, d_6, \\ e_5, e_7, f_4, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{a_1\}, L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{c_6\}, L_2 \cup \{b_4\},$ $L_2 \cup \{b_5\}, L_2 \cup \{d_7\}, L_2 \cup \{c_5, e_2, f_3\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{a_1\}, L_3 \cup \{b_4\}, L_3 \cup \{b_5\}, L_3 \cup \{e_7\},$ $L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{c_3, g_2, g_6\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, c_5, \\ d_1, d_6, e_2, e_7, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{a_1\}, L_4 \cup \{g_4\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{c_6\},$ $L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{e_5, f_3, f_7\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, \\ d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_2 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{a_1\}, L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{g_6\}, L_5 \cup \{c_3\},$ $L_5 \cup \{e_2\}, L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{b_5, d_1, e_7\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, c_3, c_5, d_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{a_2\}, L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{b_4\}, L_6 \cup \{e_2\},$ $L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{b_5, c_6, d_1\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_5, c_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_2, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{c_3\}, L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{b_4\},$ $L_7 \cup \{e_5\}, L_7 \cup \{d_6\}, L_7 \cup \{a_2, f_3, f_7\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_4, b_5, c_3, c_5, \\ d_1, e_2, f_4, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{a_2\}, L_8 \cup \{g_4\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{e_7\},$ $L_8 \cup \{e_5\}, L_8 \cup \{d_6\}, L_8 \cup \{b_1, d_7, f_3\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_4, b_5, c_5, d_1, \\ e_2, e_7, f_4, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{a_2\}, L_9 \cup \{c_3\}, L_9 \cup \{b_1\}, L_9 \cup \{d_6\},$ $L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{f_3\}, L_9 \cup \{c_6, e_5, g_4\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_4, c_5, c_6, \\ d_6, e_2, e_7, f_4, f_7, g_2 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{c_3\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{e_5\},$ $L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{d_7\}, L_{10} \cup \{a_2, f_3, g_4\}$

Tabelle A.22.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{22}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_5, e_7, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_4\},$ $L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{b_1, e_2, f_7\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_6, \\ d_6, e_2, e_5, f_4, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{b_4\}, L_2 \cup \{e_7\},$ $L_2 \cup \{d_7\}, L_2 \cup \{f_3\}, L_2 \cup \{b_1, c_5, d_1\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, c_5, \\ d_6, e_5, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{c_3\}, L_3 \cup \{c_6\}, L_3 \cup \{b_5\}, L_3 \cup \{e_2\},$ $L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{d_1, f_3, g_4\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, d_7, e_2, f_4, f_7, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{g_4\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{b_5\},$ $L_4 \cup \{e_5\}, L_4 \cup \{d_6\}, L_4 \cup \{b_1, e_7, f_3\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_1, \\ e_7, f_4, f_7, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{a_1\}, L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_4\}, L_5 \cup \{e_5\},$ $L_5 \cup \{d_6\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{c_6, e_2, f_3\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, d_1, \\ d_7, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{c_6\}, L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_5\},$ $L_6 \cup \{d_6\}, L_6 \cup \{f_4\}, L_6 \cup \{a_1, e_2, f_3\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, d_1, \\ d_6, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{a_1\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{c_5\}, L_7 \cup \{c_6\},$ $L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{f_3\}, L_7 \cup \{b_1, d_7, e_7\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, d_1, \\ d_6, e_2, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{g_2\}, L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{e_7\},$ $L_8 \cup \{e_5\}, L_8 \cup \{f_3\}, L_8 \cup \{b_1, c_6, d_7\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_3, c_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{c_5\}, L_9 \cup \{b_5\}, L_9 \cup \{e_2\}, L_9 \cup \{d_1\},$ $L_9 \cup \{d_6\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{a_1, f_3, g_6\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_4, c_6, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{c_3\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{e_7\},$ $L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{f_7\}, L_{10} \cup \{a_1, b_5, f_4\}$

Tabelle A.23.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{23}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, c_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_5\}, L_1 \cup \{e_2\}, L_1 \cup \{d_1\},$ $L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{b_4, f_4, g_2\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, c_6, \\ d_7, e_5, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{b_1\}, L_2 \cup \{e_2\},$ $L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{f_3\}, L_2 \cup \{b_4, d_6, e_7\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_5, c_6, \\ d_1, e_2, f_3, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{c_3\}, L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{b_4\},$ $L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_4\}, L_3 \cup \{d_7, e_5, e_7\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, d_1, \\ d_6, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_5\}, L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{d_7\},$ $L_4 \cup \{f_4\}, L_4 \cup \{f_3\}, L_4 \cup \{b_4, c_6, g_6\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, d_6, \\ d_7, e_5, f_3, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{c_3\}, L_5 \cup \{c_6\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_4\},$ $L_5 \cup \{e_2\}, L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_1, f_4, g_6\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_6, \\ d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_5\},$ $L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{c_5, d_1, e_2\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, c_6, \\ d_6, e_2, e_5, f_4, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{b_4\}, L_7 \cup \{e_7\},$ $L_7 \cup \{d_7\}, L_7 \cup \{f_3\}, L_7 \cup \{b_1, c_3, d_1\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ d_6, e_2, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{g_4\}, L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{e_5\},$ $L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{f_3\}, L_8 \cup \{c_6, d_1, d_7\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, c_6, \\ d_6, e_5, e_7, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{c_5\}, L_9 \cup \{b_5\}, L_9 \cup \{e_2\}, L_9 \cup \{d_7\},$ $L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{f_3\}, L_9 \cup \{c_3, d_1, g_4\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, c_3, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_3, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{c_6\}, L_{10} \cup \{e_7\},$ $L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{f_7\}, L_{10} \cup \{b_4, b_5, c_5\}$

