

FernUniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik

BACHELORARBEIT

**Existenz und Konstruktion von  
Dreieckszerlegungen triangulierter  
Graphen und Schnyder woods**

Raphael Steiner

Tuttlingen, 14. Januar 2016

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notation</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Definitionen</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Schnyder woods</b>	<b>11</b>
4.1	Eigenschaften . . . . .	11
4.2	Existenz und Konstruktion . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Allgemeine Dreieckskontaktdarstellungen</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Gleichseitige Dreieckskontaktdarstellungen</b>	<b>33</b>
6.1	Entartung . . . . .	34
6.2	Existenz . . . . .	35
6.3	Konstruktion . . . . .	47
6.3.1	Das Gleichungssystem . . . . .	47
6.3.2	Eindeutige Lösbarkeit . . . . .	48
6.3.3	Das Verfahren . . . . .	55
6.3.4	Flip-Aktionen . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Weitere Überlegungen und offene Probleme</b>	<b>60</b>
7.1	Eindeutigkeit . . . . .	60
7.2	Weitere Flip-Aktionen . . . . .	65
7.3	Ansatz für einen Endlichkeitsbeweis . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Fünfeckskontaktdarstellungen</b>	<b>72</b>
A.1	Definitionen . . . . .	72
A.2	Existenz von Fünffarbenwäldern und Fünfeckskontaktdarstellungen . . . . .	76
A.2.1	Existenz und Konstruktion von Fünffarbenwäldern . . . . .	76
A.2.2	Existenz von allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellungen von planaren Graphen . . . . .	78
A.2.3	Existenz von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen . . . . .	88
A.3	Das Gleichungssystem . . . . .	91

A.4	Eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems . . . . .	95
A.5	Weitere Überlegungen zu regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen und Ausblick . . . . .	111
A.6	Auftreten von X-Kreisen in alternierenden Matchingkreisen . . . . .	116

## **Selbstständigkeitserklärung**

Der Verfasser erklärt, dass er die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt hat. Die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht worden.

---

Raphael Steiner

Tuttlingen, 14.01.2016



# Kapitel 1

## Einführung

Eine Kontaktdarstellung eines planaren Graphen ist eine geometrische Darstellung des Graphen. Dabei werden die Knoten des Graphen durch im Einzelfall spezifizierte geometrische Objekte in der Ebene mit teilweise weiteren Forderungen repräsentiert. Für diese soll gelten:

1. Keines der Objekte besteht nur aus einem Punkt.
2. Keine zwei verschiedenen Objekte überschneiden sich in mehr als einem Punkt.
3. Zwei verschiedene Objekte überschneiden sich genau dann in exakt einem Punkt (wir sagen dann, sie berühren sich), wenn die repräsentierten Knoten im Graphen adjazent sind.

Offensichtlich lässt sich ein planar eingebetteter Graph bis auf Isomorphie aus solch einer Kontaktdarstellung rekonstruieren. Daher rührt auch die Bezeichnung.

Zu Kontaktdarstellungen wurden bereits viele Untersuchungen gemacht. Ein bekanntes Resultat ist das Circle packing theorem von Koebe (siehe [Koe36]), das für jeden planaren Graphen die Existenz einer Kontaktdarstellung garantiert, wobei die Knoten durch Kreise repräsentiert werden.

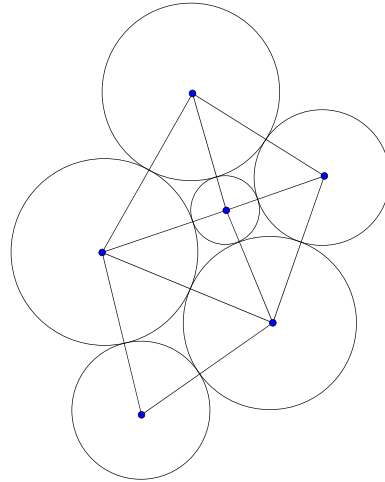


Abbildung 1.1: Eine Kreiskontakt Darstellung eines planaren Graphen.

In dieser Bachelorarbeit wollen wir uns mit Kontakt Darstellungen beschäftigen, bei denen die Knoten durch Dreiecke repräsentiert werden.

Nachdem wir grundlegende Definitionen eingeführt und ein wichtiges Hilfsmittel während der gesamten Bachelorarbeit, die sogenannten Schnyder woods (siehe bspw. [Fel04]) und elementare Eigenschaften dieser, besprochen haben, beschäftigen wir uns mit allgemeinen Dreieckskontakt Darstellungen und zeigen deren Existenz für beliebige planare Graphen, wobei wir auch eine Konstruktionsvorschrift angeben.

Danach konzentrieren wir uns auf speziellere, sogenannte gleichseitige Dreieckskontakt Darstellungen. Hierbei fordern wir von den verwendeten Dreiecken, parallele Grundseiten zu besitzen und gleichseitig zu sein. Zunächst schränken wir durch Betrachtung von entarteten Fällen deren mögliche Existenz auf eine spezielle Graphenklasse ein. Im Anschluss führen wir unter Verwendung eines wesentlich allgemeineren Satzes aus [Sch90] den Existenzbeweis für diese Graphenklasse. Diesen zugrundeliegenden Satz werden wir nicht beweisen, allerdings die Grundzüge und Ideen des Beweises von Oded Schramm in [Sch90] darlegen. Da dieser Beweis nicht konstruktiv ist, behandeln wir danach ein von Stefan Felsner in [Fel10c] eingeführtes Verfahren, um diese Kontakt Darstellungen zu konstruieren. Dabei wird in Abhängigkeit eines die Kontakte repräsentierenden Schnyder woods auf dem gegebenen Graphen ein Gleichungssystem für die Seitenlängen der vorkommenden Dreiecke aufgestellt und dessen eindeutige Lösbarkeit bewiesen. Schließlich sprechen wir das Problem möglicher Negativeinträge im Lösungsvektor an und stellen aufbauend darauf ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion vor. Anschließend diskutieren wir verschiedene Flip-Aktionen, welche variable Bestandteile des Verfahrens sind, und beweisen mathematische Hilfssätze. Dies geschieht im Hinblick darauf, dass bisher kein Beweis für die Endlichkeit des Verfahrens bekannt ist. Zudem werden dort kurz eigene Ideen und Teilargumente für einen Endlichkeitsbeweis erläutert sowie die Frage nach der Eindeutigkeit

von gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen angesprochen.

Zuletzt wenden wir uns in einem Anhang, der die eigentliche Aufgabenstellung verallgemeinert, einer anderen Art von Kontaktdarstellungen zu, den Fünfeckskontaktdarstellungen. Dies sind Kontaktdarstellungen von planaren Graphen, die nur Fünfecke als geometrische Objekte verwenden. Ähnlich wie bei den Dreieckskontaktdarstellung setzen wir diese zunächst in Zusammenhang mit Färbungen und Orientierungen der zugrundeliegenden Graphen, genannt Fünf-farbenwälder ähnlich den Schnyder woods. Darauf aufbauend betrachten wir zunächst die Existenz von allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellungen (unter Verwendung konvexer Fünfecke), weisen anschließend wieder mithilfe der Ergebnisse aus der Arbeit [Sch90] von Oded Schramm nichtkonstruktiv die Existenz von Fünfeckskontaktdarstellungen 5-triangulierter Graphen unter Verwendung von regelmäßigen Fünfecken nach und verfolgen zuletzt wie bei den Dreiecken den Ansatz der Konstruktion von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen durch Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems.

## **Danksagung**

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Winfried Hochstättler für die gute Betreuung der Arbeit sowohl inhaltlicher als auch formaler Art bedanken, sowie für die Beantwortung meiner Fragen innerhalb kürzester Zeit.

# Kapitel 2

## Notation

Zunächst wollen wir grundlegende hier verwendete Notationen einführen.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{R}$$

Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R}^n$$

Menge der  $n$ -dimensionalen Spaltenvektoren über  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{m \times n}$$

Menge der  $m \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$

$$\subseteq$$

Teilmenge

$$\subset$$

echte Teilmenge

$$\mathcal{P}(M)$$

Potenzmenge der Menge  $M$

KAPITEL 2. NOTATION

$A \Delta B$	Symmetrische Differenz von $A$ und $B$
$\dot{\cup}$	Disjunkte Vereinigung
$ M $	Mächtigkeit der Menge $M$
$\overset{\circ}{A}$	Das topologisch Innere der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\bar{A}$	Der topologische Abschluss der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\delta A$	Der topologische Rand der Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$	Standardbasisvektor mit Eins an der $i$ -ten Stelle
$\text{sign}(a) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } a > 0 \\ -1 & , \text{ falls } a < 0 \\ 0 & , \text{ falls } a = 0 \end{cases}$	Vorzeichen der reellen Zahl $a$
$v_i$	Zum Index $i$ gehöriger Eintrag von $v \in \mathbb{R}^n$
$A_i$	$i$ -te Zeile der Matrix $A$
$A_{.j}$	$j$ -te Spalte der Matrix $A$
$\text{sign}(\sigma)$	Vorzeichen der Permutation $\sigma \in S_n$ , der Menge der Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ .

# Kapitel 3

## Definitionen

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende, vor allen Dingen graphentheoretische Begriffe definieren, die in der Arbeit gebraucht werden.

**Definition 3.0.1.** Ein *einfacher Graph* ist ein Tupel  $G = (V, E)$  bestehend aus einer endlichen Menge  $V =: V(G)$  und einer endlichen Menge  $E(G) := E \subseteq \binom{V}{2} := \{M \subseteq V \mid |M| = 2\}$ . Ein Element  $v \in V$  heißt *Knoten* des Graphen, ein Element  $e \in E$  *Kante*. Zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V$  heißen *adjazent*, falls  $\{v_1, v_2\} \in E$ , ein Knoten  $v \in V$  und eine Kante  $e \in E$  heißen *inzident*, falls  $v \in e$ . Sind die Knoten  $v, u \in V$  adjazent, so nennen wir auch  $v$  einen *Nachbarn* von  $u$ . Einfache Graphen können auch als endliche, irreflexive, symmetrische Relationen aufgefasst werden.

Ein Graph  $H = (V', E')$  heißt *Teilgraph* von  $G$ , falls  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$  gilt.  $H$  heißt *induzierter Teilgraph*, falls zusätzlich  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  gilt, d.h. wenn  $H$  aus  $G$  durch Löschen aller Knoten aus  $V \setminus V'$  und der zugehörigen inzidenten Kanten entsteht.

**Definition 3.0.2.** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph und  $v \in V$ . Dann wird die Menge  $N(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$  der Nachbarn von  $v$  in  $G$  als die *Nachbarschaftsmenge* von  $v$  bezeichnet und  $\deg_G(v) := |N(v)|$  als *Grad* von  $v$  in  $G$ . Ist aus dem Kontext klar, von welchem Graphen gesprochen wird, schreiben wir einfach  $\deg(v)$ .

**Definition 3.0.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph. Ein *Spaziergang* in  $G$  ist eine Folge von in  $G$  inzidenten Knoten und Kanten, also eine Folge  $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n$ , mit  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 1, \dots, n-1$ . Ein Spaziergang in  $G$  heißt *Pfad* oder *Weg*, falls alle enthaltenen Knoten paarweise verschieden sind. Ein *Zyklus* in  $G$  ist ein Spaziergang, bei dem Start- und Endknoten identisch sind. Ein *Kreis* in  $G$  ist ein Spaziergang, bei dem alle Knoten bis auf Start- und Endknoten paarweise verschieden sind. Wichtig ist, dass bei allen Definitionen die Reihenfolge der Knoten und Kanten irrelevant ist, d.h. der Spaziergang  $v_1 e_1 v_2 \dots v_n$  ist derselbe wie  $v_n e_{n-1} v_{n-1} \dots v_1$ . Insbesondere lassen sich Spaziergänge, Wege/Pfade, Zyklen und Kreise als Teilgraphen von  $G$  auffassen.

**Definition 3.0.4.** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph, und sei  $e = \{v_1, v_2\} \in E$ . Kantenkontraktion von  $e$  ist eine Operation auf  $G$ , die als Ergebnis einen Tupel  $(V', E')$  mit folgenden Eigenschaften hat:

Es ist  $V' = V \setminus e \cup \{v_e\}$ , wobei  $v_e$  ein zusätzlicher Knoten ist, und es gilt für alle  $u, v \in V'$ :

$$\begin{aligned} \{u, v\} \in E' &\Leftrightarrow \{u, v\} \in E, \text{ falls } u, v \neq v_e, \\ \{u, v_e\} \in E' &\Leftrightarrow \{\{u, v_1\}, \{u, v_2\}\} \cap E \neq \emptyset, \text{ falls } u \neq v_e, \text{ und} \\ \{v_e, v_e\} &\notin E'. \end{aligned}$$

Das Tupel  $(V', E')$  ist insbesondere ein Graph und wird mit  $G/e$  bezeichnet.

**Definition 3.0.5.** Eine *Einbettung* eines einfachen Graphen  $G$  in die Ebene ist eine Abbildung von  $V(G) \cup E(G)$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ , sodass jeder Knoten des Graphen durch einen Punkt und eine Kante durch einen Jordanbogen zwischen den Punkten der beiden enthaltenen Knoten repräsentiert wird, welcher außer diesen beiden keinen Punkt durchläuft.  $G$  heißt *planar*, falls er sich so in die Ebene einbetten lässt, dass sich zwei Jordanbögen höchstens in einem zu einem Knoten gehörigen Punkt schneiden können. Ist  $G$  planar, so heißt solch eine Einbettung *planare Einbettung* des Graphen. In der Arbeit werden wir aus Gründen der Einfachheit des Öfteren nicht zwischen einem planaren Graphen und einer planaren Einbettung des Graphen unterscheiden, sofern aus dem Kontext klar ist, welcher Begriff gemeint ist.

Ein minimaler Kreis in einem planaren Graphen  $G$  erzeugt einen geschlossenen Jordanbogen in einer zugehörigen planaren Einbettung, welcher sich aus den Jordanbögen der daran beteiligten Kanten zusammensetzt. Dieser zerlegt sein Komplement im  $\mathbb{R}^2$  in eine beschränkte und eine unbeschränkte Menge, wobei die beschränkte keine Bilder von Knoten und Kanten enthält (wenn man von isolierten Knoten oder Knoten mit Grad 1 absieht) und als durch den minimalen Kreis erzeugtes *beschränktes Gebiet* bezeichnet wird. Zudem erhält man analog ein unbeschränktes *Außengebiet*, welches die Einbettung komplett umschreibt.

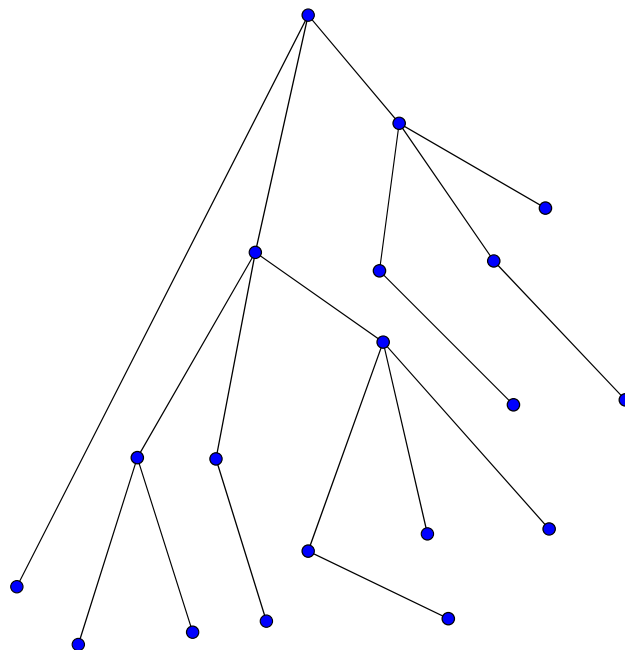
**Definition 3.0.6.** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph. Wir definieren eine Relation auf  $G$  durch  $u, v \in V : u \sim_z v : \Leftrightarrow$  Es gibt einen Spaziergang startend in  $u$  und endend in  $v$ . Wie man sich leicht überlegt, ist dies sogar eine Äquivalenzrelation auf  $V$ . Folglich zerfällt  $V$  in Äquivalenzklassen bzgl. dieser Relation. Existiert nur eine Äquivalenzklasse, so existiert zwischen je zwei Knoten von  $G$  ein Spaziergang und damit ein Weg. Wir sagen dann,  $G$  ist *zusammenhängend*. Im allgemeinen Fall definieren die Äquivalenzklassen induzierte zusammenhängende Teilgraphen von  $G$ , zwischen welchen keine Kante verläuft. Sie werden als *Zusammenhangskomponenten* von  $G$  bezeichnet.

Ist  $k \in \mathbb{N}$ , so wird  $G$  als *k-zusammenhängend* bezeichnet, falls  $|V(G)| \geq k + 1$  und falls der aus  $G$  durch Löschen von beliebigen höchstens  $k - 1$  Knoten und deren inzidenten Kanten entstehende Graph zusammenhängend ist. Also ist jeder zusammenhängende Graph 1-zusammenhängend, und aus  $k$ -Zusammenhang für  $k \in \mathbb{N}$  folgt der  $k'$ -Zusammenhang für alle  $k' = 1, \dots, k$ .

**Definition 3.0.7.** Sei  $T = (V, E)$  ein einfacher Graph.  $T$  heißt *Wald*, falls  $T$  keine Kreise enthält. Ist  $T$  darüberhinaus zusammenhängend, so wird  $T$  als *Baum* bezeichnet. Ein Baum kann auch

dadurch charakterisiert werden, dass es für zwei Knoten  $u \neq v \in V$  exakt einen Weg mit Endknoten  $u, v$  in  $T$  gibt. Insbesondere setzt sich ein Wald aus seinen Zusammenhangskomponenten, also Bäumen, zusammen.

Bäume sind insbesondere planare Graphen. Durch Auszeichnung eines beliebigen Knoten  $w \in V(T)$  eines Baumes  $T$  als sogenannten Wurzelknoten und Betrachtung von  $T$  als planar eingebetteten Graphen lassen sich die eindeutigen Verbindungspfade zwischen beliebigen Knoten  $v \in V(T) \setminus \{w\}$  und  $w$  als auseinander hervorgehende "Äste" gliedern und durch Separation zweier solcher Verbindungspfade von einem am weitesten links bzw. rechts liegenden Ast sprechen. Insbesondere lässt sich bzgl. der gewählten Einbettung eine Ordnung der "Äste" ausmachen, indem man von einem weiter links bzw. rechts liegenden Ast spricht. Zur Veranschaulichung dessen siehe folgende Abbildung.



**Definition 3.0.8.** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph.  $G$  heißt bipartit, falls Mengen  $V_1, V_2 \subseteq V$ , die sogenannten *Farbklassen oder -mengen*, mit  $V = V_1 \cup V_2$  und  $\forall e \in E : e \cap V_1, e \cap V_2 \neq \emptyset$  existieren, d.h. falls alle Kanten des Graphen "zwischen"  $V_1$  und  $V_2$  verlaufen.

**Definition 3.0.9.** Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$ . Ein *Matching* auf  $G$  ist eine Teilmenge  $M \subseteq E$  der Kantenmenge, sodass alle enthaltenen Kanten paarweise disjunkt sind. Offensichtlich gilt für ein Matching  $M$ :  $|M| \leq \frac{|V|}{2}$ . Ein *perfektes Matching* ist ein Matching  $M$  mit  $|M| = \frac{|V|}{2}$ , insbesondere ist solch eines maximal bzgl. der Anzahl an enthaltenen Kanten. Ein Kreis  $C$  in  $G$  heißt *M-alternierend*, falls die Kanten entlang  $C$  abwechselnd Matching- und Nichtmatchingkanten sind. Wieder kann man Matchings auch als Teilgraphen des Ausgangsgraphen auffassen.