Tabelle A.24.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{24}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_7, \\ e_5, e_7, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{b_5\}, L_1 \cup \{e_2\}, L_1 \cup \{d_1\},$ $L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{b_1, c_6, g_2\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, \\ d_7, e_7, f_4, f_7, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{b_1\}, L_2 \cup \{e_2\},$ $L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{f_3\}, L_2 \cup \{c_5, d_6, e_5\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ d_6, d_7, e_7, f_3, f_4, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{g_6\}, L_3 \cup \{c_6\}, L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{e_5\},$ $L_3 \cup \{d_1\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{b_1, c_5, g_2\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_4, c_6, d_1, \\ d_6, e_2, e_5, e_7, f_4, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{b_5\},$ $L_4 \cup \{f_7\}, L_4 \cup \{f_3\}, L_4 \cup \{c_3, c_5, d_7\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, \\ c_5, d_6, d_7, e_5, f_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{g_2\}, L_5 \cup \{c_6\}, L_5 \cup \{e_7\},$ $L_5 \cup \{d_1\}, L_5 \cup \{f_7\}, L_5 \cup \{c_3, e_2, f_3\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_6, \\ e_5, e_7, f_3, f_4, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{g_4\}, L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{c_5\},$ $L_6 \cup \{d_1\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{b_1, b_4, e_2\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, d_1, \\ d_6, d_7, e_2, f_4, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{a_1\}, L_7 \cup \{g_2\}, L_7 \cup \{c_3\}, L_7 \cup \{e_7\},$ $L_7 \cup \{e_5\}, L_7 \cup \{f_3\}, L_7 \cup \{b_1, c_5, f_7\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, c_3, \\ d_6, e_2, f_3, f_7, g_2, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{g_4\}, L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{e_5\},$ $L_8 \cup \{d_1\}, L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{c_6, d_7, e_7\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, d_1, \\ d_6, d_7, e_5, f_3, f_4, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{a_1\}, L_9 \cup \{g_6\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{b_1\},$ $L_9 \cup \{e_7\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{b_4, e_2, g_4\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_1, b_5, c_3, d_1, \\ e_5, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{a_2\}, L_{10} \cup \{c_6\}, L_{10} \cup \{b_4\}, L_{10} \cup \{e_2\},$ $L_{10} \cup \{d_6\}, L_{10} \cup \{f_4\}, L_{10} \cup \{c_5, d_7, f_7\}$

Tabelle A.25.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{25}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_5, c_6, \\ d_1, d_7, e_2, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{a_1\}, L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{e_7\},$ $L_1 \cup \{e_5\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{f_7\}, L_1 \cup \{b_4, d_6\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, c_6, \\ d_1, d_7, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{a_1\}, L_2 \cup \{c_5\}, L_2 \cup \{b_4\}, L_2 \cup \{e_2\},$ $L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_7\}, L_2 \cup \{f_3, g_6\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_4, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{g_6\}, L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{c_6\}, L_3 \cup \{b_4\},$ $L_3 \cup \{e_7\}, L_3 \cup \{d_1\}, L_3 \cup \{f_3\}, L_3 \cup \{a_1, c_5\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, d_1, \\ d_7, e_5, f_4, f_7, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{a_1\}, L_4 \cup \{g_4\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{c_6\},$ $L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{d_6\}, L_4 \cup \{f_3\}, L_4 \cup \{b_1, e_7\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_4, f_7, g_6 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{g_2\}, L_5 \cup \{c_6\}, L_5 \cup \{b_4\},$ $L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{d_1\}, L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{a_1, c_5\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, c_3, c_5, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{c_6\}, L_6 \cup \{b_4\}, L_6 \cup \{e_7\},$ $L_6 \cup \{d_1\}, L_6 \cup \{f_4\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{a_2, b_5\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_5, c_3, c_6, d_1, \\ d_7, e_2, e_5, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{a_2\}, L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{c_5\}, L_7 \cup \{b_1\},$ $L_7 \cup \{b_4\}, L_7 \cup \{e_7\}, L_7 \cup \{f_4\}, L_7 \cup \{d_6, f_3\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_5, c_5, d_6, \\ d_7, e_2, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{a_2\}, L_8 \cup \{c_3\}, L_8 \cup \{c_6\}, L_8 \cup \{b_4\},$ $L_8 \cup \{e_5\}, L_8 \cup \{d_1\}, L_8 \cup \{f_3\}, L_8 \cup \{f_7, g_6\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_4, b_5, c_3, c_5, \\ d_6, d_7, e_7, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{a_2\}, L_9 \cup \{g_4\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{e_2\},$ $L_9 \cup \{e_5\}, L_9 \cup \{d_1\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{b_1, f_3\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_3, b_1, b_4, c_5, d_6, \\ d_7, e_2, e_5, f_4, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{a_2\}, L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{c_3\}, L_{10} \cup \{b_5\},$ $L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{f_7\}, L_{10} \cup \{f_3\}, L_{10} \cup \{c_6, e_7\}$

Tabelle A.26.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{26}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, d_7, e_2, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_3\}, L_1 \cup \{b_1\}, L_1 \cup \{b_5\},$ $L_1 \cup \{e_5\}, L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_4\}, L_1 \cup \{e_7, f_3\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_6, \\ d_7, e_2, e_7, f_3, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{c_5\}, L_2 \cup \{b_1\},$ $L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_4\}, L_2 \cup \{d_1, f_7\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_6, d_1, \\ d_6, e_5, e_7, f_7, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{b_1\}, L_3 \cup \{b_4\}, L_3 \cup \{e_2\},$ $L_3 \cup \{d_7\}, L_3 \cup \{f_4\}, L_3 \cup \{f_3\}, L_3 \cup \{c_3, g_6\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ d_1, d_6, e_2, f_3, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{c_3\}, L_4 \cup \{c_6\},$ $L_4 \cup \{b_1\}, L_4 \cup \{e_5\}, L_4 \cup \{f_4\}, L_4 \cup \{d_7, e_7\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, c_5, \\ d_1, d_6, e_7, f_4, f_7, g_6 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{g_4\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_5\}, L_5 \cup \{e_2\},$ $L_5 \cup \{e_5\}, L_5 \cup \{d_7\}, L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{c_6, g_2\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_5, \\ d_6, d_7, e_2, e_7, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_4\}, L_6 \cup \{c_3\}, L_6 \cup \{c_6\}, L_6 \cup \{b_1\},$ $L_6 \cup \{e_5\}, L_6 \cup \{f_7\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{d_1, g_2\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, c_5, \\ d_6, d_7, e_5, e_7, f_4, g_2 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{c_3\}, L_7 \cup \{c_6\}, L_7 \cup \{b_5\},$ $L_7 \cup \{e_2\}, L_7 \cup \{d_1\}, L_7 \cup \{f_7\}, L_7 \cup \{f_3, g_4\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_5, c_6, d_1, d_7, \\ e_5, e_7, f_3, g_2, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{b_4\},$ $L_8 \cup \{e_2\}, L_8 \cup \{d_6\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{c_3, f_4\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, c_3, c_5, d_1, \\ d_6, e_5, f_3, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{a_1\}, L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{c_6\}, L_9 \cup \{b_4\},$ $L_9 \cup \{b_5\}, L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{f_4\}, L_9 \cup \{e_2, e_7\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_2, a_3, b_1, b_5, c_3, d_1, \\ d_7, e_2, f_3, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{a_1\}, L_{10} \cup \{c_5\}, L_{10} \cup \{b_4\}, L_{10} \cup \{e_7\},$ $L_{10} \cup \{e_5\}, L_{10} \cup \{d_6\}, L_{10} \cup \{f_7\}, L_{10} \cup \{c_6, g_2\}$

Tabelle A.27.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{27}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ d_6, e_5, e_7, f_4, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{c_5\}, L_1 \cup \{c_6\}, L_1 \cup \{b_1\},$ $L_1 \cup \{e_2\}, L_1 \cup \{d_1\}, L_1 \cup \{f_3\}, L_1 \cup \{d_7, f_7\}$
$L_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_5, c_6, \\ d_7, e_2, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_2 \cup \{g_2\}, L_2 \cup \{c_3\}, L_2 \cup \{b_1\}, L_2 \cup \{b_4\},$ $L_2 \cup \{e_5\}, L_2 \cup \{d_6\}, L_2 \cup \{f_4\}, L_2 \cup \{d_1, f_3\}$
$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, c_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_3 \cup \{c_5\}, L_3 \cup \{b_5\}, L_3 \cup \{e_2\}, L_3 \cup \{d_1\},$ $L_3 \cup \{d_6\}, L_3 \cup \{f_4\}, L_3 \cup \{f_3\}, L_3 \cup \{c_3, g_2\}$
$L_4 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_3, d_6, \\ d_7, e_5, e_7, f_4, g_2, g_4 \end{array} \right\}$	$L_4 \cup \{g_6\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{c_6\}, L_4 \cup \{b_5\},$ $L_4 \cup \{e_2\}, L_4 \cup \{d_1\}, L_4 \cup \{f_7\}, L_4 \cup \{b_1, f_3\}$
$L_5 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ c_6, d_7, e_2, e_7, f_4, g_4 \end{array} \right\}$	$L_5 \cup \{g_6\}, L_5 \cup \{g_2\}, L_5 \cup \{c_5\}, L_5 \cup \{b_1\},$ $L_5 \cup \{e_5\}, L_5 \cup \{f_7\}, L_5 \cup \{f_3\}, L_5 \cup \{d_1, d_6\}$
$L_6 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_1, d_6, e_2, f_4, f_7, g_4 \end{array} \right\}$	$L_6 \cup \{g_6\}, L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{b_5\},$ $L_6 \cup \{e_7\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{f_3\}, L_6 \cup \{c_3, e_5\}$
$L_7 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ d_1, e_5, e_7, f_3, g_2, g_6 \end{array} \right\}$	$L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{c_5\}, L_7 \cup \{b_1\}, L_7 \cup \{e_2\},$ $L_7 \cup \{d_7\}, L_7 \cup \{f_4\}, L_7 \cup \{f_7\}, L_7 \cup \{c_6, d_6\}$
$L_8 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, c_3, \\ c_6, d_1, e_5, e_7, f_3, g_6 \end{array} \right\}$	$L_8 \cup \{g_4\}, L_8 \cup \{c_5\}, L_8 \cup \{b_1\}, L_8 \cup \{e_2\},$ $L_8 \cup \{d_7\}, L_8 \cup \{f_4\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{d_6, g_2\}$
$L_9 = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_4, c_5, c_6, \\ d_6, e_2, e_7, f_3, f_4, g_6 \end{array} \right\}$	$L_9 \cup \{g_4\}, L_9 \cup \{g_2\}, L_9 \cup \{c_3\}, L_9 \cup \{b_5\},$ $L_9 \cup \{e_5\}, L_9 \cup \{d_1\}, L_9 \cup \{d_7\}, L_9 \cup \{b_1, f_7\}$
$L_{10} = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ d_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_2 \end{array} \right\}$	$L_{10} \cup \{g_4\}, L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{c_6\}, L_{10} \cup \{b_4\},$ $L_{10} \cup \{e_7\}, L_{10} \cup \{d_1\}, L_{10} \cup \{f_3\}, L_{10} \cup \{b_1, e_2\}$

Tabelle A.28.: einige Kolinien L_+ von T_2 aus Λ_{28}

positive Kolinie L_+	Kopunkte auf L_+
$L_1 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_5, c_3, c_5, \\ c_6, d_7, e_5, f_4, f_7, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_1 \cup \{g_6\}, L_1 \cup \{g_2\}, L_1 \cup \{b_4\}, L_1 \cup \{e_7\},$ $L_1 \cup \{d_1\}, L_1 \cup \{d_6\}, L_1 \cup \{f_3\}, L_1 \cup \{b_1, e_2\}$
$L_2 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, \\ c_3, d_6, d_7, e_7, f_7, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_2 \cup \{g_6\}, L_2 \cup \{c_6\}, L_2 \cup \{e_2\}, L_2 \cup \{e_5\},$ $L_2 \cup \{d_1\}, L_2 \cup \{f_4\}, L_2 \cup \{f_3\}, L_2 \cup \{c_5, g_4\}$
$L_3 = \begin{Bmatrix} a_2, a_3, b_1, b_4, b_5, c_6, \\ d_1, d_6, d_7, e_2, f_3, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_3 \cup \{a_1\}, L_3 \cup \{g_2\}, L_3 \cup \{c_3\}, L_3 \cup \{e_7\},$ $L_3 \cup \{e_5\}, L_3 \cup \{f_4\}, L_3 \cup \{f_7\}, L_3 \cup \{c_5, g_4\}$
$L_4 = \begin{Bmatrix} a_1, a_3, b_1, c_6, d_1, d_6, \\ e_2, e_5, e_7, f_7, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_4 \cup \{a_2\}, L_4 \cup \{g_2\}, L_4 \cup \{c_5\}, L_4 \cup \{b_5\},$ $L_4 \cup \{d_7\}, L_4 \cup \{f_4\}, L_4 \cup \{f_3\}, L_4 \cup \{b_4, c_3\}$