**Definition 3.0.10.** Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph* ist ein Tupel  $G = (V, D)$ , wobei  $V$  eine endliche Menge und  $D \subseteq V \times V$  eine endliche, irreflexive und nirgendwo symmetrische Relation auf  $V$  ist. Ein Element  $v \in V$  nennen wir *Knoten*, ein Element  $e = (u, v) \in D$  (*gerichtete Kante*) von  $G$ . Wir bezeichnen  $u =: \text{tail}(e)$  als *Start-* und  $v =: \text{head}(e)$  als *Endknoten* der Kante  $e$ . Der Digraph  $G$  induziert einen ihm zugrundeliegenden einfachen Graphen  $H = (V, E)$  mit  $E := \{\{u, v\} \mid \{(u, v), (v, u)\} \cap D \neq \emptyset\}$ . Deshalb kann ein Digraph auch als ein einfacher Graph mit einer zusätzlichen *Orientierung* der Kanten jeweils zu einem der beiden enthaltenen Knoten hin interpretiert werden. Ist  $v \in V$ , so bezeichnen wir eine zu  $v$  inzidente Kante  $e$  als *auslaufend*, falls  $\text{tail}(e) = v$  und als *einlaufend*, falls  $\text{head}(e) = v$ . Die Anzahl an ein- bzw. auslaufenden Kanten wird als *Innen- bzw. Außengrad*  $\text{deg}_G^+(v)$  bzw.  $\text{deg}_G^-(v)$  bezeichnet. Digraphen werden in der Regel so gezeichnet, dass man die Kanten einer gegebenen Einbettung des zugrundeliegenden einfachen Graphen mit Pfeilspitzen an den Endknoten versieht. Begriffe wie Adjazenz, Inzidenz, Spaziergänge, Wege/Pfade, Zyklen und Kreise übertragen sich von  $H$  auf  $G$ . Allerdings lassen sich diese Begriffe noch verfeinern, indem man von einem *gerichteten Spaziergang*  $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{n-1} v_n$  von  $v_1$  nach  $v_n$  spricht, falls  $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in D, i = 1, \dots, n-1$ , gilt. Analog definiert man die Begriffe *gerichteter Weg*, *Zyklus* bzw. *Kreis*.

**Definition 3.0.11.** Sei  $T = (V, E)$  ein Baum. Dann heißt ein Digraph  $T' = (V, D)$ , der  $T$  als zugrundeliegenden einfachen Graphen besitzt (wir sagen,  $T'$  ist eine Orientierung von  $T$ ) für ein  $v \in V$  ein *in  $v$  wurzelnder In-Baum*, falls für ein beliebiges  $w \in V \setminus \{v\}$  der eindeutige  $w$  und  $v$  verbindende Weg (siehe obige Definition eines Baums) von  $w$  nach  $v$  gerichtet ist. Man spricht von einem *in  $v$  wurzelnden Out-Baum*, falls dieser Weg jeweils von  $v$  nach  $w$  gerichtet ist.

**Definition 3.0.12** (vgl. [Fel04], [Ruc11], [Bre00]). Gegeben sei ein planar eingebetteter Graph  $G$ .

(i)  $G$  heißt *trianguliert*, falls alle beschränkten Gebiete von exakt drei Knoten und drei Kanten berandet werden.

(ii)  $G$  heißt  *$k$ -trianguliert*,  $k \in \mathbb{N}$ , falls darüberhinaus das Außengebiet von  $k$  Knoten und  $k$  Kanten berandet wird.

Wie man sich leicht klarmacht, besitzt jede planare Einbettung eines 3-triangulierten Graphen 3 ausgezeichnete, sogenannte äußere Knoten und 3 ausgezeichnete Randkanten. Der von diesen aufgespannte Kreis umschreibt die gesamte Einbettung. Die drei äußeren Knoten werden in der Regel im Uhrzeigersinn mit  $a_1, a_2, a_3$  bezeichnet, die restlichen Knoten bezeichnet man als innere Knoten.

**Definition 3.0.13.** Gegeben sei eine planare Einbettung eines 3-triangulierten Graphen  $G$  (dies bezeichnet man auch als *planare Triangulation*).

(i) Eine Orientierung der Kanten der planaren Triangulation, abgesehen von den 3 Randkanten,

wird als *3-Orientierung* auf  $G$  bezeichnet, falls gilt:

1. Für jeden inneren Knoten  $v$  gibt es genau drei auslaufende Kanten.
2. Alle zu den äußeren Knoten  $a_1, a_2, a_3$  inzidenten Kanten sind zu diesen hin orientiert.

(ii) Ein *Schnyder wood* auf der gegebenen planaren Triangulation ist eine Färbung der inneren Kanten einer zugehörigen 3-Orientierung in den Farben 1, 2, 3 (in der Regel rot, grün, blau), sodass gilt:

(S1) Für jeden inneren Knoten  $v$  werden die 3 auslaufenden Kanten mit 1, 2, 3 im Uhrzeigersinn gefärbt. Alle einlaufenden Kanten zwischen den auslaufenden Kanten der Farben  $i-1, i+1$  tragen die Farbe  $i$  (wir setzen eine zyklische Struktur auf  $\{1, 2, 3\}$  voraus).

(S2) Alle zu  $a_i$  inzidenten Kanten tragen die Farbe  $i, i = 1, 2, 3$ .

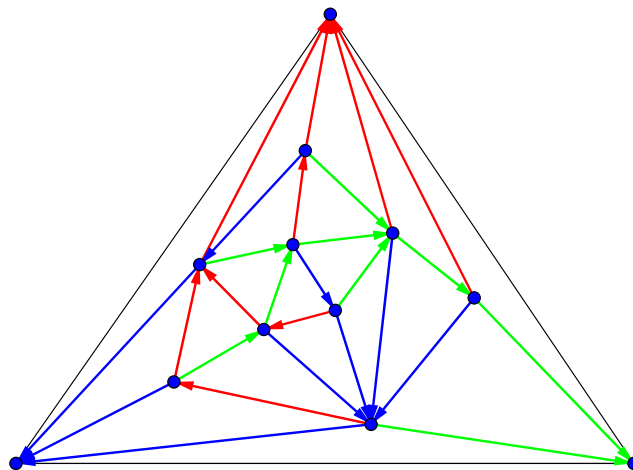


Abbildung 3.1: Ein Schnyder wood auf einem 3-triangulierten Graphen

Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass aus einem Schnyder wood eine 3-Orientierung entsteht, wenn man die Färbung der Kanten vernachlässigt. Tatsächlich lässt sich dieser Prozess auch umkehren, wie wir im folgenden Abschnitt in Form eines allgemeineren Resultats, Satz 4.2.3 zeigen werden.

# Kapitel 4

## Schnyder woods

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung von Dreieckskontaktendarstellungen sind die oben definierten Schnyder woods. Sie finden Anwendung in verschiedensten Bereichen der Graphentheorie, darunter das hier behandelte Thema der Kontaktendarstellungen, aber auch in der Theorie der "Geodesic and Convex Embeddings" von planaren Graphen sowie bei der Charakterisierung planarer Graphen.

### 4.1 Eigenschaften

Zunächst wollen wir einige grundlegende, aber wichtige Aussagen behandeln. Auf das folgende Lemma werden wir in anderen Abschnitten immer wieder zurückgreifen:

**Satz 4.1.1** ([Fel04], [Ruc11]). *Gegeben sei ein Schnyder wood auf einem 3-triangulierten Graphen  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sei  $i \in \{1, 2, 3\}$  beliebig. Der Graph  $T_i$ , der aus  $G$  durch Vernachlässigung aller Kanten mit von  $i$  verschiedener Farbe und durch Hinzufügen der Kanten  $(a_{i-1}, a_i), (a_{i+1}, a_i)$  entsteht, ist ein gewurzelter In-Baum mit Wurzel  $a_i$ , der  $G$  aufspannt, d.h.  $V(G) = V(T_i)$ . Insbesondere existiert für jeden inneren Knoten  $v$  ein  $v$  enthaltender und zu  $a_i$  führender balancierter Pfad in der Farbe  $i$ .*

(ii) *An jedem gerichteten Kreis in  $S$  sind Kanten aller drei Farben beteiligt.*

*Beweis.* Als Vorbereitung für den Beweis der Aussagen zeigen wir folgende Abschwächung von (ii):

Es existiert kein gerichteter Kreis in  $S$ , der nur Kanten einer Farbe enthält.

Nehmen wir also an, es gebe monochromatische gerichtete Kreise in  $S$ . Sei  $C$  ein minimaler solcher Kreis (bzgl. der umschriebenen Knotenmenge). Wir können evtl. durch Umbenennung der

#### 4.1. EIGENSCHAFTEN

Farben bzw. Spiegelung annehmen, dass dieser im Uhrzeigersinn orientiert ist und seine Kanten rot gefärbt sind.

Aufgrund der Struktur des Schnyder woods lokal an einem Knoten kann es keine aus der durch den Kreis definierten Region hinaus zeigenden Kanten in der Farbe Grün geben, hingegen muss jeder Randknoten eine nach innen zeigende grüne Kante besitzen.

Wähle einen solchen Knoten aus und beschreibe den dort startenden gerichteten Spaziergang in Farbe Grün.

Da sich dieser (s.o.) innerhalb des Kreises fortsetzt und keine Randkante verwendet, muss (Endlichkeit der umschriebenen Knoten) dieser irgendwann in einen gerichteten Kreis übergehen, wodurch ein weiterer Kreis in Farbe grün definiert wird, dessen Inneres bzgl. der Knoten eine echte Teilmenge des Vorgängers ist. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von  $C$ , es folgt die Behauptung.

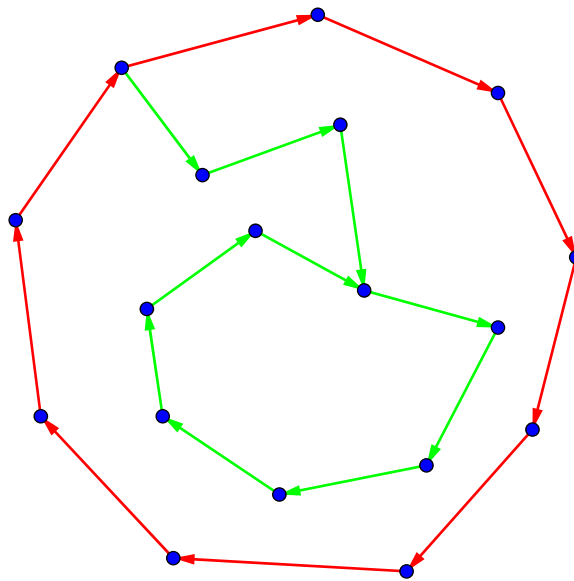


Abbildung 4.1: Beweis der Zwischenaussage

(i) Sei  $i \in \{1, 2, 3\}$  beliebig und  $T_i$  der Graph, der aus  $G$  durch Betrachtung der mit  $i$  gefärbten Kanten entsteht. Wir betrachten einen beliebigen inneren Knoten  $v$  und den dadurch induzierten gerichteten Spaziergang in Farbe  $i$  (wie oben). Offensichtlich können wir so keinen Knoten zweimal besuchen, da wir sonst einen gerichteten Kreis nur in Farbe  $i$  erhielten, s.o.

Da es aber nur endlich viele Knoten gibt, muss dieser Weg bei einem Knoten enden, der zwar einlaufende, aber keine auslaufenden Kanten der Farbe  $i$  besitzt. Diese Eigenschaft hat offensichtlich nur  $a_i$ .

Somit ist gezeigt, dass es von jedem inneren Knoten aus einen (eindeutigen) gerichteten Pfad zu  $a_i$  nur in Farbe  $i$  gibt. Außerdem gilt dasselbe für  $a_{i-1}, a_{i+1}$ , da  $T_i$  per definitionem auch  $(a_{i-1}, a_i), (a_{i+1}, a_i)$  enthält.

Laut Definition 3.0.11 ist  $T_i$  damit ein in  $a_i$  gewurzelter In-Baum, der  $G$  aufspannt.

(ii) Angenommen, es gäbe einen Kreis, der Kanten von genau zwei unterschiedlichen Farben enthält. Wir können annehmen, dass der Kreis im Uhrzeigersinn orientiert ist, sonst "spiegeln" wir den Kreis und den Schnyder wood und tauschen dabei die Farben grün und blau.

Sei nun  $i \in \{1, 2, 3\}$  so, dass  $i, i + 1$  die im Kreis enthaltenen Farben sind. Gemäß (S1) stellt man sofort fest, dass es keine auf dem Kreis startende und von ihm weg zeigende Kante der Farbe  $i + 1$  geben kann. Dies widerspricht aber dem in (i) erzielten Resultat, es gebe von jedem inneren Knoten einen gerichteten Pfad nur in Farbe  $i + 1$  zu  $a_{i+1}$ .  $\square$

Da also Schnyder woods zusammen mit zwei entsprechenden Randkanten einen aufspannenden Baum von  $G$  bilden, ist folgende Definition sinnvoll:

**Definition 4.1.2** ([Ruc11]). Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einer planaren Triangulation  $G$ . Dann bezeichnen wir für  $v \in V(G)$  mit  $\text{num}_b(v), \text{num}_g(v)$  die Nummerierung von  $v$  in  $T_3$  bzw.  $T_2$  bzgl. der Präordnung im Gegenuhrzeigersinn bzw. Uhrzeigersinn (siehe Erläuterung zur folgenden Abbildung). Wir schreiben  $\text{par}_r(v), \text{par}_g(v), \text{par}_b(v)$  für die Eltern von  $v$  in  $T_1$  bzw.  $T_2$  bzw.  $T_3$ .

Im Zusammenhang mit der Definition der Präordnungen auf planar eingebetteten Bäumen wollen wir nun noch den darauf aufbauenden Begriff des geordneten Spannbaums einführen. Für eine ausführliche Beschäftigung mit dem Begriff siehe [tCLiL05], insbesondere stammt die folgende Definition von dort.

**Definition 4.1.3** ([tCLiL05]). Gegeben sei ein kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph  $G$  mit einem aufspannenden Baum  $T$  (d.h.  $V(T) = V(G)$ ), der in einem an das Außengebiet grenzenden Knoten wurzelt. Sei nun  $v$  ein beliebiger Knoten des Graphen. Dann bezeichnen wir mit  $B_1(v), B_3(v)$  die Mengen bestehend aus den Vorgängen bzw. Kindern von  $v$  sowie mit  $B_2(v), B_4(v)$  die Menge der in  $T$  nicht mit  $v$  verwandten Nachbarn von  $v$  mit Nummerierung bzgl. der Präordnung im Gegenuhrzeigersinn von  $T$  kleiner der von  $v$  bzw. größer der von  $v$ . Wir nennen nun  $T$  einen geordneten Spannbaum bzgl.  $G$ , wenn diese vier  $N(v)$  zerlegenden Mengen Blöcke im Gegenuhrzeigersinn um  $v$  bilden.

#### 4.1. EIGENSCHAFTEN

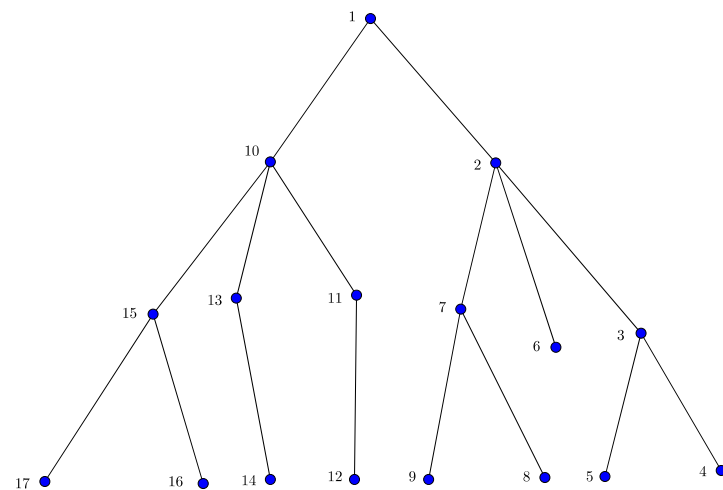
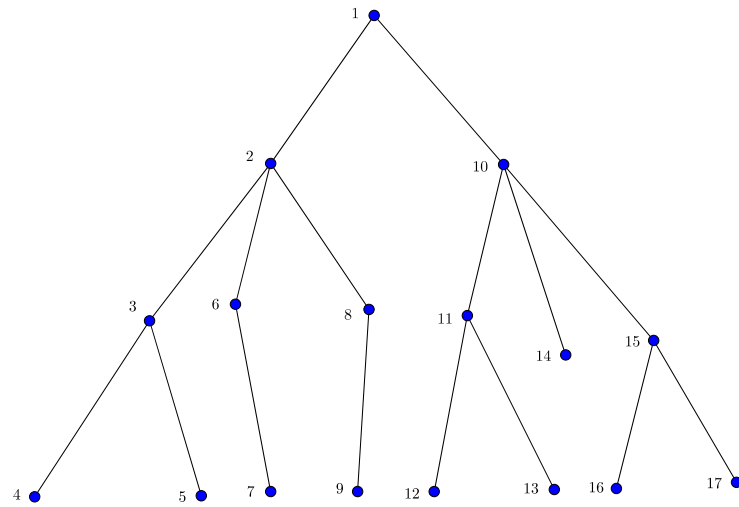


Abbildung 4.2: Die Abbildungen zeigen einen planar eingebetteten Baum mit ausgezeichnetem Wurzelknoten und zwei separierten Ästen (siehe Definition 3.0.7) sowie die sich darauf beziehenden Präordnungen. Hierbei werden die Knoten des Baumes startend beim ausgewählten Wurzelknoten mit Nummer 1 durchnummeriert. Dies wird rekursiv in dem Sinne durchgeführt, dass für einen beliebigen im Baum enthaltenen Knoten die bei  $v$  startenden Teilbäume von links nach rechts bei der Präordnung im Gegenuhrzeigersinn bzw. von rechts nach links bei der Präordnung im Uhrzeigersinn nach demselben Schema durchlaufen werden und die enthaltenen Knoten gemäß dieser Reihenfolge fortlaufend durchnummeriert werden.

## 4.2 Existenz und Konstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Existenz von Schnyder woods auf planaren Graphen beschäftigen und wie man diese konstruiert. Hierbei erhalten wir als Folgerung die bereits in den Definitionen angesprochene Bijektion zwischen Schnyder woods und 3-Orientierungen auf einem 3-triangulierten planaren Graphen.

Zunächst beweisen wir konstruktiv folgenden Satz. Der dabei verwendete Algorithmus basiert auf Überlegungen von Enno Brehm in [Bre00]. Dieser Algorithmus stellt eine etwas anschaulichere Formulierung eines rekursiven Algorithmus aus [Fel04] dar, wobei das dort entwickelte Verfahren darüberhinaus auch für die (hier nicht betrachteten) Schnyder woods auf nicht notwendigerweise triangulierten planaren Graphen anwendbar ist.

**Satz 4.2.1** ([Fel04], [Ruc11], [Bre00]). *Auf jeder planaren Triangulation existiert ein Schnyder wood.*

*Beweis.* Wir geben zum Beweis den folgenden Algorithmus an, der einen Schnyder wood auf einer gegebenen planaren Triangulation konstruiert. Hier beweisen wir, dass er das auch wirklich tut. Insbesondere zeigen wir, dass die Zahl an while-Schleifen-Durchläufen in  $\mathcal{O}(n)$  liegt.

**Algorithmus 4.2.2.** *Gegeben sei ein 3-triangulierter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$ .*

- Initialisiere  $Z$  als den Kreis  $Z_0$ , welcher alle Kanten zwischen zu  $a_1$  adjazenten Knoten enthält.
- Orientiere alle zu  $a_1$  inzidenten Kanten (bis auf die beiden Randkanten) zu  $a_1$  und färbe sie rot.
- while**  $V(Z) \neq \{a_2, a_3\}$  **do**
  - Wähle einen Knoten  $v$  auf  $Z$ , verschieden von  $a_2, a_3$ , der mit keinem Knoten auf  $Z$  durch eine ungefärbte Nichtzykelkante verbunden ist.
  - Orientiere die beiden an  $v$  grenzenden Kanten in  $Z$  von  $v$  weg.
  - Färbe die linke Kante blau, die rechte grün.
  - Orientiere alle zu  $v$  inzidenten Kanten aus dem Inneren von  $Z$  zu  $v$  hin und färbe sie rot.
  - Lösche  $v$  aus  $Z$  und nehme die Nachbarn von  $v$  innerhalb von  $Z$  und die zwischen diesen vorhandenen Randkanten der an  $v$  grenzenden Gebiete in  $Z$  auf.

**end while**

**Ausgabe:** Der eingebettete, gefärbte und orientierte Graph  $G$ .

*Durchführbarkeit und Korrektheit der Ausgabe.* Zuerst beweisen wir, dass zu jedem Zeitpunkt im Algorithmus ein Knoten aus  $Z$  im Sinne des Algorithmus gelöscht werden kann, sofern die folgenden Aussagen, die später induktiv gezeigt werden, für  $Z$  korrekt sind:

1. Zu keinem Zeitpunkt existieren Zyklen in  $Z$  selbst, d.h.  $Z$  bleibt während des gesamten Algorithmus ein Kreis.
2. Zu jedem Zeitpunkt im Algorithmus sind alle Kanten oberhalb von  $Z$  gefärbt und orientiert

## 4.2. EXISTENZ UND KONSTRUKTION

und alle unterhalb ungefärbt und unorientiert.

3. Zu jedem Zeitpunkt im Algorithmus ist die Schnyder wood-Regel (S1) für alle inneren Knoten oberhalb von  $Z$  und (S2) erfüllt.

4. Für alle Knoten  $x \in V(Z) \setminus \{a_2, a_3\}$  gilt: Es gibt genau eine zu  $x$  inzidente rot gefärbte Kante, und diese ist auslaufend (aus  $Z$  hinaus zeigend). Alle grünen und alle blauen zu  $x$  inzidenten Kanten sind zu  $x$  hin orientiert, führen also in  $Z$  hinein. Alle grünen Kanten befinden sich zwischen der linken Randkante von  $x$  in  $Z$  und der auslaufenden roten Kante, alle blauen zwischen der rechten Zykelkante und der roten Kante.

Seien nun diese Aussagen für  $Z$  korrekt und natürlich  $V(Z) \neq \{a_2, a_3\}$ . Wir betrachten einen beliebigen Knoten  $v_1 \in V(Z) \setminus \{a_2, a_3\}$ . Wenn er löschar ist, sind wir fertig, ansonsten gibt es eine ungefärbte Kante, die  $v_1$  mit einem anderen Knoten  $v_{1,e} \in V(Z) \setminus \{a_2, a_3\}$  verbindet. Betrachte nun den Nachbarn  $v_2$  von  $v_1$  auf  $Z$  in die Richtung, in der  $v_{1,e}$  liegt. Ist er löschar, so sind wir fertig, ansonsten gibt es wieder eine ungefärbte Kante, die  $v_2$  mit einem anderen Knoten  $v_{2,e} \in V(Z)$  verbindet usw.

Da sich die Kanten nicht überschneiden dürfen (planare Einbettung), nimmt der Abstand von  $v_i$  und  $v_{i,e}$  auf  $Z$  bei jedem Schritt echt ab. Da in  $G$  aber keine Doppelkanten existieren und somit zwei Nachbarn in  $Z$  nicht durch eine Nichtzykelkante verbunden sein können, muss dieses Verfahren abbrechen, womit ein löscharer Knoten auf  $Z$  gefunden ist.

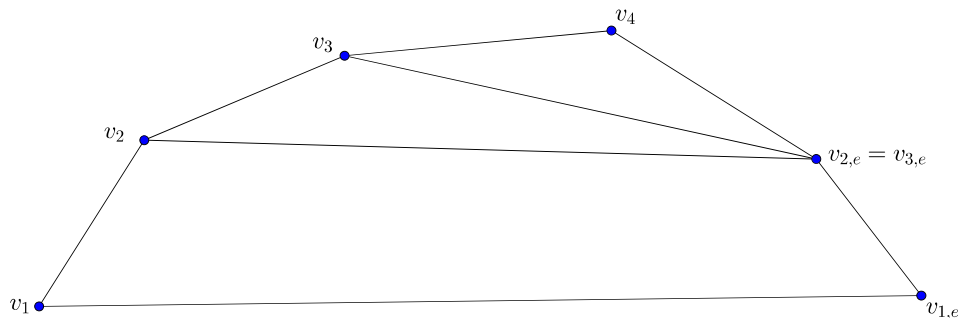


Abbildung 4.3: Veranschaulichung des Beweises der Existenz eines löscharen Knotens.

Wir beweisen nun induktiv die oben genannte Aussagen:

Induktionsanfang: Offensichtlich ist  $Z_0$  ein Kreis in  $G$ . Die einzigen Kanten oberhalb von  $Z_0$  (bis auf die Randkanten des äußeren Gebiets) sind die zu  $a_1$  inzidenten Kanten und damit zu Beginn der while-Schleife rot gefärbt und zu  $a_1$  hin orientiert. Unterhalb von  $Z_0$  wurden keine Operationen vorgenommen, d.h. diese Kanten sind weder orientiert noch gefärbt.

Induktionsannahme: Sofern die while-Schleife mindestens  $i - 1$  mal durchlaufen wird, ist der Inhalt der ersten  $i - 1$  while-Schleifen-Durchläufe durchführbar, und nach dem  $i - 1$ -ten Durchlauf



der Schleife sind obige Aussagen 1-4 erfüllt.

Induktionsschritt: Es gelte nach dem  $i - 1$ -ten Durchlauf der while-Schleife:  $V(Z) \neq \{a_2, a_3\}$ . Damit wird die while-Schleife mindestens  $i$  mal durchlaufen. Es bleibt also zu zeigen, dass deren Inhalt auch durchführbar ist, und nach dem Durchlauf die Aussagen 1-4 erfüllt sind.

Da dies gemäß Annahme vor dem Durchlauf der Fall ist, folgt mit oben Gezeigtem, dass es einen löschbaren Knoten auf  $Z$  gibt. Folglich ist die Wahl solch eines Knotens (hier  $v$  genannt) durchführbar. Natürlich ist die Orientierung und Färbung der beiden zu  $v$  inzidenten Kanten auf  $Z$  ebenfalls durchführbar, dasselbe gilt für den nächsten Schritt.

Im letzten Schritt wird der Knoten  $v$  aus  $Z$  entfernt und um die Nachbarn von  $v$  innerhalb von  $Z$  erweitert. Da  $G$  trianguliert ist und  $v$  so gewählt war, dass er mit keinem Zykelknoten durch eine ungefärbte Nichtzykelkante verbunden ist, folgt sofort, dass  $Z$  nach der Operation weiterhin ein Zykel ist.

Damit sind alle im  $i$ -ten Durchlauf auftretenden Operationen durchführbar und 1. nach dem Durchlauf erfüllt. Die einzigen Kanten, die durch die Änderung an  $Z$  die Seite bzgl.  $Z$  wechseln, sind die beiden alten zu  $v$  inzidenten Zykelkanten und die alten zu  $v$  inzidenten ungefärbten Kanten innerhalb des alten Zyklus. Gerade diese werden aber in den Schritten davor gefärbt, sodass auch 2. nach dem  $i$ -ten Schleifendurchlauf gültig ist. Da sich die Menge der Kanten und Knoten oberhalb des Zyklus durch die Modifikation des Zyklus vergrößert und deren Orientierung und Färbung nicht verändert wird, gilt gemäß Induktionsannahme (3.) nach dem Schleifendurchlauf (S1) für alle inneren Knoten oberhalb des alten Zyklus, d.h. alle oberhalb des Zyklus bis auf  $v$ .

Es bleibt also (S1) für  $v$  zu zeigen: Laut Orientierung und Färbung der zu  $v$  inzidenten zuvor ungefärbten Kanten und laut Induktionsannahme (4.) haben die zu  $v$  inzidenten Kanten nach dem Schleifendurchlauf folgende Färbung und Orientierung:

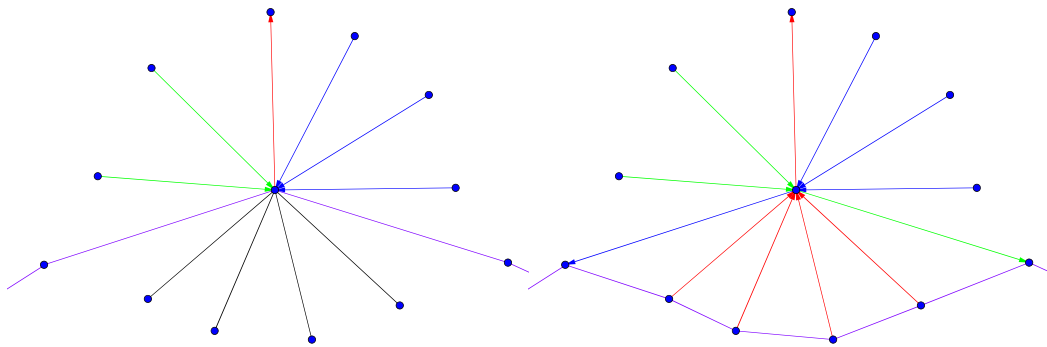


Abbildung 4.4: Situation am zu löschenden Knoten vor und nach dem Löschen. Der Zykel  $Z$  ist violett gezeichnet.

Diese entspricht offensichtlich der Regel (S1). Somit gilt (S1) für alle inneren Knoten überhalb von  $Z$ , und da an der Färbung und Orientierung der zu  $a_1$  inzidenten Kanten nichts geändert wird, gilt auch weiterhin (S2) bei  $a_1$ , womit auch 3. nach dem Schleifendurchlauf erfüllt ist.

Es bleibt also 4. zu zeigen. Dass die beschriebene Eigenschaft für alle Knoten aus dem alten

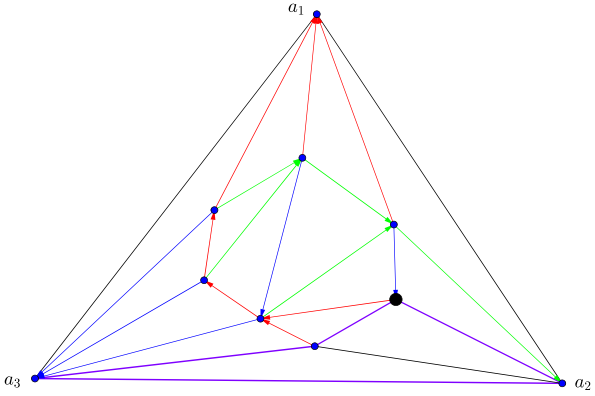
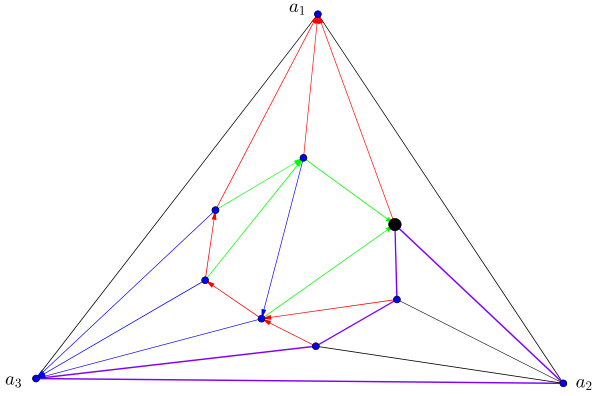
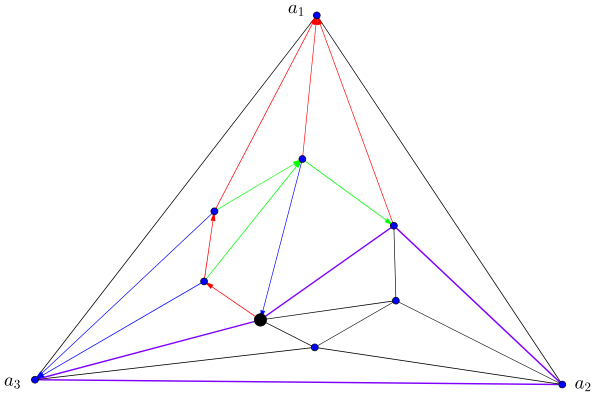
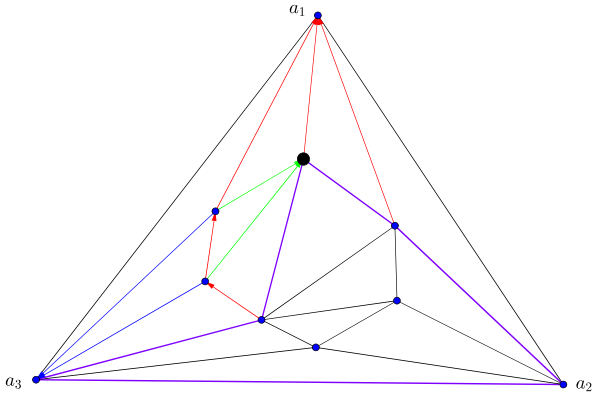
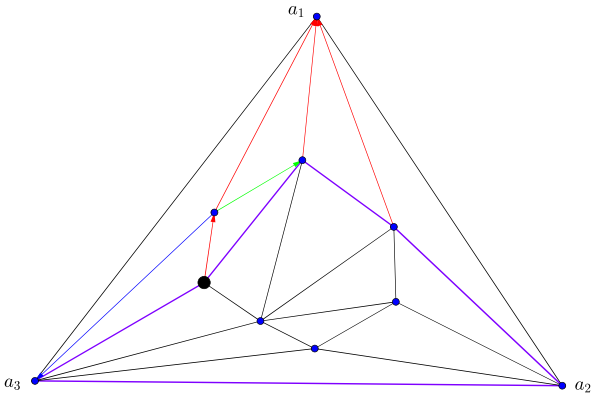
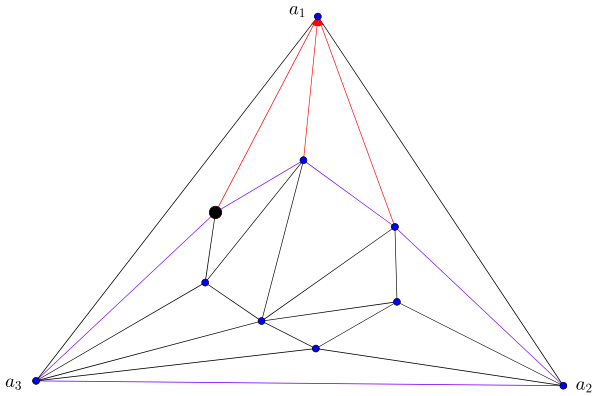
## 4.2. EXISTENZ UND KONSTRUKTION

Zykel (bis auf  $v$  und dessen ehemalige Zykelnachbarn) korrekt ist, folgt wieder sofort aus der Induktionsannahme (da für diese Knoten keine Änderungen an den inzidenten Kanten vorgenommen wurden). Es muss also noch die Aussage für die neu in den Zykel aufgenommenen Knoten und die ehemaligen Zykelnachbarn von  $v$  gezeigt werden. Erstere besitzen nach dem Schleifendurchlauf nur eine inzidente gefärbte Kante, nämlich eine rote zu  $v$  führende. Für diese Knoten ist 4. also ebenfalls erfüllt. Letztere erhalten nur jeweils eine inzidente gefärbte Kante hinzu, der linke ehemalige Nachbar (gemäß Algorithmus) eine blaue einlaufende am (im Uhrzeigersinn) Ende des Intervalls an blauen einlaufenden Kanten, der rechte am Anfang seines Intervalls an einlaufenden grünen Kanten. Offensichtlich ist damit und wegen der Induktionsannahme 4. auch an diesen Knoten erfüllt, womit der Induktionsschritt gezeigt ist.

Somit folgt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass der Algorithmus durchführbar ist (abgesehen von evtl. auftretender Unendlichkeit). Außerdem folgt: Bricht der Algorithmus ab, so gelten nach dessen Abarbeitung die Aussagen 1-4. Da dann unmittelbar vor Ende die while-Bedingung zu `false` ausgewertet wurde, muss zudem  $V(Z) = \{a_2, a_3\}$  gelten. Mit 2. folgt dann, dass alle inneren Kanten der Triangulation gefärbt und orientiert sind und mit 3., dass der so orientierte und gefärbte Graph die Schnyder wood-Eigenschaft (S1) und bei  $a_1$  auch (S2) erfüllt. Darüber hinaus gilt (S2) auch bei den äußeren Knoten  $a_2, a_3$ : Die zu diesen inzidenten Kanten müssen bei Beendigung des Verfahrens ebenfalls gefärbt worden sein. Dies kann bei solch einer Kante aber offensichtlich nur dann geschehen, wenn der zugehörige zum jeweiligen äußeren Knoten adjazente Knoten gerade aus dem Zykel gelöscht wird. Aufgrund der Lage des Zyklus befinden sich die Kanten dann entweder ganz links oder ganz rechts im Zyklus, erhalten also gemäß Algorithmus tatsächlich die Farbe Grün bei  $a_2$  sowie Rot bei  $a_3$ , und die Kanten werden jeweils zum äußeren Knoten hin orientiert. Folglich ist bei Abbruch des Algorithmus (S2) auch bei diesen Knoten erfüllt und die konstruierte Färbung ein Schnyder wood.

Es bleibt also zu zeigen, dass der Algorithmus endlich ist.

*Endlichkeit.* Es ist zu zeigen, dass die while-Schleife abbricht. Mit jedem Schleifendurchlauf erhöht sich wie oben gezeigt die Zahl der Knoten, für die alle inzidenten Kanten orientiert und gefärbt sind, um mindestens 1. Da es aber nur  $|V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3\}| = n - 3 \leq n = \mathcal{O}(n)$  innere Knoten gibt, ist der Algorithmus endlich und damit korrekt, insbesondere liegt die Zahl an while-Schleifendurchläufen in  $\mathcal{O}(n)$ . □



## 4.2. EXISTENZ UND KONSTRUKTION

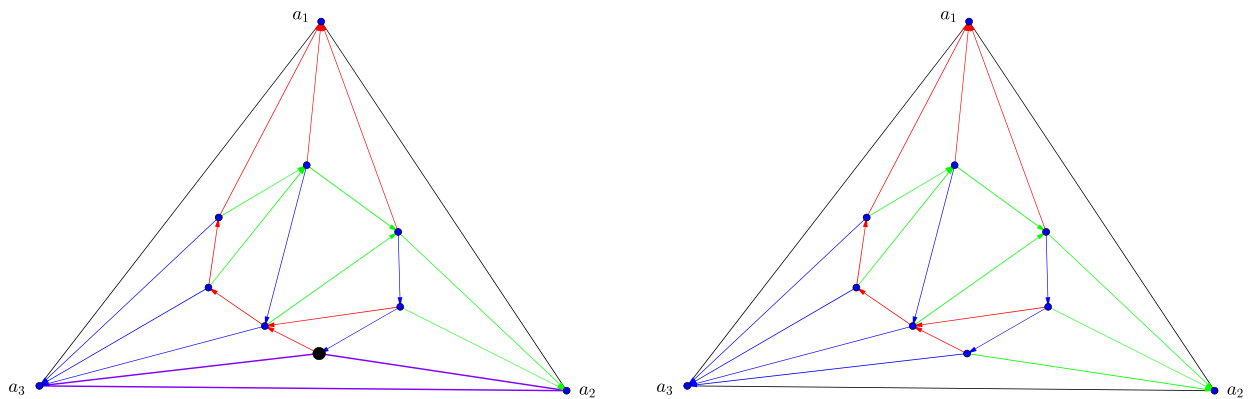


Abbildung 4.5: Veranschaulichung von Algorithmus 4.2.2. Der jeweils als nächstes zu löschende Knoten ist dick gezeichnet, der Zykel  $Z$  violett markiert.