$L_5 = \begin{Bmatrix} a_3, b_4, c_3, c_5, c_6, d_1, \\ d_6, d_7, e_2, f_3, g_2, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_5 \cup \{a_2\}, L_5 \cup \{g_6\}, L_5 \cup \{b_1\}, L_5 \cup \{b_5\},$ $L_5 \cup \{e_7\}, L_5 \cup \{e_5\}, L_5 \cup \{f_4\}, L_5 \cup \{a_1, f_7\}$
$L_6 = \begin{Bmatrix} a_3, b_5, c_6, d_1, d_6, e_2, \\ e_5, e_7, f_3, f_4, f_7, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_6 \cup \{a_1\}, L_6 \cup \{g_4\}, L_6 \cup \{g_2\}, L_6 \cup \{c_3\},$ $L_6 \cup \{c_5\}, L_6 \cup \{b_1\}, L_6 \cup \{d_7\}, L_6 \cup \{a_2, b_4\}$
$L_7 = \begin{Bmatrix} a_1, a_2, b_5, c_3, c_5, c_6, \\ d_7, e_2, f_3, f_4, f_7, g_2 \end{Bmatrix}$	$L_7 \cup \{a_3\}, L_7 \cup \{g_4\}, L_7 \cup \{g_6\}, L_7 \cup \{b_1\},$ $L_7 \cup \{e_7\}, L_7 \cup \{e_5\}, L_7 \cup \{d_1\}, L_7 \cup \{b_4, d_6\}$
$L_8 = \begin{Bmatrix} a_2, b_1, b_4, c_3, c_5, c_6, \\ d_7, e_2, e_5, e_7, f_4, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_8 \cup \{a_1\}, L_8 \cup \{g_6\}, L_8 \cup \{g_2\}, L_8 \cup \{b_5\},$ $L_8 \cup \{d_1\}, L_8 \cup \{f_7\}, L_8 \cup \{f_3\}, L_8 \cup \{a_3, d_6\}$
$L_9 = \begin{Bmatrix} a_1, b_1, c_3, c_5, c_6, d_1, \\ d_7, e_5, f_4, g_2, g_4, g_6 \end{Bmatrix}$	$L_9 \cup \{a_3\}, L_9 \cup \{a_2\}, L_9 \cup \{b_4\}, L_9 \cup \{b_5\},$ $L_9 \cup \{e_7\}, L_9 \cup \{d_6\}, L_9 \cup \{f_7\}, L_9 \cup \{e_2, f_3\}$
$L_{10} = \begin{Bmatrix} a_1, b_4, c_5, d_1, d_6, d_7, \\ e_2, e_5, e_7, f_3, f_4, g_4 \end{Bmatrix}$	$L_{10} \cup \{a_3\}, L_{10} \cup \{g_6\}, L_{10} \cup \{g_2\}, L_{10} \cup \{c_3\},$ $L_{10} \cup \{b_1\}, L_{10} \cup \{b_5\}, L_{10} \cup \{f_7\}, L_{10} \cup \{a_2, c_6\}$

Literatur

- [Aig06] Martin Aigner. *Diskrete Mathematik*. 6. Aufl. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2006. ISBN: 9783834800848.
- [Aig76] Martin Aigner. *Matroide und Transversaltheorie*. Hochschultext (Berlin) 2. Springer, 1976. ISBN: 9783540079491.
- [Bjö+99] Anders Björner u. a. *Oriented Matroids*. 2. Aufl. Cambridge Books Online. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 9780511586507.
- [BM76] J. A. Bondy und U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North Holland, 1976. ISBN: 0-444-19451-7.
- [Bon10] Joseph E. Bonin. *An Introduction to Transversal Matroids*. 27. Okt. 2010. URL: <http://home.gwu.edu/~jbonin/TransversalNotes.pdf> (besucht am 18.02.2015).
- [CGH11] L. Chávez-Lomelí, L. Goddyn und W. Hochstättler. „Balancing Covectors“. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 25.3 (2011), S. 1315–1318.
- [Die10] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. 4. Aufl. Eigenverlag (eBook), 2010.
- [EM11] *Minor of a graph*. *Encyclopedia of Mathematics*. 7. Feb. 2011. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Minor_of_a_graph&oldid=18297 (besucht am 10.10.2014).
- [Gal86] Zvi Galil. „Efficient algorithms for finding maximum matching in graphs“. In: *Computing Surveys* 18.1 (1986), S. 23–38. URL: <http://web.eecs.umich.edu/~pettie/matching/Galil-maximum-matching-survey.pdf>.
- [GM12] Gary Gordon und Jennifer McNulty. *Matroids: A Geometric Introduction*. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 9781139049443.
- [Had43] H Hadwiger. „Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, Vierteljschr“. In: *Naturforsch. Ges. Zürich* 88 (1943), S. 133–142.
- [Har69] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley, 1969.
- [HK73] John E. Hopcroft und Richard M. Karp. „An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs“. In: *SIAM Journal on Computing* 2.4 (1973), S. 225–231. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.186.3904&rep=rep1&type=pdf>.
- [HN06] Winfried Hochstättler und Jaroslav Nešetřil. „Antisymmetric flows in matroids“. In: *European Journal of Combinatorics* 27.7 (2006). Eurocomb '03 - Graphs and Combinatorial Structures, S. 1129–1134. ISSN: 0195-6698. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669806001090>.

- [HN08] Winfried Hochstättler und Robert Nickel. „On the chromatic number of an oriented matroid“. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 98.4 (2008), S. 698–706. ISSN: 0095-8956. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895607001153>.