Zuletzt wollen wir noch zeigen, dass bei obigem Algorithmus durch geeignete Wahl der zu löschenden Knoten jeder Schnyder wood auf dem gegebenen Graphen  $G$  konstruiert werden kann, was bspw. in [Bre00] gezeigt wurde. Brehm führte dabei Algorithmus 4.2.2 auf ein analoges von Walter Schnyder (dem Begründer der Schnyder wood-Theorie) entwickeltes Verfahren zurück, und übertrug die Aussage, die Schnyder für sein Verfahren bereits beweisen hatte, auf den hier besprochenen Algorithmus. Wir wollen einen Beweis direkt anhand des Algorithmus führen. Daraus erhalten wir als unmittelbare Folgerung, dass eine Bijektion zwischen Schnyder woods und 3-Orientierungen auf  $G$  besteht.

**Satz 4.2.3** ([Bre00], [Ruc11]). *Gegeben sei eine planare Triangulation mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$  und ein Schnyder wood  $S$  auf dieser. Dann lassen sich bei Anwendung von Algorithmus 4.2.2 die zu löschenden Knoten so auswählen, dass der konstruierte Schnyder wood gerade  $S$  ist. Insbesondere ist die Abbildung, die einem Schnyder wood die induzierte 3-Orientierung auf  $G$  zuordnet, bijektiv.*

*Beweis.* Dass die Färbung und Orientierung der Kanten bei Initialisierung von  $Z$  vor der while-Schleife in Algorithmus 4.2.2 mit  $S$  übereinstimmt, folgt sofort aus (S2), da alle zu  $a_1$  inzidenten inneren Kanten zu  $a_1$  hin orientiert und gefärbt sind.

Daher genügt es zu zeigen, dass es möglich ist, die zu löschenden Knoten in Algorithmus 4.2.2 so auszuwählen, dass bei Löschen der jeweiligen Knoten die neu gefärbten und orientierten Kanten gemäß  $S$  orientiert und gefärbt werden, sofern die konstruierte Färbung und Orientierung oberhalb des Zyklus bereits mit  $S$  übereinstimmt. Wir wählen die Knoten nun wie folgt aus:

*Wähle einen inneren Knoten  $v$  auf dem aktuellen Zykel, dessen beide Zykelrandkanten in  $S$  von  $v$  auslaufen.*

Zunächst existiert immer ein solcher Knoten: Es gibt exakt eine innere zu  $a_2$  inzidente Zykel-

randkante, und diese ist in  $S$  zu  $a_2$  hin orientiert. Wir betrachten den Startknoten dieser Kante. Ist die nächste Zykelkante von diesem weg orientiert, so ist ein gewünschter Knoten gefunden, ansonsten betrachten wir den Endknoten der nächsten Kante usw. Das Verfahren muss abbrechen, da sonst auch die innere zu  $a_3$  inzidente Zykelkante von  $a_3$  weg orientiert wäre, im Widerspruch zu den Eigenschaften eines Schnyder woods.

Es bleibt also zu zeigen, dass solch ein Knoten auch tatsächlich löschtbar ist. Dazu versetzen wir uns in die Situation des Induktionsschritts beim Beweis der Korrektheit von 4.2.2, insbesondere nehmen wir an, dass oberhalb des Zyklus der konstruierte Schnyder wood mit  $S$  übereinstimmt. Angenommen, ein solcher Knoten  $v$  wäre nicht löschtbar. Dann gibt es eine ungefärbte Kante, die  $v$  mit einem anderen Zykelknoten verbindet. Diese Kante und die zwischen Start- und Endknoten der Kante liegenden Zykelkanten bilden also einen Kreis, der zusammen mit seinem Inneren eine Triangulierung definiert. Sei  $m$  die Zahl der Knoten dieser Subtriangulierung und  $k$  die Anzahl der Knoten auf dem Rand bzw. der Zykelknoten von Start- bis Endknoten. Die Zahl der Kanten dieser Triangulierung ist dann (da es sich um eine  $k$ -Triangulierung mit  $m$  Knoten handelt)  $3m - k - 3$ . Laut Induktionsannahme besitzt jeder Knoten zwischen  $v$  und dem Endknoten der ungefärbten Kante exakt eine rot gefärbte auslaufende Kante, die auch in  $S$  auslaufend ist (laut Annahme), und die beiden anderen aus dem jeweiligen Knoten auslaufenden Kanten liegen entweder auf dem Zykel oder zeigen in ihn hinein.

Da aber eine der zu  $v$  inzidenten Kanten aus der Subtriangulierung aus  $v$  ausläuft, überlegt man sich leicht (siehe beispielhaft in der folgenden Abbildung), dass von diesen  $k - 2$  Knoten aus mindestens  $k - 2$  Kanten in die Subtriangulierung hinein zeigen.

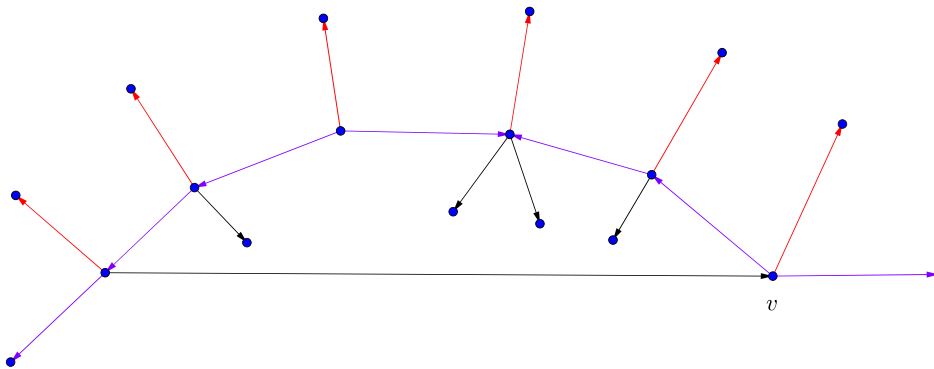


Abbildung 4.6: Veranschaulichung des Arguments zur Löschtbarkeit des gewählten Knotens. Der Zykel  $Z$  ist violett markiert.

Gleichzeitig besitzt jeder innere Knoten der Subtriangulierung bzgl.  $S$  3 auslaufende Kanten, und

## 4.2. EXISTENZ UND KONSTRUKTION

auf dem Rand der Triangulierung liegen  $k$  auslaufende Kanten. Da jede Kante bzgl.  $S$  aus genau einem Knoten, nämlich dem Startknoten ausläuft, ist die Zahl der Kanten der Triangulierung mindestens  $k - 2 + 3(m - k) + k = 3m - k - 2 > 3m - k - 3$ , ein Widerspruch, es folgt also, dass diese Wahl tatsächlich immer möglich ist. Gemäß Algorithmus 4.2.2 ist die konstruierte Orientierung und Färbung auch oberhalb des neuen Zyklus mit der in  $S$  identisch, womit der gewählte Knoten  $v$  löscher ist. Laut Algorithmus stimmt die Orientierung und Färbung der neu gefärbten Kanten um  $v$  tatsächlich mit der aus  $S$  überein, da insbesondere die aus dem Innern des Zyklus mit  $v$  inzidierenden Kanten auch in  $S$  einlaufend und rot sein müssen, da bereits die beiden inzidenten Zykelrandkanten sowie die eine rote aus der Zykel-Region hinaus zeigende Kante zusammen 3 von  $v$  auslaufende Kanten bilden. Induktiv folgt also, dass es durch die angegebene Wahl der zu löschenden Knoten möglich ist, mit dem Algorithmus die vorgegebene 3-Orientierung  $D$  zu einem Schnyder wood zu färben, und das ist die (erste) Behauptung.

Wir bemerken zudem, dass wir bei obiger Auswahl der zu löschenden Knoten nur die dem Schnyder wood zugrundeliegende 3-Orientierung ausgenutzt haben. Daraus folgt insbesondere, dass zwei Schnyder woods auf  $G$  mit derselben zugrundeliegenden 3-Orientierung identisch sind.

Wir definieren nun eine Abbildung  $f$  dadurch, dass sie einer 3-Orientierung  $D$  auf  $G$  gemäß obigem Verfahren einen Schnyder wood  $S$  auf  $G$  mit  $D$  als zugrundeliegende Orientierung zuordnet. Nach dem eben Überlegten ist dieser eindeutig bestimmt (insbesondere unabhängig von der Wahl der zu löschenden Knoten, sofern die im Beweis angegebene Regel verwendet wird). Da wir mit diesem Verfahren nur in Abhängigkeit der zugrundeliegenden 3-Orientierung eines Schnyder woods diesen konstruieren konnten, ist  $f$  surjektiv, sowie offensichtlich injektiv (gleiche Schnyder woods induzieren gleiche 3-Orientierungen). Folglich liefert  $f$  eine behauptete Bijektion zwischen 3-Orientierungen und Schnyder woods und ist insbesondere die Inverse der im Satz angegebenen Abbildung.  $\square$

## Kapitel 5

# Allgemeine Dreieckskontaktdarstellungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Existenz und Konstruktion von allgemeinen Dreieckskontaktdarstellungen für beliebige planare Graphen.

**Definition 5.0.4.** Eine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung ist (hier) eine Kontaktdarstellung eines planar eingebetteten Graphen, wobei die Knoten des Graphen durch nichtverschwindende Dreiecke ersetzt werden. Eine Dreieckskontaktdarstellung heißt rein, wenn es keine Kontakte der Form Ecke-Ecke gibt.

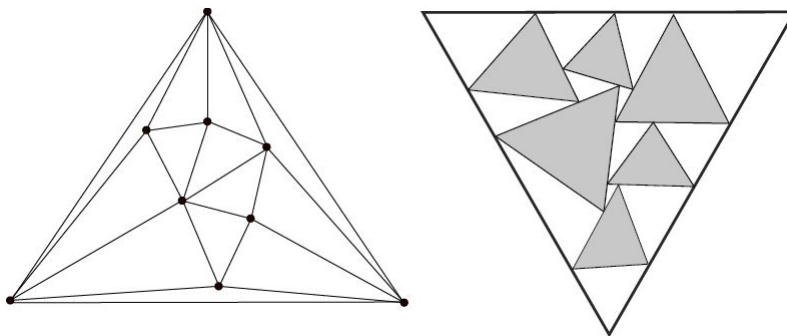


Abbildung 5.1: Eine reine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung des links aufgeführten triangulierten Graphen.<sup>1</sup>

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, ist bekannt, dass jede planare Einbettung eines planaren Graphen eine reine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung besitzt. Dies werden wir hier zeigen und darüber hinaus, dass von diesen Kontaktdarstellungen noch zusätzliche Eigenschaften verlangt werden können. Zunächst stellen wir aber einen den Überlegungen in der Bachelorarbeit zugrundeliegenden Zusammenhang zwischen Dreieckskontaktdarstellungen und Schnyder woods auf 3-triangulierten planaren Graphen her.

---

<sup>1</sup>Aus: [Ruc11], S.7

**Proposition 5.0.5** ([Fel10c], [Ruc11]). *Jede allgemeine Dreieckskontaktdarstellung einer planaren Triangulation induziert einen Schnyder wood auf dieser.*

*Beweis.* Man setze bei der gegebenen Dreieckskontaktdarstellung die Knoten des Graphen auf die Mittelpunkte der zugehörigen Dreiecke. Man verbinde zwei Knoten genau dann miteinander, wenn sich die zugehörigen Dreiecke berühren. Für zwei in der Triangulation adjazente Knoten  $u, v$  orientiere man die zugehörige Kante im Schnyder wood von  $u$  nach  $v$ , falls die Ecke des zu  $u$  gehörigen Dreiecks auf eine Kante des zu  $v$  gehörigen Dreiecks stößt und umgekehrt. Man betrachte die Dreiecke, die die zum äußeren Knoten  $a_1$  gehörige Randkante berühren und färbe die den Kontakten entsprechenden Kanten zwischen den zugehörigen inneren Knoten und  $a_1$  rot und orientiere sie zu  $a_1$  hin. Für jedes dieser Dreiecke betrachte man die zwei restlichen Ecken des Dreiecks und färbe die zu den entsprechenden Kontakten gehörigen Kanten blau bei der linken und grün bei der rechten Ecke. Dies führe man analog fort. Da jedes Dreieck drei Ecken besitzt, erhält man auf diese Weise offensichtlich einen Schnyder wood auf der zugrundeliegenden planaren Triangulation.

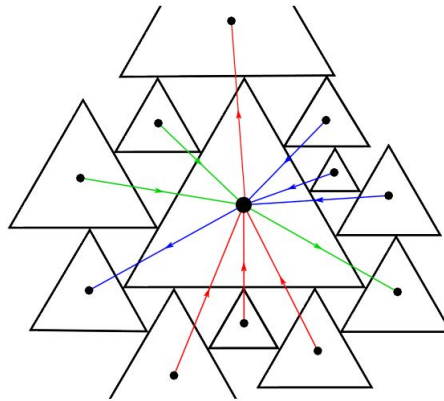


Abbildung 5.2: Konstruktion des zu einer Dreieckskontaktdarstellung gehörigen Schnyder woods lokal an einem Dreieck, beispielhaft für Dreiecke mit parallelen Kanten. <sup>2</sup> □

Nun folgt das bereits angesprochene Resultat für die Existenz von Dreieckskontaktdarstellungen. Dieses stammt ursprünglich aus [dFdMR94], und wurde dort mit einem zu den Schnyder woods und geordneten Spannbäumen äquivalenten Konzept bewiesen. Der im Folgenden angegebene Beweis wurde in ähnlicher Form in [Ruc11] geführt.

**Satz 5.0.6** ([dFdMR94], [Ruc11]). *Zu jedem Schnyder wood  $S$  auf einer planaren Triangulation gibt es eine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung, die  $S$  induziert und für welche gilt:*

1. *Die Kontaktdarstellung ist rein.*
2. *Die Dreiecke besitzen parallele Grundseiten.*

---

<sup>2</sup>Aus: [Ruc11], S.27.



Der Beweis wird weiter unten geführt. Um diesen vorzubereiten, verwenden wir das Konzept der in den Definitionen eingeführten geordneten Spannbäume und zeigen, dass Schnyder woods solche induzieren.

**Lemma 5.0.7** ([Ruc11]). *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einer planaren Triangulation mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$  und sei  $v$  ein beliebiger innerer Knoten sowie  $P_i(v)$  die in  $v$  startenden balancierten Pfade in der Farbe  $i = 1, 2, 3$ . Dann haben  $P_1(v), P_2(v), P_3(v)$  nur den Knoten  $v$  gemeinsam.*

*Beweis.* Wir zeigen  $V(P_1(v)) \cap V(P_2(v)) = \{v\}$ , für die anderen Farbenpaare ergibt sich dies aus Symmetriegründen. Angenommen also,  $P_1(v)$  und  $P_2(v)$  hätten neben  $v$  noch weitere Knoten gemeinsam. Sei  $w$  der nächste bei  $v$  liegende dieser Knoten. Dann bilden  $v, w$  und die entsprechenden Teilstücke der Pfade einen Kreis in  $S$ . Aufgrund der Eigenschaften eines Schnyder woods lokal an einem Knoten muss dann die auslaufende Kante von  $w$  in Farbe Blau in den Kreis hinein zeigen. Gemäß Satz 4.1.1 muss dann aber  $P_3(w)$  einen Schnittpunkt mit dem Kreis haben (da der Pfad den Kreis irgendwann verlassen muss), der dann mit einem der beiden anderen Teilpfade einen gerichteten zweifarbenen Kreis in  $S$  ergibt, ein Widerspruch zu Satz 4.1.1.

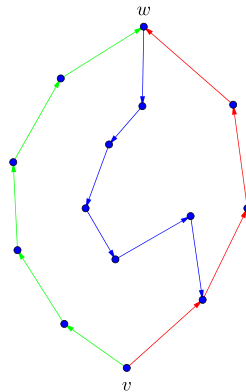


Abbildung 5.3: Veranschaulichung der Beweisidee.

□

**Satz 5.0.8** ([Ruc11]). *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einem 3-triangulierten planaren Graphen  $G$ . Dann sind die gerichteten Wurzelbäume, die durch Betrachtung der Kanten von ausschließlich einer Farbe aus  $S$  entstehen (siehe Satz 4.1.1), darüber hinaus geordnete Spannbäume.*

*Beweis.* Wir betrachten den gemäß Satz 4.1.1 in  $a_1$  wurzelnden In-Baum  $T_1$  in Farbe Rot. Die Behauptung für die restlichen Bäume  $T_2, T_3$  erhält man daraus durch entsprechende Umbenennung der Farben. Sei  $v_1, \dots, v_n$  (mit  $n = |V(G)|$ ) die Präordnung von  $T_1$  (im Gegenuhrzeigersinn). Wir werden diese Wurzelbäume im Folgenden als roten, grünen bzw. blauen Baum bezeichnen. Für die anderen Farben verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Knoten  $v_i \in V(G) = V(T_1), i = 1, \dots, n$  seien die Blöcke  $B_1(v_i), B_2(v_i), B_3(v_i), B_4(v_i)$  um  $v_i$  im Gegenuhrzeigersinn definiert durch den Vater von  $v_i$  in  $T_1$  bzw. die Kinder von  $v_i$  im grünen Baum

zusammen mit dem Vater von  $v_i$  im blauen Baum,  $B_3(v_i)$  enthält die Kinder von  $v$  im roten Baum und  $B_4(v_i)$  die Kinder von  $v_i$  im blauen Baum sowie den grünen Vater von  $v_i$ . Aus der Definition eines Schnyder woods folgt sofort, dass  $B_j(v_i), j = 1, 2, 3, 4$  tatsächlich Blöcke im Gegenuhrzeigersinn um  $v_i$  bilden.

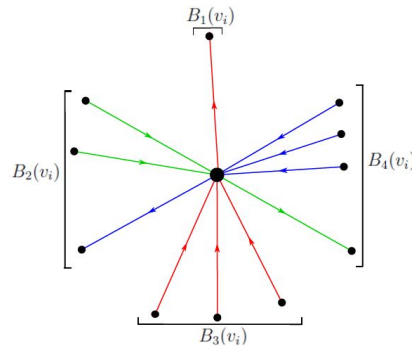


Abbildung 5.4: Blöcke lokal um einen inneren Knoten. <sup>3</sup>

Es bleibt also zu zeigen, dass die so definierten Blöcke auch tatsächlich denen aus der Definition der geordneten Spannbäume entsprechen, d.h. dass gilt:

Alle Knoten aus  $B_2(v_i)$  oder  $B_4(v_i)$  sind nicht verwandt mit  $v_i$ , und für jeden Knoten  $v_j \in B_2(v_i)$  gilt  $j < i$ , aus  $v_j \in B_4(v_i)$  folgt  $j > i$ .

Es genügt, diese Aussagen für  $B_2(v_i)$  zu zeigen, die Aussagen für  $B_4(v_i)$  erhält man daraus durch "Spiegelung" des Schnyder woods unter gleichzeitiger Vertauschung der Farben Grün und Blau.

Angenommen also, ein Knoten  $v_j \in B_2(v_i)$  wäre mit  $v_i$  verwandt. Somit muss es einen balancierten roten Pfad von  $v_i$  zu  $v_j$  geben oder umgekehrt. Ist  $v_j$  der blaue Vorgänger von  $v_i$ , so erhält man in beiden Fällen zwei balancierte Pfade in den Farben Blau, Rot, die mehr als einen Knoten gemeinsam haben, im Widerspruch zu Lemma 5.0.7, oder einen gerichteten Kreis mit nur zwei Farben im Widerspruch zu Satz 4.1.1. Ist  $v_j$  dagegen ein Kind von  $v_i$  im grünen Baum, so erhält man ganz analog einen Widerspruch zu Lemma 5.0.7 bzw. Satz 4.1.1. Folglich gilt die erste oben behauptete Aussage.

Angenommen, es wäre  $j > i$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $v_j = \text{par}_b(v_i)$ . Dann gibt es einen gemeinsamen Vorfahr von  $v_j, v_i$  in  $T_1$  mit maximaler Nummerierung bzgl. der Präordnung. Wegen  $j > i$  läge dann der  $v_i$  enthaltende Teilbaum links von dem  $v_j$  enthaltenden. Da  $v_j, v_i$  insbesondere durch eine Kante verbunden sind, erhält man einen Kreis  $C$  in  $S$ . Gemäß (S1) zeigt

<sup>3</sup>Aus: [Ruc11], S.16

die in  $v_j$  startende blaue Kante in  $C$  hinein. Aufgrund von Lemma 5.0.7 und Lemma 4.1.1 kann der dadurch induzierte balancierte Pfad allerdings keinen Knoten aus  $C$  enthalten, da dies in jedem Fall zwei balancierte Pfade mit mindestens zwei gemeinsamen Knoten induzieren würde, oder aber einen gerichteten Kreis nur in Farbe Blau, wie man sich leicht an den unten folgenden Abbildungen klar macht. Dies widerspricht aber wiederum der Aussage aus 4.1.1, dass der Pfad den Kreis irgendwann verlassen muss, um  $a_3$  zu erreichen. Somit muss  $j < i$  gelten. Im Fall, dass  $v_j$  ein Kind von  $v_i$  im grünen Baum ist, folgt die Behauptung analog durch Betrachtung des Pfades, der durch die in  $v_i$  startende grüne Kante erzeugt wird.

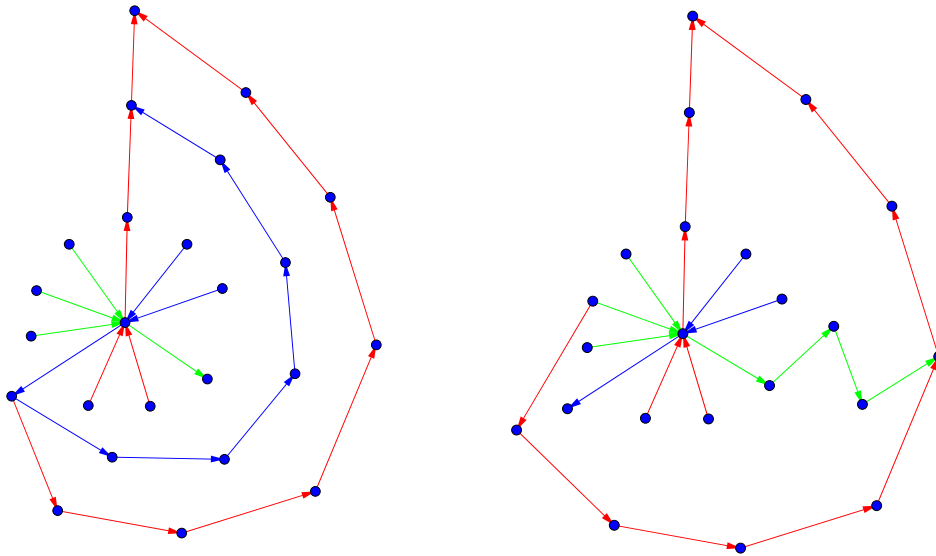


Abbildung 5.5: Die zwei betrachteten Fälle im Widerspruchsbeweis.

□

Somit induzieren Schnyder woods geordnete Spannbäume. Diese verwenden wir nun, um Aussagen über die Beziehungen zwischen den Nummerierungen in Präordnung bzgl. der verschiedenen Bäume zu gewinnen. Diese werden wir zur Konstruktion der Kontaktdarstellung für den Beweis von Satz 5.0.6 benötigen.

**Lemma 5.0.9.** *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einer planaren Triangulation  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$ . Dann gilt für alle inneren Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ :*

(i)  $\text{num}_b(\text{par}_b(v)) < \text{num}_b(v), \text{num}_b(\text{par}_g(v)) < \text{num}_b(v), \text{num}_b(\text{par}_r(v)) > \text{num}_b(v)$ .

(ii)  $\text{num}_b(\text{par}_r(\text{par}_b(v))) > \text{num}_b(v), \text{num}_b(\text{par}_r(\text{par}_g(v))) > \text{num}_b(v)$ .

*Beweis.*

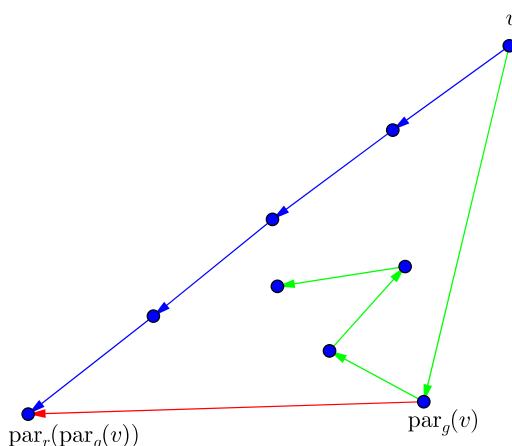
(i) Dies folgt sofort aus Satz 5.0.8, da bzgl. des blauen Baumes gilt:  $\text{par}_b(v) \in B_1(v)$ ,  $\text{par}_g(v) \in B_2(v)$ ,  $\text{par}_r(v) \in B_4(v)$ .

(ii) Nach (i) gilt zunächst für alle inneren Knoten  $w$ , dass  $\text{num}_b(\text{par}_r(w)) > \text{num}_b(w)$ . Damit folgt für  $v$ :  $\text{num}_b(\text{par}_r(\text{par}_b(v))) \geq \text{num}_b(\text{par}_b(v)) + 1 = \text{num}_b(\text{par}_b(v) + 1)$ . Dabei bezeichnet  $\text{par}_b(v) + 1$  den Knoten, der am weitesten in Uhrzeigersinn-Richtung innerhalb des Blocks  $B_3(\text{par}_b(v))$  um  $\text{par}_b(v)$  liegt. Angenommen nun, es wäre  $\text{num}_b(\text{par}_r(\text{par}_b(v))) \leq \text{num}_b(v)$ . Dann folgt  $\text{num}_b(\text{par}_r(\text{par}_b(v))) \in \{\text{num}_b(\text{par}_b(v)) + 1, \dots, \text{num}_b(v)\}$  und damit  $\text{par}_r(\text{par}_b(v)) \in B_3(\text{par}_b(v))$ , was ein offensichtlicher Widerspruch ist.

Für die zweite Aussage verwenden wir erneut die Aussage, dass  $T_3$  ein geordneter Spannbaum ist. Wäre das Gegenteil der Behauptung richtig, so müsste  $\text{par}_r(\text{par}_g(v))$ , da die Abbildung  $\text{num}_b$  injektiv ist, entweder auf dem blauen balancierten Pfad von  $v$  zu  $a_3$  liegen (erste folgende Abbildung) oder auf einem weiter rechts liegenden Weg (zweite Abbildung).

Im ersten Fall stellt man fest, dass man einen (siehe untere Abbildung) Kreis erhält. Gemäß (S1) muss die in  $\text{par}_g(v)$  startende grüne auslaufende Kante in den Kreis hineinzeigen. Der dadurch induzierte balancierte Pfad muss diesen wieder an einem Randknoten verlassen. Dies ist aber an keinem der Knoten gemäß der Schnyder wood-Regel (S1) möglich, wie man leicht verifiziert, ein Widerspruch.

Im zweiten Fall erhält man ebenfalls einen Kreis im Schnyder wood. Hier stellt man gemäß (S1) fest, dass die in  $\text{par}_r(\text{par}_g(v))$  startende grüne ausgehende Kante in den Kreis hineinzeigt und der dadurch induzierte Pfad den Kreis an einem Knoten verlassen muss. Mit (S1) ist dies nur bei einem Knoten auf dem rechten der beiden Pfade in  $T_3$  möglich. Folglich erhalten wir zwei balancierte Pfade in den Farben Grün und Blau, die mindestens zwei Knoten gemeinsam haben. Dies steht im Widerspruch zu Lemma 5.0.7.



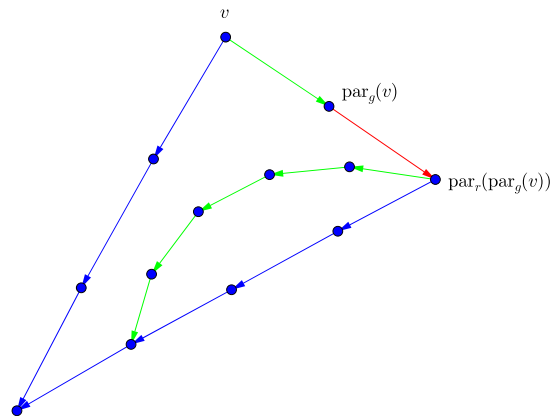


Abbildung 5.6: Illustration der Argumente im Beweis.

□

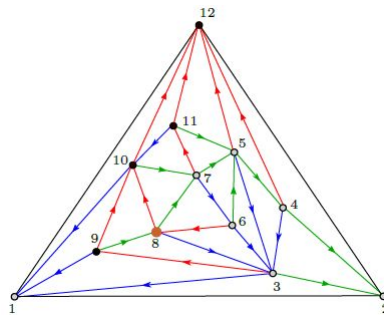


Abbildung 5.7: Aussage von Lemma 5.0.9<sup>4</sup>

Wir sind nun bereit, den Beweis von Satz 5.0.6 zu führen.

*Beweis (von Satz 5.0.6), vgl. [Ruc11].* Gegeben sei der planar eingebettete 3-triangulierte Graph  $G$  mit Schnyder wood  $S$  und Außengebiet  $a_1a_2a_3$ . Wir betrachten die Nummerierung der inneren Knoten  $v_1, \dots, v_n$  mit  $n = |V(G)|$  bzgl. der Präordnung im Gegenuhrzeigersinn des blauen durch  $S$  induzierten Baumes. In dieser Reihenfolge werden wir die den Knoten entsprechenden Dreiecke in der Kontaktdarstellung zeichnen.

Allgemein werden alle Dreiecke mit der Grundseite parallel zur  $x$ -Achse gezeichnet. Zunächst legen wir die  $x$ -Koordinate der rechten Spitze des zu  $a_3$  und der linken des zu  $a_2$  gehörigen Dreiecks fest, wobei diese auf der Höhe  $2 = \text{num}_b(a_2)$  oberhalb der  $x$ -Achse gezeichnet

<sup>4</sup>Aus [Ruc11], S. 20.

wird. Nun zeichnen wir nacheinander die zu  $v_k, k = 2, \dots, n$  gehörigen Dreiecke. Für all diese gilt, dass ihre Grundseite auf Höhe  $k$  und ihre Spitze auf der Höhe  $\text{num}_b(\text{par}_r(v_k))$  gezeichnet wird. Dabei sei bemerkt, dass aufgrund der oben gezeigten geordneten-Spannbaum-Struktur lokal an einem Knoten auch tatsächlich  $\text{num}_b(\text{par}_r(v_k)) > k = \text{num}_b(v_k)$  gilt, d.h. die Höhe der Dreiecksspitze wird größer als die der Grundseite festgelegt.

Da der blaue Baum nach Satz 4.1.1 einen geordneten Spannbaum induziert, sind beim Zeichnen des zu  $v_i$  gehörigen Dreiecks bereits alle Dreiecke aus  $B_1(v_i), B_2(v_i)$  gezeichnet und bilden ein Intervall um  $v_i, i = 2, \dots, n - 3$ . Insbesondere sind also  $\text{par}_g(v_i), \text{par}_b(v_i)$  bereits gezeichnet.

Angenommen nun, für  $i \in \{2, \dots, n - 3\}$  seien die zu  $v_j, j = 1, \dots, i - 1$  gehörigen Dreiecke bereits gezeichnet, und diese erfüllten bereits die durch den Schnyder wood induzierten Kontakte.

Seien  $x_g, x_b$  die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte von  $y = i$  mit der rechten Seite von  $\text{par}_g(v_i)$  bzw. der linken von  $\text{par}_b(v_i)$ . Diese existieren, da die Grundseiten der zugehörigen Dreiecke unterhalb von  $y = i$  liegen, da gemäß den Eigenschaften eines geordneten Spannbaums  $\text{num}_b(\text{par}_b(v_i)), \text{num}_b(\text{par}_g(v_i)) < i$  gilt, und deren Spitzen oberhalb von  $y = i$  liegen, wie sofort aus Lemma 5.0.9, (i) bzw. (ii) folgt.

Wir wählen nun einen beliebigen Faktor  $\lambda_i \in [0, 1]$  und legen die  $x$ -Koordinaten des Dreiecks als  $x_b, x_g$  sowie  $\lambda_i x_b + (1 - \lambda_i) x_g$  fest. Da alle roten Kinder von  $v_i$  in  $B_2(v_i)$  liegen und damit bereits gezeichnet sind, gilt wegen  $\text{par}_r(v) = v_i$  für jeden solchen Knoten  $v$ , dass die Spitze des zugehörigen Dreiecks die Höhe  $i$  hat. Da die Kontakte gemäß dem Schnyder wood nach Annahme für diese untereinander und in Bezug auf die zu  $\text{par}_g(v_i), \text{par}_b(v_i)$  gehörigen Dreiecke aber erfüllt sind, befinden sich diese "zwischen"  $\text{par}_g(v_i), \text{par}_b(v_i)$  und müssen damit an die Grundseite des  $v_i$  repräsentierenden Dreiecks stoßen, da dieses ebenfalls die Höhe  $i$  besitzt.

Natürlich sind nun auch die Kontakte mit den zu  $\text{par}_g(v_i), \text{par}_b(v_i)$  gehörigen Dreiecken gemäß Schnyder wood erfüllt.

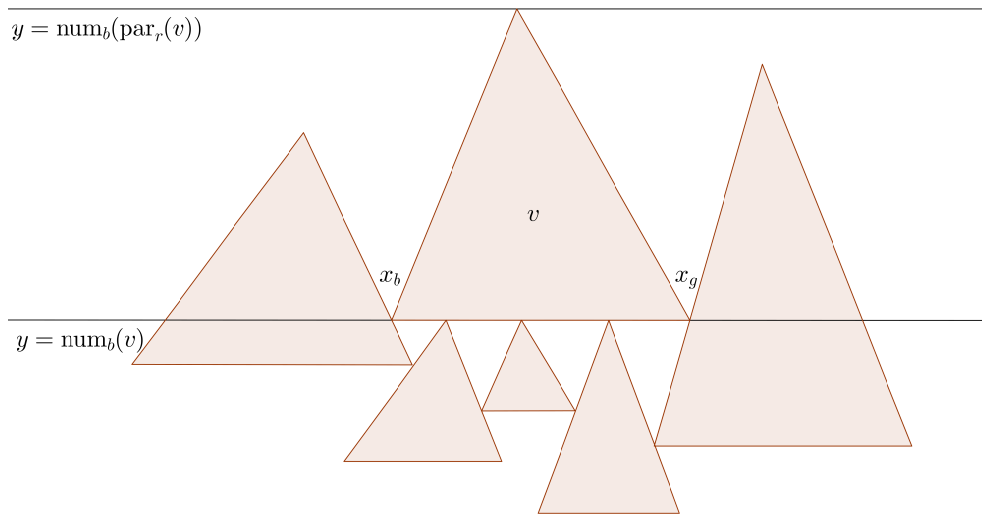


Abbildung 5.8: Illustration der Positionierung eines neuen Dreiecks und Bezeichnungen im Beweis.

Es bleibt also auszuschließen, dass das neu gezeichnete Dreieck andere Dreiecke außer den genannten schneiden kann, denn dann erfüllt auch die neue Teil-Kontaktdarstellung die Kontakte gemäß Schnyder wood und die Behauptung folgt mit dem Induktionsprinzip.

Offensichtlich ist es nicht möglich, dass die Spitze eines bereits gezeichneten Dreiecks, das einen Knoten  $w = v_j, j < i$  repräsentiert, im Innern des zu  $v_i$  gehörigen Dreiecks liegt, denn dann müsste aufgrund der oben geschilderten Situation um das  $v_i$  repräsentierende Dreieck und da die vorige Teil-Kontaktdarstellung bereits nach Induktionsannahme den zugehörigen Teil-Schnyder wood repräsentiert, der zugehörige Knoten ein Kind von  $v_i$  im roten Baum sein, könnte nach oben Gezeigtem also höchstens das  $v_i$ -Dreieck berühren, aber nicht schneiden.

Gleichzeitig kann aber weder die linke noch rechte Ecke des  $w$ -Dreiecks innerhalb des  $v_i$ -Dreiecks liegen, da dann die Höhe der Grundseite des  $w$ - größer als die des  $v_i$ -Dreiecks wäre und damit  $i > j = \text{num}_b(w) > \text{num}_b(v_i) = i$  gälte, Widerspruch.

Somit könnte das  $w$ -Dreieck das  $v_i$ -Dreieck nur noch schneiden, falls eine der unteren Ecken des  $v_i$ -Dreiecks innerhalb des  $w$ -Dreiecks lägen. Da diese aber jeweils auch auf dem Rand des Dreiecks des grünen- bzw. blauen Vaters von  $v_i$  liegen (s.o.), würden sich die eben genannten Dreiecke unabhängig von der Zeichnung des  $v$ -Dreiecks schneiden, im Widerspruch zur Induktionsannahme, aus welcher folgt, dass die bereits gezeichneten Dreiecke die Kontakte gemäß Schnyder wood erfüllen und sich also insbesondere nicht überschneiden dürfen.  $\square$

Folglich wissen wir nun, dass jeder Schnyder wood eine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung besitzt. Insbesondere lassen sich durch Variation der frei wählbaren  $\lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$  die Formen der enthaltenen Dreiecke in gewissem Rahmen beeinflussen. Setzen wir  $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n$ , so erhalten wir Dreiecke mit rechtem Winkel rechts unten, für  $\lambda_i = 1, i = 1, \dots, n$  erhält man Dreiecke mit rechtem Winkel links unten und für  $\lambda_i = \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n$  eine Kontaktdarstellung mit gleichschenkligen Dreiecken. Außerdem können wir die Existenz und die im Beweis be-

schriebene Konstruktion von allgemeinen Dreieckskontaktdarstellungen auf beliebige planare Graphen ausweiten:

**Satz 5.0.10** ([dFdMR94], [Ruc11]). *Jeder planare Graph besitzt eine allgemeine Dreieckskontaktdarstellung, wobei die verwendeten Dreiecke parallele Grundseiten besitzen. Hierbei kann die Position der Dreiecksspitzen oberhalb der Grundseiten beliebig vorgegeben werden.*

*Beweis.* Sei  $G$  ein eingebetteter planarer Graph. Wir können  $G$  durch Hinzufügen von Knoten und Kanten zu einer planaren Triangulation erweitern (siehe Abbildung). Für diese lässt sich wie im obigen Beweis eine Dreieckskontaktdarstellung mit den geforderten Eigenschaften konstruieren. Die gewünschte Position der Dreiecksspitzen erhält man durch geeignete Wahl der Größen  $\lambda_i \in [0, 1]$  bei den entsprechenden Dreiecken. Aus dieser erweiterten Dreieckskontaktdarstellung löschen wir alle Dreiecke, die zusätzlich hinzugefügte Knoten repräsentieren, und erhalten eine Kontaktdarstellung von  $G$  mit den geforderten Eigenschaften.