- [HN11] Winfried Hochstättler und Robert Nickel. *On the Flow Lattice of Uniform Oriented Matroids*. Techn. Ber. btu-lsgdi-011.04. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2011. URL: <http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsgdi/pubs/btu-lsgdi-01104.ps.gz>.
- [Hoc09] Winfried Hochstättler. *A Hadwiger Conjecture for Hyperplane Arrangements*. Techn. Ber. feu-dmo018.09. FernUniversität in Hagen, 2009. URL: <http://www.fernuni-hagen.de/mathematik/DMO/pubs/feu-dmo018-09.pdf>.
- [Hoc10] Winfried Hochstättler. *Oriented Matroids - From Matroids and Digraphs to Polyhedral Theory*. Techn. Ber. feu-dmo024.10. FernUniversität in Hagen, 2010. URL: <http://www.fernuni-hagen.de/MATHEMATIK/DMO/pubs/feu-dmo024-10.pdf>.
- [Hoc11a] Winfried Hochstättler. *Matroide Vorlesung WS 96/97*. Vorlesungsskript. Zentrum für paralleles Rechnen, Universität zu Köln, 2011. URL: http://www.zaik.de/AFS/publications/lecture_notes/Matroide/ (besucht am 15.02.2015).
- [Hoc11b] Winfried Hochstättler. *Sind Transversalmatroide dreifärbbar?* Präsentation im Rahmen der DMV Tagung 2011, Köln. 2011.
- [Nic12] Robert Nickel. „Flows and Colorings in Oriented Matroids“. Dissertation. Fernuniversität Hagen, 2012. URL: <http://deposit.fernuni-hagen.de/2899/>.
- [NR99] Jaroslav Nešetřil und A. Raspaud. *Duality, Nowhere-Zero Flows, Colorings and Cycle Covers*. 1999. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.73.6533>.
- [Oxl04] James Oxley. *What is a Matroid?* Juli 2004. URL: <http://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf> (besucht am 10.08.2014).
- [Oxl11] James Oxley. *Matroid Theory (Oxford Graduate Texts in Mathematics)*. 2. Auflage. Oxford University Press, Apr. 2011. ISBN: 9780199603398.
- [Peg] Ed Jr. Pegg. *Graph Minor*. *Wolfram MathWorld*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/GraphMinor.html> (besucht am 10.10.2014).
- [Sch11] Joachim Schlosser. *Wissenschaftliche Arbeiten schreiben mit LaTeX*. 4. Aufl. mitp-Verlag, 2011. ISBN: 9783826691027.
- [Sei13] Ulrich Seip. *Graphentheorie*. Vorlesungsskript. Fernuniversität Hagen, 2013.
- [Ste+14] W. A. Stein u. a. *Sage Mathematics Software (Version 6.1.5)*. The Sage Development Team. 2014. URL: <http://www.sagemath.org>.

- [Ste06] Angelika Steger. *Graphenalgorithmen*. Vorlesungsskript. ETH Zürich, 2006. URL: http://www.ti.inf.ethz.ch/as/teaching/ss06/graph_algo/skript.pdf (besucht am 28.03.2015).
- [Weia] Eric W. Weisstein. *Four-Color Theorem*. *Wolfram MathWorld*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html> (besucht am 14.03.2015).
- [Weib] Eric W. Weisstein. *Planar Graph*. *Wolfram MathWorld*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/PlanarGraph.html> (besucht am 14.03.2015).
- [Wel76] Dominic Welsh. *Matroid Theory*. Hrsg. von P.M. Cohen und G.E.H. Reuter. London Mathematical Society Monographs. Academic Press, 1976.
- [Whi32] H Whitney. „Non-separable and planar graphs“. In: *Trans. Amer. Math. Soc* 34 (1932), S. 339–362. URL: <http://www.ams.org/journals/tran/1932-034-02/S0002-9947-1932-1501641-2/S0002-9947-1932-1501641-2.pdf>.
- [Whi92] Neil White, Hrsg. *Matroid Applications*. Cambridge University Press, 1992. ISBN: 978-0-521-38165-9.