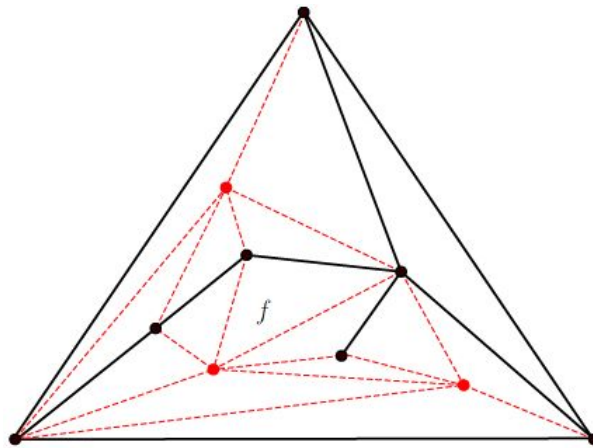


Abbildung 5.9: Veranschaulichung der Triangulierung planarer Graphen durch Hinzufügen von Knoten und Kanten. In jedes beschränkte Gebiet wird ein zusätzlicher Knoten gesetzt und mit den im Gebietsrand enthaltenen Knoten verbunden. Bei Knoten vom Grad  $< 2$  müssen evtl. mehrere Knoten pro Gebiet verwendet werden.<sup>5</sup>

□

---

<sup>5</sup>Aus [Ruc11], S. 21



## Kapitel 6

# Gleichseitige Dreieckskontaktdarstellungen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt Dreieckskontaktdarstellungen planarer Graphen mit z.B. gleichschenkligen oder rechtwinkligen Dreiecken konstruiert haben, wollen wir uns nun noch spezielleren Dreieckskontaktdarstellungen zuwenden.

Beim "Graph Drawing Workshop" in Bertinoro, 2007, kam die Vermutung auf, dass sich gewisse planare Graphen auch durch Kontaktgebilde darstellen lassen, in denen nur gleichgerichtete gleichseitige Dreiecke auftreten. Die Gleichgerichtetheit meint dabei, dass die Dreiecke analog wie im vorigen Abschnitt parallele Grundseiten besitzen. Solch eine Kontaktdarstellung wollen wir wie in [Ruc11] als gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung bezeichnen. Ein Beispiel ist in der folgenden Abbildung zu sehen. Die im Folgenden aufgeführten Überlegungen zur Entartung von gleichseitigen Dreiecken sind aus [Fel10c] und [Ruc11] entnommen.

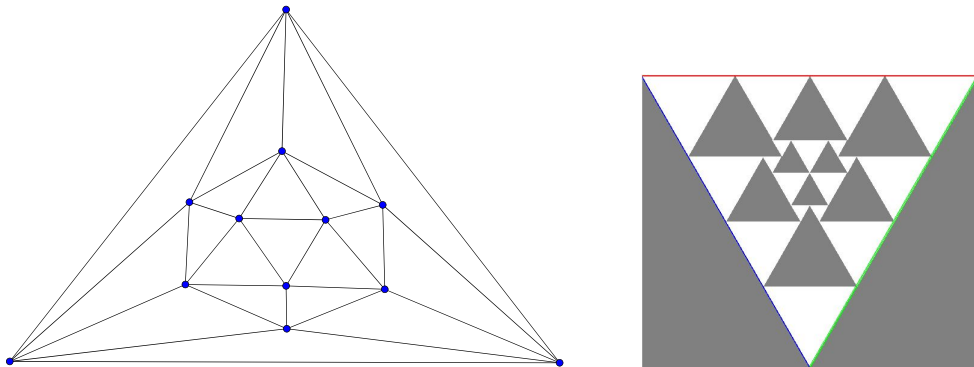


Abbildung 6.1: Gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung des Ikosaeder-Skelettgraphen. Die zu den äußeren Knoten gehörigen Dreiecke sind nur im Ansatz als umgekehrtes Rahmendreieck zu erkennen.

## 6.1 Entartung

Im Gegensatz zu allgemeinen Dreieckskontaktdarstellungen existieren gleichseitige Dreieckskontaktdarstellungen nicht für alle planaren Graphen. Bspw. sieht die einzig mögliche gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung des Oktaeder-Skelettgraphen wie folgt aus:

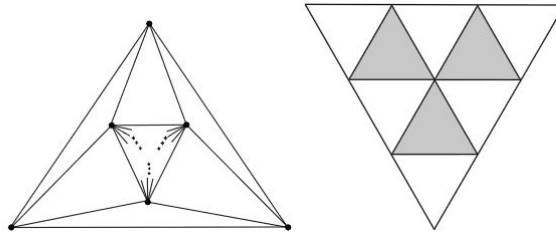


Abbildung 6.2: Oktaeder-Skelettgraph mit trennendem Dreieck und seine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung.<sup>1</sup>

Sobald man also weitere Knoten und Kanten in das mittlere Gebiet des Graphen einfügt, verschwinden die zugehörigen Dreiecke in der Dreieckskontaktdarstellung, was natürlich nicht gewünscht ist, da so keine Rückschlussmöglichkeit von der gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellung auf den Graphen gegeben ist. Man überlegt sich sofort, dass die eben beschriebene Entartung nur im Falle trennender 3er-Kreise im Graphen gegeben ist, welche bei 4-zusammenhängenden Graphen offenbar nicht auftreten können.

---

<sup>1</sup>Aus [Ruc11], S. 29

## 6.2 Existenz

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst mit dem Beweis der Existenz von gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen für 4-zusammenhängende 3-triangulierte Graphen, siehe voriger Abschnitt, beschäftigen. Dabei berufen wir uns auf die Arbeiten [GLP10] und [Sch90], insbesondere orientiert sich die Darstellung des ersten allgemeinen Teils über das Monster Packing Theorem und die Beweisskizze des Convex Packing Theorems an [Sch90], der hintere Teil zu den gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen an [GLP10]. Die erste Arbeit von Oded Schramm hat allgemeineren Charakter und beschäftigt sich mit beliebigen Kontaktdarstellungen 3-triangulierter Graphen. Wesentlich für uns ist der folgende dort bewiesene Satz.

**Satz 6.2.1** (Convex Packing Theorem, [Sch90]). *Gegeben sei eine planare Triangulation  $G$  mit Außengebiet  $abc$  im Gegenuhrzeigersinn. Sei  $C$  eine einfach geschlossene Kurve/Kreis in der Ebene, welche sich aus den drei Teil-Jordanbögen  $P_a, P_b, P_c$  im Gegenuhrzeigersinn zusammensetzt. Für jeden inneren Knoten  $v$  sei  $P_v$  eine konvexe mehripunktige Menge in der Ebene. Dann existiert eine möglicherweise entartete Kontaktdarstellung von  $T$ , wobei  $a, b, c$  durch  $P_a, P_b, P_c$  und jeder innere Knoten  $v$  durch eine Menge  $Q_v$ , welche durch Verschieben, Strecken und Stauen aus  $P_v$  hervorgeht, repräsentiert wird.*

Mit dem Wort "entartet" ist hier wie im vorigen Abschnitt gemeint, dass einige der Mengen  $Q_v$  evtl. auch zu einem Punkt degenerieren können.

Wir werden den umfangreichen Beweis des Satzes hier nicht führen, wollen ihn aber wegen seiner starken Aussage wenigstens skizzieren.

Die Grundidee des Beweises von Oded Schramm in [Sch90] besteht darin, die Position der für die Kontaktdarstellung verwendeten geometrischen Objekte in einer gewissen Reihenfolge, die unten erläutert wird, festzulegen, sodass diese Objekte den Graphen wie gewünscht (bis auf Entartung) repräsentieren. Hierfür wird in der Setzung der Objekte Spielraum gelassen. Die dadurch entstehenden möglichen Platzierungen der Objekte werden in einer Abbildung  $\mathfrak{M}$ , einem sogenannten Monster zusammengefasst, welche unten genauer charakterisiert wird. Aufbauend auf dieser wird unter Verwendung hauptsächlich topologischer Argumente eine nichtleere Teilmenge des Definitionsbereichs von  $\mathfrak{M}$  konstruiert, deren Bild nur Kontaktdarstellungen enthält. Der Beweis, dass diese Menge nichtleer ist, besteht prinzipiell aus einer Anwendung von Brouwers Fixpunktsatz. Dies hat zudem zur Folge, dass der gesamte Beweis nicht konstruktiv ist und deshalb für die Konstruktion solcher Kontaktdarstellungen vermutlich nicht verwendbar ist (es wäre theoretisch denkbar, einen Fixpunkt der in der Arbeit konstruierten Funktion mittels numerischer Verfahren anzunähern. Da diese i.A. zwar stetig, aber nicht kontrahierend ist, ist solch eine Approximation eines Fixpunktes und damit einer Kontaktdarstellung meines Erachtens aber höchstens sehr langsam durchführbar).

Zunächst wollen wir aber die Struktur, welche die Setzungsreihenfolge der Objekte bestimmt, betrachten. Dabei handelt es sich um einen sogenannten *right oriented depth first search tree* auf der von uns betrachteten planaren Triangulation  $G$ .

## 6.2. EXISTENZ

**Definition 6.2.2** ([Sch90]). Sei  $G$  eine planare Triangulation mit Außengebiet  $abc$  im Gegen-  
uhrzeigersinn. Ein *right oriented depth first search tree* auf  $G$  ist ein  $G$  aufspannender in  $a$   
wurzelnder Baum  $T$ , welcher folgende Bedingungen erfüllt:

(i)  $b$  ist das einzige Kind von  $a$ .

(ii) Für alle Kanten  $e = \{v_1, v_2\} \in E(G)$  ist entweder  $v_1$  ein Nachfahre von  $v_2$  in  $T$  oder umge-  
kehrt.

(iii) Ist  $v \in V(G)$  und  $A$  eine maximale Menge von zu  $v$  benachbarten Nachfahren von  $v$  in  $T$ ,  
welche bzgl. der Einbettung konsekutiv nebeneinander liegen, so ist der im Uhrzeigersinn am  
weitesten rechts liegende Knoten Vorfahr aller anderen Knoten in  $A$ .

(iv) Sind  $v_1, v_2 \in V(G)$  zu  $v$  benachbarte Nachfahren von  $v \in V(G)$  bzgl.  $T$ , so ist der bzgl.  $T$  am  
nächsten bei ihnen liegende Knoten  $w$ , der sowohl auf dem (eindeutigen) Verbindungspfad von  
 $v_1$  und  $v$  bzw.  $v_2$  und  $v$  in  $T$  liegt, entweder  $v$  oder zu  $v$  benachbart.

Die Existenz eines solchen Baumes auf einer beliebigen planaren Triangulation ist nicht schwer  
einzusehen und ist in der Originalarbeit aufgeführt. Im Folgenden wollen wir eine Ordnung  
 $\leq$  auf  $V(G)$  definieren, indem wir  $u \leq v$  für  $u, v \in V(G)$  genau dann schreiben, wenn  $v$  ein  
Nachfahr von  $u$  im in der jeweiligen Situation vorausgesetzten right oriented dfs tree  $T$  ist oder  
 $u = v$ . Ist  $u \neq v$ , so schreiben wir  $u < v$ . Insbesondere beschreibt für einen Knoten  $w \in V(G)$   
die Menge  $\{x \in V(G) | x \leq w\}$  die Knoten des Verbindungspfades von  $w$  und der Wurzel  $a$  und  
ist demnach total geordnet. Im jeweiligen Kontext schreiben wir dann  $w-1, w-2, w-3, \dots$ , für  
den Vorgänger, den Vorvorgänger etc. von  $w$ .

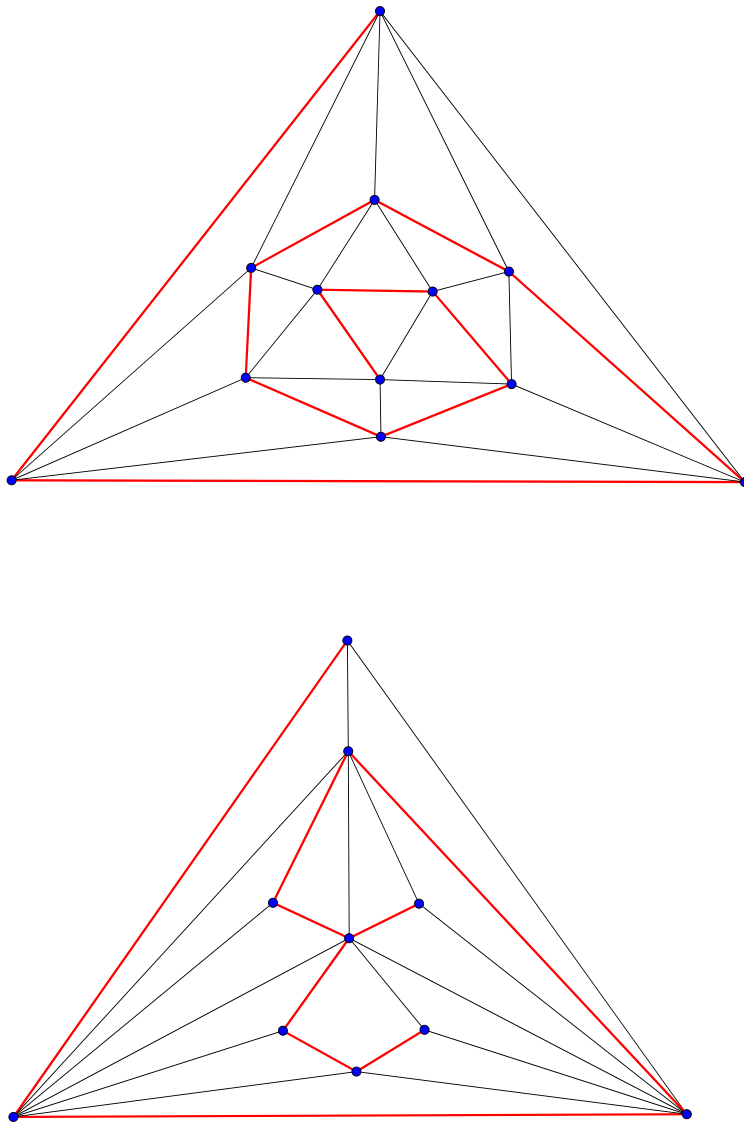


Abbildung 6.3: Beispiele für right oriented depth first search trees auf planaren Graphen. In der ersten Abbildung ist der Baum mit einer im Gegenuhrzeigersinn verlaufenden Spirale identisch.

Solch ein Baum bestimmt der eben definierten Ordnung entsprechend, in welcher Reihenfolge die Objekte später gesetzt werden. Wir sind nun bereit, ein *Monster* auf  $G$  formal zu definieren.

**Definition 6.2.3** ([Sch90]). Sei  $G$  eine planare Triangulation mit Außengebiet  $abc$  im Gegenuhrzeigersinn und  $T$  ein zugehöriger right oriented dfs tree. Ein *Monster* auf  $G$  ist eine Abbildung

## 6.2. EXISTENZ

$\mathfrak{M} : K \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)^{|V(G)|}$ ,  $K := [0, 1]^J$ ,  $J := V(G) \setminus \{a, b, c\}$ , welche jedem  $x \in K$  eine Konfiguration  $(\mathfrak{M}_i(x))_{i \in V(G)}$  von Mengen in der Ebene zuordnet, sodass gilt:

(i)  $\mathfrak{M}_i(x)$  ist ein volldimensionales beschränktes Gebiet oder einpunktig,  $\forall i \in J$ .

(ii) Für  $i \in \{a, b, c\}$  ist  $\mathfrak{M}_i(x)$  ein volldimensionales beschränktes Gebiet.

(iii)  $\mathfrak{M}$  ist stetig, d.h. der maximale Abstand zwischen Punkten in  $\mathfrak{M}_i(x)$  und  $\mathfrak{M}_i(y)$  geht gegen 0, falls  $K \ni x \rightarrow y \in K$ .

(iv)  $\overset{\circ}{\mathfrak{M}}_i(x) \cap \overset{\circ}{\mathfrak{M}}_j(x) = \emptyset$ ,  $\forall j < i \in V(G)$ .

(v) Für alle  $i \in V(G) \setminus \{a\}$  ist  $\overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ , d.h.  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  und  $\mathfrak{M}_i(x)$  berühren sich. Insbesondere gibt es Punkte  $p_i(x) \in \overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)}$ , welche stetig von  $x$  abhängen,  $i \in V(G) \setminus \{a\}$ .

(vi) Für alle  $i \in J$  gibt es ein  $j \leq i - 2$ , sodass  $\overline{\mathfrak{M}_j(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ .

(vii) Für alle  $i \in J$ ,  $x \in K$  ist genau dann  $p_{i-1}(x) = p_i(x)$ , wenn  $x_i \in \{0, 1\}$  oder  $\mathfrak{M}_i(x)$  einpunktig ist. Darüberhinaus folgt aus  $x_i \rightarrow 0$  oder  $x_i \rightarrow 1$   $p_{i-1}(x) - p_i(x) \rightarrow 0$ .

(viii) Für alle  $i < j < k$  und  $x \in K$  ist  $\overline{\mathfrak{M}_i(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_j(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_k(x)} \neq \emptyset$  nur möglich, wenn mindestens eines der drei Objekte einpunktig ist.

Diese noch sehr technische und abstrakte Definition wird im Fall konvexer Mengen unten konkretisiert. Insbesondere klärt sich dort auch die Bedeutung einzelner Teile der Definition. Sie wurde hier dennoch allgemein formuliert, um die Aussagekraft des zentralen Satzes in [Sch90], dem im Folgenden zitierten Monster Packing Theorem zu verdeutlichen, welches wiederum eine Verallgemeinerung des Convex Packing Theorem darstellt.

**Satz 6.2.4** (Monster Packing Theorem, [Sch90]). *Sei  $G$  eine planare Triangulation und  $\mathfrak{M}$  ein Monster auf  $G$  bzw. dem zugehörigen right oriented dfs tree. Dann existiert ein  $x^* \in K$ , sodass die Mengen  $\mathfrak{M}_i(x^*)$ ,  $i \in V(G)$  eine (eventuell entartete) Kontaktdarstellung von  $G$  bilden, wobei der Knoten  $i$  durch die Menge  $\mathfrak{M}_i(x^*)$  dargestellt wird,  $i \in V(G)$ .*

Der Beweis des Satzes ist topologischer Natur. Durch die mit dem Monster hergestellte Beziehung zwischen  $K = [0, 1]^J$  und Konfigurationen geometrischer Objekte werden für den Beweis im Wesentlichen geometrische Aspekte der Kontaktdarstellung und der vom Monster erzeugten Objekte auf topologische Zusammenhänge in  $K$  transformiert. Schließlich wird eine Teilmenge

von  $K$  aufbauend auf den Monstereigenschaften konstruiert, von welcher gezeigt wird, dass alle enthaltenen Elemente als Argument des Monsters eine evtl. entartete Kontaktdarstellung des Graphen liefern. Der Kern des Beweises, dass diese Menge nichtleer ist, besteht wie oben angesprochen aus einer Anwendung von Brouwers Fixpunktsatz auf eine geeignete stetige Funktion  $f : K \rightarrow K$ . Die Details der Konstruktion der Menge würden aber den Rahmen dieser Beweisskizze sprengen und werden deshalb hier nicht aufgeführt.

Stattdessen kümmern wir uns nun darum, wie man aus dem allgemeinen Monster Packing Theorem das anfangs zitierte Convex Packing Theorem und daraus dann schließlich die Existenz von gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen für 3-triangulierte Graphen folgern kann. Hierzu müssen offenbar parametrisierte Mengen definiert werden, die obige Forderungen an ein Monster erfüllen.

Wir betrachten die Voraussetzungen von Satz 6.2.1 und einen gemäß 6.2.2 existenten right oriented dfs tree auf  $G$  sowie die dadurch induzierte Ordnung auf  $G$ . Nun machen wir die zusätzlichen Annahmen, dass

1.  $P_a, P_b$  und  $P_c$  mindestens  $C^1$ -glatt sind, in deren Kontaktpunkten nach innen offene Berührungspunkte vorliegen und  $P_c$  zum Inneren des geschlossenen Kreises  $C$  hin streng konvex ist,
2. jede der Mengen  $P_i, i \in J$  nicht nur konvex, sondern sogar streng konvex und
3. der Rand jeder Menge  $P_i, i \in J$  mindestens  $C^1$ -glatt ist.

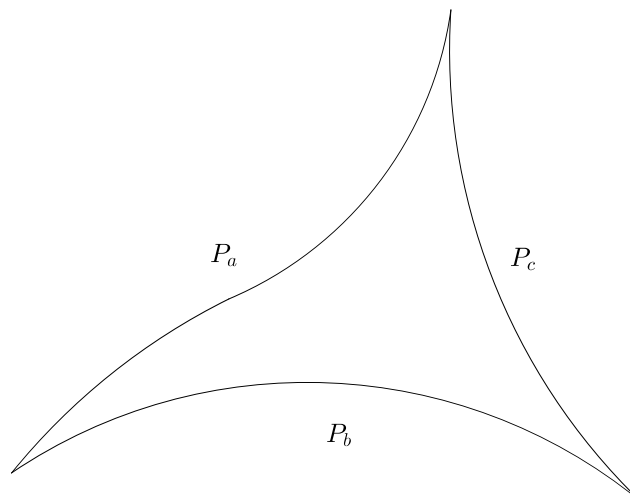


Abbildung 6.4: Illustration der Voraussetzung (1.) an die Bögen  $P_a, P_b, P_c$ .

## 6.2. EXISTENZ

Diese vor allen Dingen für die in dieser Arbeit betrachteten Kontaktdarstellungen noch einschränkenden Zusatzannahmen werden im Nachhinein relaxiert.

Zunächst implizieren die an  $P_a, P_b, P_c$  gemachten Annahmen offenbar, dass sich diese durch geeignet gewählte Jordanbögen zu Mengen  $P'_a, P'_b, P'_c$  mit  $C^1$ -glattem Rand ergänzen lassen, wobei  $P'_c$  streng konvex ist und die Kontaktpunkte von  $P'_a, P'_b, P'_c$  mit denen von  $P_a, P_b, P_c$  übereinstimmen. Wir wollen nun ein Monster gehörig zum oben gewählten right oriented dfs tree konstruieren. Hierzu setzen wir  $\mathfrak{M}_a(x) := P'_a, \mathfrak{M}_b(x) := P'_b, \mathfrak{M}_c(x) := P'_c$  für alle  $x \in K$ . Die Mengen  $\mathfrak{M}_j(x), j \in J$  werden nun für beliebig festes  $x \in K$  induktiv definiert.

Dazu nehmen wir an, die Mengen  $\mathfrak{M}_j(x), j < i$  seien für ein  $i \in J$  bereits definiert und gehen durch Strecken/Stauchen aus  $P_j$  hervor,  $j \in J, j < i$ . Außerdem nehmen wir an, dass diese bereits die in 6.2.3 an sie gestellten Bedingungen erfüllen und sich alle Mengen  $\mathfrak{M}_j(x), j \in J, j < i$  im Innern des Kreises  $C$  befinden.

Im Fall, dass  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  einpunktig ist, setzt man  $p_i(x) := p_{i-1}(x), \mathfrak{M}_i(x) := \mathfrak{M}_{i-1}(x)$ . Ansonsten übertragen sich die Eigenschaften des Randes von  $P_{i-1}$  auf den von  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$ . Somit lässt sich der in der Definition verlangte Kontaktpunkt  $p_i(x) \in \overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)}$  dadurch definieren, dass die Länge des Teilbogens des Randes zwischen  $p_{i-1}(x)$  und  $p_i(x)$  im Gegenuhrzeigersinn den Anteil  $x_i$  an der Gesamtlänge des Randes von  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  hat.

Eine Ausnahme liegt für  $i = c$  vor. Dann bezieht sich der Anteil  $x_i$  nicht auf die Gesamtlänge von  $P'_c$ , sondern auf  $P_c$ , um zu garantieren, dass sich die konstruierte Menge nicht außerhalb von  $C$  befindet, was zum Beweis der Induktionsbehauptung benötigt wird.

Es bleibt also festzulegen, wie die Menge  $\mathfrak{M}_i(x)$  aussieht. Dazu bestimmen wir die Richtung der Tangente in  $p_{i-1}(x)$  an  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  und bestimmen eine Tangente mit derselben Steigung auf der jeweils gegenüberliegenden Seite der Menge  $P_i$ <sup>2</sup>. Somit erhalten wir durch Verschieben der Menge  $P_i$  (siehe auch Abbildung 6.5) einen tangentialen Kontakt von  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  und  $P_i$  in  $p_i(x)$ . Diese Verschiebung von  $P_i$  bezeichnen wir mit  $P'_i$ .

---

<sup>2</sup>Dass all diese Begriffe hier definiert sind und alle möglichen Tangentensteigungswerte in Punkten des Randes von  $P_i$  angenommen werden, folgt aus der oben gemachten Annahme der strengen Konvexität und der  $C^1$ -Glattheit des Randes, welche sich von  $P_{i-1}$  auf  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  überträgt. Insbesondere existieren exakt zwei Randpunkte mit derselben Tangentensteigung. Der Rand einer Menge mit solchen Eigenschaften lässt sich in einen linken und rechten Bereich einteilen. Diese werden durch die Übergangspunkte von positiver zu negativer Tangentensteigung bzw. umgekehrt festgelegt. Um eine sinnvolle weitere Definition zu erhalten, muss dann von den zwei Punkten mit gewünschter Tangentensteigung der auf der "richtigen" Seite liegende Punkt gewählt werden, siehe Abbildung 6.5, rechts.



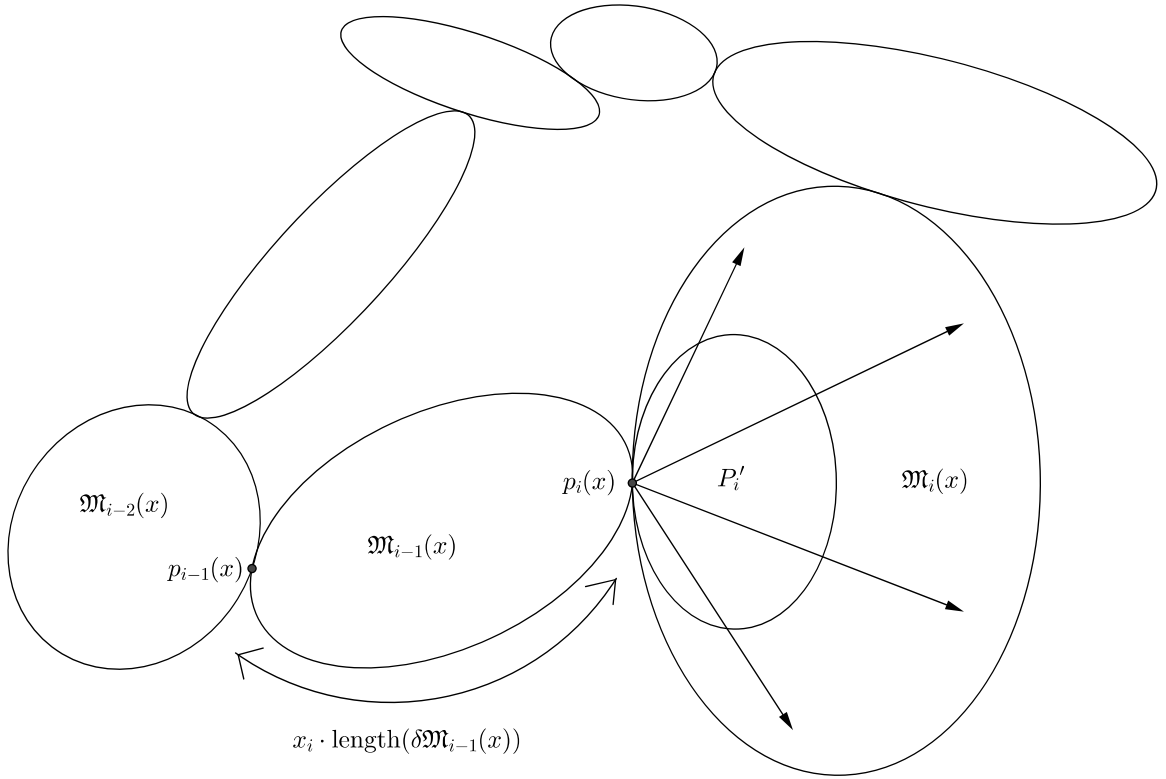


Abbildung 6.5: Illustration der induktiven Definition von  $\mathfrak{M}_i(x)$ .

Wir nutzen  $p_i(x)$  als Zentrum für eine zentrische Streckung von  $P'_i$  mit einem Faktor  $\alpha \geq 0$ . Offensichtlich bleibt  $p_i(x)$  unabhängig von der Wahl von  $\alpha$  Berührungspunkt von  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  und der zentrischen Streckung. Wir setzen nun

$$\alpha := \inf\{\beta \geq 0 \mid (p_i(x) + \beta(P'_i - p_i(x))) \cap \bigcup_{j \leq i-2} \mathfrak{M}_j(x) \neq \emptyset\}.$$

Dies entspricht einer zentrischen Streckung der Menge  $P'_i$  ausgehend von  $p_i(x)$ , bis ein Kontakt zu einer von  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  verschiedenen Menge hergestellt ist. Die Existenz von  $\alpha$  folgt unmittelbar daraus, dass sich gemäß Annahme alle  $\mathfrak{M}_j(x)$ ,  $j \in J$ ,  $j < i$  im Innern von  $C$  befinden und folglich  $\bigcup_{j=1}^{i-2} \mathfrak{M}_j(x)$  beschränkt ist.

Wir definieren nun  $\mathfrak{M}_i(x) := p_i(x) + \alpha(\overset{\circ}{P}'_i - p_i(x))$ , wobei wir das Innere von  $P'_i$  betrachten, um

## 6.2. EXISTENZ

sicherzustellen, dass  $\mathfrak{M}_i(x)$  offen ist.

Um nun induktiv zu zeigen, dass die gemäß dieser Vorschrift konstruierten Mengen gemeinsam ein Monster bilden, bleiben also die für  $i$  zusätzlich hinzugekommenen Forderungen an die Monstermengen aus Definition 6.2.3 sowie dass  $\mathfrak{M}_i(x)$  im Innern von  $C$  liegt, zu zeigen.

Wir wissen laut Annahme, dass

- die Mengen  $\mathfrak{M}_j(x), j \leq i-1$  im Innern von  $C$  liegen und die
- Monsterbedingungen (i)-(viii) aus Definition 6.2.3 für diese erfüllt sind, bzw. alle Bedingungen, in denen ausschließlich diese Monstermengen auftauchen.

Dasselbe ist nun für die Mengen  $\mathfrak{M}_j(x), j \leq i$  zu zeigen. Aufgrund obiger Annahmen reduziert sich dies darauf, zu zeigen, dass

- $\mathfrak{M}_i(x)$  innerhalb von  $C$  liegt.
- Alle Monsterbedingungen (i)-(viii), in denen nur  $\mathfrak{M}_i(x)$  und Monstermengen  $\mathfrak{M}_j(x), j \leq i-1$  auftauchen, ebenfalls erfüllt sind, d.h. explizit:

(i)  $\mathfrak{M}_i(x)$  ist ein volldimensionales beschränktes Gebiet oder einpunktig.

(ii) Für  $k \in \{a, b, c\}$  ist  $\mathfrak{M}_k(x)$  ein volldimensionales beschränktes Gebiet.

(iii)  $\mathfrak{M}_i$  ist stetig, d.h. der maximale Abstand zwischen Punkten in  $\mathfrak{M}_i(x)$  und  $\mathfrak{M}_i(y)$  geht gegen 0, falls  $K \ni x \rightarrow y \in K$ .

(iv)  $\mathring{\mathfrak{M}}_i(x) \cap \mathring{\mathfrak{M}}_j(x) = \emptyset, \forall j < i \in V(G)$ .

(v) Es ist  $\overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ , d.h.  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  und  $\mathfrak{M}_i(x)$  berühren sich. Insbesondere ist  $p_i(x)$  stetig von  $x$  abhängig.

(vi) Es gibt ein  $j \leq i-2$ , sodass  $\overline{\mathfrak{M}_j(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ .

(vii) Es ist genau dann  $p_{i-1}(x) = p_i(x)$ , wenn  $x_i \in \{0, 1\}$  oder  $\mathfrak{M}_i(x)$  einpunktig ist. Darüberhin-

aus folgt aus  $x_i \rightarrow 0$  oder  $x_i \rightarrow 1$   $p_{i-1}(x) - p_i(x) \rightarrow 0$ .

(viii) Für alle  $j_1 < j_2 < i$  und  $x \in K$  ist  $\overline{\mathfrak{M}_{j_1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_{j_2}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$  nur möglich, wenn mindestens eines der drei Objekte einpunktig ist.

*Beweis.* Ersteres folgt offenbar aus der Definition von  $\mathfrak{M}_i(x)$ ,  $\alpha$ , da beim Strecken von  $P_i$  spätestens bei Erreichen von  $C$  obige Schnittmenge nicht leer ist, da sich  $C$  aus  $P_a \subseteq P'_a = \mathfrak{M}_1(x)$ ,  $P_b \subseteq P'_b = \mathfrak{M}_2(x)$ ,  $P_c \subseteq P'_c = \mathfrak{M}_3(x)$  zusammensetzt.

Das Erfülltsein von (i),(ii),(iv) und (v), abgesehen von Stetigkeitsaussagen, sollte aus der Induktionsannahme und der Konstruktion von  $\mathfrak{M}_i(x)$  sofort ersichtlich sein.

Wir zeigen nun (vi)-(viii), abgesehen von Stetigkeitsaussagen.

(vi) Im Fall, dass  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  mehrpunktig ist und  $x_i \in (0, 1)$ , ist (vi) für  $i$  laut Konstruktion erfüllt (siehe Definition von  $\alpha$ ). Ist  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  einpunktig oder  $x_i \in \{0, 1\}$ , so ist  $\overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)} \ni \{p_{i-1}(x)\} = \mathfrak{M}_i(x) = \{p_i(x)\}$ . Dann folgt also aus  $p_{i-1}(x) \in \mathfrak{M}_{i-2}(x)$ , dass  $\overline{\mathfrak{M}_{i-2}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ .

(vii) Per definitionem folgt aus  $x_i \in \{0, 1\}$  oder  $\mathfrak{M}_{i-1}(x) = \{p_{i-1}(x)\}$ , dass  $p_{i-1}(x) = p_i(x)$ . Umgekehrt erhält man aus  $p_i(x) = p_{i-1}(x)$  aufgrund der Konstruktion von  $\mathfrak{M}_i(x)$  entweder  $x_i \in \{0, 1\}$  oder  $x_i \in (0, 1)$  und dann muss  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  einpunktig sein, da der Abstand von  $p_i(x)$ ,  $p_{i-1}(x)$  auf dem Rand ein positives Vielfaches der Randlänge ist, und mit Ersterem ist auch Letzteres identisch 0. Somit ist die in (vii) behauptete Äquivalenz erfüllt.

(viii) Seien  $j_1 < j_2 < i$ , sodass  $\overline{\mathfrak{M}_{j_1}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_{j_2}(x)} \cap \overline{\mathfrak{M}_i(x)} \neq \emptyset$ . Da all diese Mengen entweder einpunktig sind oder streng konvex mit glattem Rand, ist solch ein Dreierkontakt nur dann möglich, wenn mindestens eine der Mengen einpunktig ist, es folgt (viii).

Es bleiben also die ausgelassenen Stetigkeitseigenschaften der konstruierten Abbildung nachzuweisen, wobei wir zuerst die zu beweisenden Teile von (v), (vii) aus der Stetigkeit von  $\mathfrak{M}$  folgern. Sei also (iii) erfüllt,  $i \in J$ .

(v) Für die Kompletierung von (v) ist die Stetigkeit der Punkte  $p_i(x)$ ,  $i \in J$ , zu zeigen. Diese sind unter den gemachten Voraussetzungen aber die eindeutigen Schnittpunkte der Mengen  $\overline{\mathfrak{M}_{i-1}(x)}$ ,  $\overline{\mathfrak{M}_i(x)}$ , womit sich aus der Stetigkeit der  $\mathfrak{M}_i(x)$ ,  $i \in J$  die Behauptung ergibt.

(vii) Nach (iii) folgt aus  $x_i \rightarrow 0$  oder  $x_i \rightarrow 1$ , dass  $\mathfrak{M}_i(x) \rightarrow \mathfrak{M}_i(x|_{x_i=0}) = \mathfrak{M}_i(x|_{x_i=1}) = \{p_{i-1}(x)\}$ , wobei Letzteres aus der Definition von  $\mathfrak{M}_i(x)$  im Fall  $x_i \in \{0, 1\}$  folgt. Da wir die Konvergenz dieser Mengen dadurch definiert haben, dass der supremale Abstand zwischen

## 6.2. EXISTENZ

enthaltenen Punkten gegen 0 konvergiert, folgt insbesondere für  $p_i(x) \in \overline{\mathfrak{M}_i(x)}$ , dass  $p_i(x) - p_{i-1}(x) \rightarrow 0$ , die Behauptung in (vii).

Nun zeigen wir (iii) und komplettieren damit den induktiven Beweis, dass diese parametrisierten Mengen ein Monster auf dem gewählten right oriented dfs tree bilden.

(iii) Laut Induktionsannahme hängen die Mengen  $\mathfrak{M}_j(x)$ ,  $j < i$  stetig von  $x$  ab, da für diese (iii) bereits erfüllt ist.

Sei  $(x^k) \in K^{\mathbb{N}}$  eine gegen  $x \in K$  konvergente Folge. Dann existiert offenbar ein Häufungspunkt  $S$  der Folge  $(\mathfrak{M}_i(x^k))$  bzgl. der in 6.2.3 für diese Mengen definierten Metrik. Dann kann man im Fall  $|\mathfrak{M}_{i-1}(x)| > 1$  für  $S$  aufgrund obiger induktiven Konstruktion der Mengen folgern, dass  $\bar{S}$  aus  $P_i$  durch Stauchen, Strecken und Verschieben hervorgeht, einen Kontakt mit  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  in  $p_i(x)$  besitzt und eine der Mengen  $\mathfrak{M}_j(x)$ ,  $j < i-1$  berührt. Dadurch ist aber  $\mathfrak{M}_i(x)$  eindeutig definiert, denn es existiert kein Streckungsfaktor  $\beta \neq \alpha$ , der ebenfalls zu solchen Eigenschaften der Menge führen würde, da für  $\beta > \alpha$  echte Schnittpunkte entstehen würden. Somit kann man in diesem Fall  $S = \mathfrak{M}_i(x)$  folgern. Da  $S$  beliebig gewählt war, folgt daraus die Konvergenz von  $\mathfrak{M}_i(x^k)$  gegen  $\mathfrak{M}_i(x)$ . Im Fall, dass  $\mathfrak{M}_{i-1}(x)$  einpunktig und damit  $\mathfrak{M}_i(x) = \{p_i(x)\} = \mathfrak{M}_{i-1}(x) = \{p_{i-1}(x)\}$  gilt, definieren wir  $i'$  als den bzgl.  $\leq$  auf  $\{j \in V(G) | j \leq i\}$  kleinsten Knoten, für den  $\mathfrak{M}_{i'}(x)$  einpunktig ist. Gemäß der induktiven Konstruktion dieser Mengen sind dann auch alle Mengen  $\mathfrak{M}_j(x)$ ,  $i' \leq j \leq i$  einpunktig, insbesondere gilt  $\{p_i(x)\} = \mathfrak{M}_i(x) = \{p_{i'}(x)\}$ . Somit existiert mit (vi) für die bereits konstruierten Mengen, dass es ein  $k \leq i' - 2$  gibt, sodass  $\mathfrak{M}_k(x)$  die Menge  $\mathfrak{M}_{i'}(x) = \{p_{i'}(x)\} = \{p_{i'-1}(x)\} = \{p_i(x)\}$  berührt und damit aufgrund der angenommenen stetigen Abhängigkeit von  $\mathfrak{M}_j(x)$ ,  $j < i$  sich die Mengen  $\mathfrak{M}_k(x), \mathfrak{M}_{i'-1}(x), S$  in  $p_i(x)$  berühren. Da all diese glatte Ränder besitzen ( $S$  ist einpunktig oder geht aus  $P_i$  durch Verschiebung, Streckung und Stauchung hervor) und die ersten beiden Mengen aufgrund der angenommenen Minimalität von  $i'$  mehrpunktig sind, muss  $S$  einpunktig und demnach  $S = \{p_v(x)\} = \mathfrak{M}_i(x)$  sein, denn drei Gebiete mit glattem Rand können sich nicht in einem Punkt berühren. Da  $S$  wieder beliebig war, folgt auch in diesem Fall die Konvergenz der Folge gegen  $\mathfrak{M}_i(x)$  und die in (iii) behauptete Stetigkeit von  $\mathfrak{M}$  ist bewiesen.  $\square$

Alles in allem wurde also induktiv gezeigt, dass unter den Zusatzannahmen 1.-3. ein Monster  $\mathfrak{M}$  auf dem vorausgesetzten right oriented dfs tree auf  $G$  existiert, sodass die Mengen  $\mathfrak{M}_i(x)$  aus  $P_i$  durch Verschieben, Strecken und Stauchen hervorgehen, für alle  $i \in J$  und  $x \in K$  und außerdem  $\mathfrak{M}_a(x) = P'_a, \mathfrak{M}_b(x) = P'_b, \mathfrak{M}_c(x) = P'_c, \forall x \in K$  gilt. Offensichtlich lässt sich nun das Monster Packing Theorem auf das konstruierte Monster anwenden, und man erhält (man kann offenbar von  $P'_a, P'_b, P'_c$  zu  $P_a, P_b, P_c$  übergehen, aufgrund der Definition dieser Mengen):

**Satz 6.2.5.** *Es gelten die Voraussetzungen aus dem Convex Packing Theorem sowie die Zusatzannahmen 1.-3. Dann besitzt  $G$  eine evtl. entartete Kontaktdarstellung mit Mengen  $Q_i, i \in V(G)$ , wobei  $Q_a = P_a, Q_b = P_b, Q_c = P_c$  und  $Q_i, i \in J = V(G) \setminus \{a, b, c\}$  entweder einpunktig ist oder aus  $P_i, i \in J$  durch Verschieben, Strecken und Stauchen hervorgeht.*

Zuletzt erwähnen wir noch, weshalb die Zusatzannahmen 1.-3. relaxiert werden können. Zu-

nächst wird in [Sch90] gezeigt, dass die Forderung nach strikter Konvexität von  $P_c$  nach "innen hin" nicht notwendig für die erste induktive Konstruktion ist und damit nicht notwendig. Außerdem überlegt man sich, dass die Forderung der strengen Konvexität durch Konvexität ersetzt und die Forderung nach  $C^1$ -Glattheit der Ränder komplett fallen gelassen werden kann. Dies hat den Grund, dass sich konvexe Gebiete durch geringfügige Änderungen an den Rändern so modifizieren lassen können, dass sie diese stärkeren Bedingungen erfüllen. Dies ist in folgender Abbildung am Beispiel eines Dreiecks zu sehen.

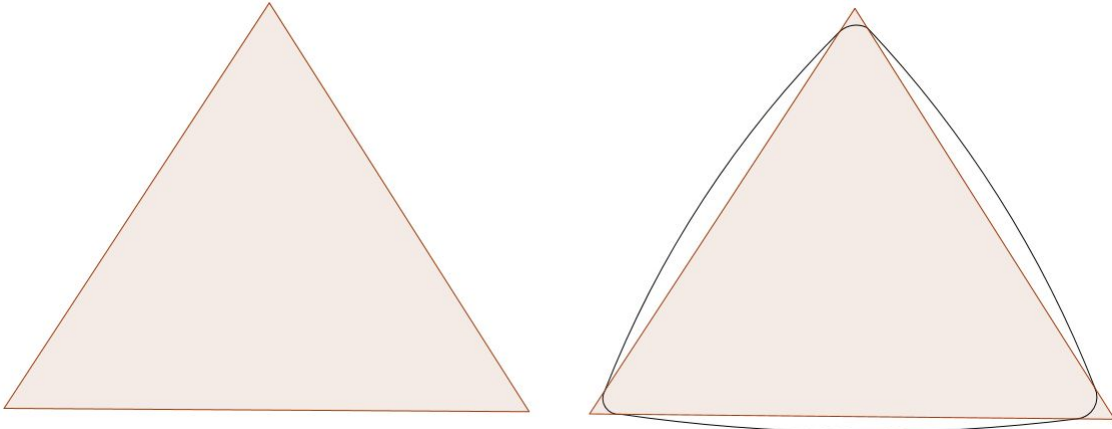


Abbildung 6.6: Beispiel für geringfügige Abrundung eines Dreiecks, um die Bedingungen 1.-3. zu erfüllen.

Da sich diese "Glättung" mit beliebig kleiner Störung des Dreiecks und allgemein konvexer Mengen durchführen lässt, folgt aus der Existenz von Kontaktdarstellungen mit glatten streng konvexen Mengen die Existenz von Kontaktdarstellungen für konvexe Mengen. Damit ist der Schritt vom Monster Packing Theorem hin zum Convex Packing Theorem nachvollzogen.

Zuletzt wollen wir nun das Convex Packing Theorem auf die für uns interessanten gleichseitigen Dreiecke anwenden und damit die Existenz gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellungen für 4-zusammenhängende planare Triangulationen nachweisen.

**Satz 6.2.6** (Existenz gleichseitiger Dreieckskontaktdarstellungen, [GLP10]). *Jeder 4-zusammenhängende 3-triangulierte eingebettete Graph besitzt eine nicht-entartete gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung.*

*Beweis.* Sei  $G$  eine 4-zusammenhängende planare Triangulation mit Außengebiet  $abc$ . Wir definieren nun die geschlossene Kurve  $C$  als umgekehrtes gleichseitiges Dreieck mit oberer Seite parallel zu  $x$ -Achse, wobei  $P_a, P_b, P_c$  aus den einzelnen Seiten im Gegenuhrzeigersinn ( $P_a$  ist die obere Seite) bestehen. Für alle  $v \in V(G) \setminus \{a, b, c\}$  definieren wir  $P_v$  als gleichseitiges Dreieck mit einer zur  $x$ -Achse parallelen Grundseite. Aus dem Convex Packing Theorem folgt nun sofort die Existenz einer evtl. entarteten gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ , wobei

## 6.2. EXISTENZ

das Rahmendreieck bzw.  $C$  der Form halber zu drei gleichseitigen die äußeren Knoten repräsentierenden Dreiecken erweitert wird. Es bleibt also zu zeigen, dass keine Entartung auftritt, d.h. dass keines der Dreiecke in einem Punkt verschwindet. Angenommen, das zu einem inneren Knoten  $v$  gehörige Dreieck verschwindet in einem Punkt. Aufgrund der Trianguliertheit von  $G$  besitzt  $v$  mindestens drei Nachbarn  $v_1, v_2, v_3$ , da sonst Doppelkanten entstünden. Die zu diesen gehörigen Dreiecke berühren dann das  $v$  repräsentierende Dreieck, welches aber in einem Punkt verschwindet. Folglich sind auch  $v_1, v_2, v_3$  untereinander adjazent. Durch Löschen dieser Knoten wird also (mindestens)  $v$  von allen außerhalb des Gebietes liegenden Knoten separiert, im Widerspruch zum 4-Zusammenhang von  $G$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

An dieser Stelle sei noch bemerkt, dass damit die Aussagekraft des Convex Packing Theorem und der Theorie von Oded Schramm nicht ausgeschöpft ist. Im Anhang A werden wir es bspw. auf Kontaktdarstellungen mit regelmäßigen 5-Ecken anwenden.

### 6.3 Konstruktion

Im letzten Abschnitt wurde die Existenz gleichseitiger DreieckskontaktDarstellungen für jeden 4-zusammenhängenden 3-triangulierten Graphen aus einem wesentlich allgemeineren Satz, dem Monster Packing Theorem von Oded Schramm (siehe [Sch90]), gefolgert. Der dort geführte Beweis ist allerdings nicht konstruktiv, sondern verwendet für den Existenzbeweis den Brouwerschen Fixpunktsatz. In diesem Abschnitt wird deshalb ein von Stefan Felsner entwickeltes Verfahren (siehe [Fel10c]) zur Konstruktion von gleichseitigen DreieckskontaktDarstellungen vorgestellt. Bisher existiert allerdings noch kein Beweis für dessen Endlichkeit. Die Darstellung orientiert sich im Folgenden an [Fel10c] und [Ruc11].

#### 6.3.1 Das Gleichungssystem

Um die oben genannte Beziehung zwischen Schnyder woods und DreieckskontaktDarstellungen nicht nur wie oben angesprochen für gewöhnliche DreieckskontaktDarstellungen, sondern auch für gleichseitige DreieckskontaktDarstellungen zu bewerkstelligen (das ist unser Ziel), stellen wir für eine gegebene gleichseitige DreieckskontaktDarstellung ein Gleichungssystem für die Seitenlängen der beteiligten Dreiecke auf. Anschließend drücken wir dieses nur in Abhängigkeit des durch die DreieckskontaktDarstellung induzierten Schnyder woods aus. Durch Verallgemeinerung dessen erhalten wir für jeden Schnyder wood  $S$  ein LGS der Form  $A_S x = e_1$ , das dann nach Möglichkeit aufgelöst und daraus eine DreieckskontaktDarstellung konstruiert werden soll.

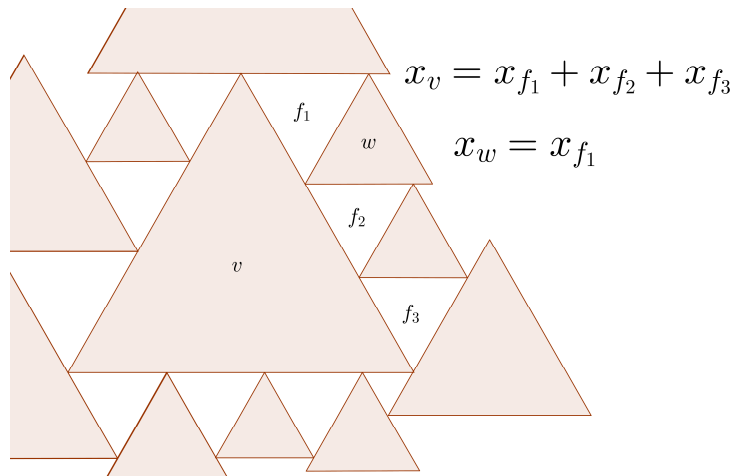


Abbildung 6.7: Einige der durch die Teil-DreieckskontaktDarstellung induzierten Gleichungen.

Die Variablen des Gleichungssystems sind die Seitenlängen der (ggf. nach Strecken/Stauchen) gleichseitigen Dreiecke in der gleichseitigen DreieckskontaktDarstellung. Die Kanten des Rahmendreiecks werden auf die Länge 1 skaliert. Im Übrigen werden auch die beschränkten Gebiete durch gleichseitige Dreiecke, die sogenannten dualen Dreiecke, repräsentiert, insbesondere treten auch die Seitenlängen dieser im LGS auf. Da die obere Rahmenkante die Länge 1 besitzt, muss die Summe der Seitenlängen der angrenzenden dualen Dreiecke gerade 1 sein, da diese die (horizontale) Rahmenkante ganz ausfüllen. Dies ergibt die erste Gleichung im LGS, wobei wir

### 6.3. KONSTRUKTION

für einen inneren Knoten oder ein beschränktes Gebiet  $r$  mit  $x_r$  die Seitenlänge des zugehörigen Dreiecks in der Dreieckskontaktendarstellung bezeichnen,

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(a_1)} x_f = 1.$$

Dabei wird über die beschränkten Gebiete, die an  $a_1$  grenzen, summiert, da diese offensichtlich mit den an die horizontale Randkante grenzenden dualen Dreiecken korrespondieren (wir betrachten den durch die gleichseitige Dreieckskontaktendarstellung induzierten Schnyder wood). Betrachten wir nun ein beliebiges primales Dreieck, also ein solches, das einen inneren Knoten repräsentiert, so können wir analog feststellen, dass die Seitenlänge des Dreiecks identisch mit der Summe der Seitenlänge der an eine Randkante grenzenden Dualdreiecke ist. Dies ergibt die Gleichungen

$$-x_v + \sum_{f \in \mathcal{F}_c(v)} x_f = 0, \forall v \in V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}, c = 1, 2, 3.$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{F}_c(v)$  die Menge der beschränkten Gebiete im Schnyder wood, die an  $v$  grenzen und zwischen den auslaufenden Kanten der Farben  $c - 1$  und  $c + 1$  liegen. Diese korrespondieren analog mit den an die jeweilige Kante grenzenden Dualdreiecken (rot ist die horizontale, grün die linke und blau die rechte Kante).

Da wir das so entstandene Gleichungssystem nur in Abhängigkeit des Schnyder woods  $S$  formulieren können, ist dieses LGS auch für einen beliebigen Schnyder wood  $S$  auf dem Graphen verallgemeinerbar und hat die Form  $A_S x = e_1$ , wobei  $A_S$  die Koeffizienten obiger Gleichungen enthält, und  $x$  die verwendeten Variablen in der entsprechend gewählten Reihenfolge als Einträge enthält. Dabei sei bemerkt, dass  $A_S \in \mathbb{R}^{(3n-8) \times (3n-8)}$ , wobei  $n = |V|$  die Knotenzahl ist, d.h.  $A_S$  ist quadratisch.

#### 6.3.2 Eindeutige Lösbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die eindeutige Lösbarkeit des obigen Gleichungssystems beweisen, d.h.:

**Satz 6.3.1** ([Fel10c], [Ruc11]). *Sei ein Schnyder wood  $S$  auf einer planaren Triangulation gegeben. Dann ist  $A_S$  invertierbar, insbesondere besitzt  $A_S x = e_1$  die eindeutige Lösung  $x_S$ .*

Um den Beweis folgender Hilfsaussage nicht zweimal zu führen, beweisen wir schon hier ein wichtiges Resultat, das wir in Abschnitt 6.3.4 ebenfalls benötigen werden:

**Lemma 6.3.2** (vgl. [Fel10c], [Ruc11]). *Sei ein Schnyder wood  $S$  auf einer planaren Triangulation  $G$  gegeben. Seien  $x_1, x_2$  Vektoren mit  $A_S x_1 = 0$  bzw.  $A_S x_2 = e_1$ . Sei  $R$  der durch den Rand der Menge der negativen Gebiete induzierte durch  $S$  gerichtete Teilgraph von  $G$ . Dann gilt:*

(i) *Ist  $x_1 \not\geq 0$  bzw.  $x_2 \not\geq 0$ , so gibt es beschränkte Gebiete  $f_1$  bzw.  $f_2$  mit  $(x_1)_{f_1} < 0$  bzw.  $(x_2)_{f_2} < 0$ .*



(ii) Für alle  $v \in V(R)$ :

$$\deg_R^+(v) = \deg_R^-(v).$$

(iii) Der Rand der Menge an negativen Gebieten setzt sich aus kantendisjunkten gerichteten Kreisen zusammen.

Im homogenen Fall gilt Analoges für die positiven Gebiete.

*Beweis.* Die Aussage (i) folgt sofort daraus, dass im Falle der Nichtnegativität der Gebietsvariablen bei beiden Vektoren bereits der gesamte Lösungsvektor nichtnegativ ist, da sich die Knotenvariablen laut Gleichungssystem als Summe von Gebietsvariablen darstellen lassen.

Sei nun  $x \in \{x_1, x_2\}, x \not\geq 0$  ein Lösungsvektor wie angegeben. Wir definieren dann eine Abbildung  $\text{pred} : E(R) \rightarrow E(R)$  wie folgt: Sei  $e \in E(R)$  beliebig und  $v := \text{tail}(e)$ . Dann ist per definitionem eines der an  $e$  grenzenden Gebiete echt negativ und das andere nichtnegativ. Falls  $x_v \geq 0$  ist, betrachten wir die zusammenhängende Menge an negativen Gebieten startend bei  $e$  und definieren  $\text{pred}(e)$  als die in dieser Richtung nächste Randkante  $e'$  der Region, die an  $v$  grenzt. Es muss  $\text{head}(e') = v$  gelten, denn sonst wäre auch  $e'$  auslaufend und folglich läge mindestens ein Bereich  $\mathcal{F}_c(v)$  mit einem  $c \in \{1, 2, 3\}$  zwischen  $e$  und  $e'$ , wäre also komplett negativ. Laut Gleichungssystem erhielte man den Widerspruch  $0 \leq x_v = \underbrace{\sum_{f \in \mathcal{F}_c(v)} x_f}_{< 0} < 0$ .

Ist hingegen  $x_v < 0$ , so betrachten wir die bei  $e$  startende zusammenhängende Menge nichtnegativer Gebiete an  $v$  und definieren  $\text{pred}(e)$  als nächste an  $v$  angrenzende Kante  $e' \in E(R)$  in dieser Richtung. Analog wie oben folgt  $\text{head}(e') = v$ .

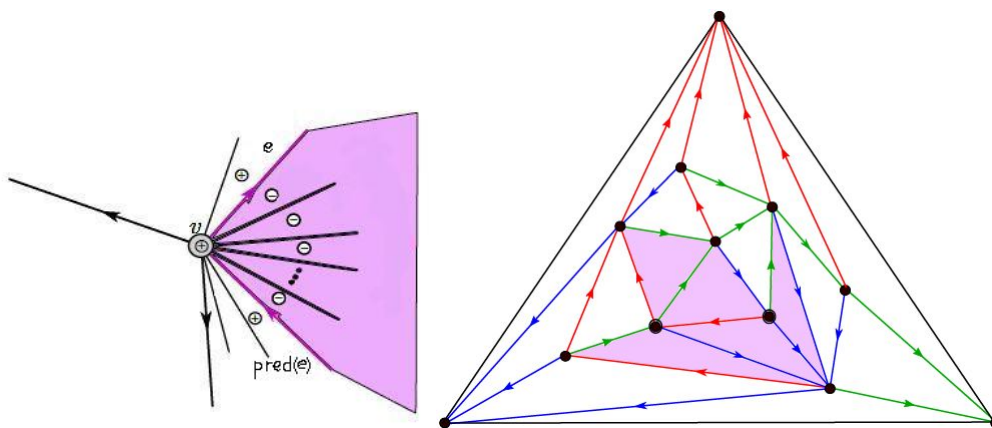


Abbildung 6.8: Links: Negative Region und Bezeichnungen im Beweis. Rechts: Schnyder wood. Die im Lösungsvektor negativen Gebietsvariablen sind markiert, der Rand bildet einen gerichteten Kreis. <sup>3</sup>

### 6.3. KONSTRUKTION

Wir zeigen nun durch Angabe einer Umkehrfunktion  $\text{succ} : E(R) \rightarrow E(R)$ , dass  $\text{pred}$  eine Bijektion ist:

Sei wieder  $e \in E(R)$  beliebig und  $v := \text{head}(e)$ . Dann ist wie eben eines der an  $e$  grenzenden Gebiete echt negativ und das andere nichtnegativ.

Sei zunächst  $v \notin \{a_1, a_2, a_3\}$  ein innerer Knoten. Im Falle  $x_v \geq 0$  betrachten wir die zusammenhängende Menge an negativen Gebieten startend bei  $e$  um  $v$  und definieren  $\text{succ}(e)$  als die in dieser Richtung nächste Randkante der Region, die zu  $v$  inzident ist. Ist  $x_v < 0$ , so betrachten wir die zusammenhängende Menge an nichtnegativen Gebieten startend bei  $e$  um  $v$  und definieren  $\text{succ}(e)$  als die nächste an  $v$  grenzende Randkante der Region in dieser Richtung. Ist dagegen  $v \in \{a_1, a_2, a_3\}$ , so definieren wir  $\text{succ}(e) = e$ .

Offensichtlich gilt  $\text{succ} \circ \text{pred} = \text{id}_{E(R)}$ . Daraus folgt zunächst die Injektivität von  $\text{pred}$  und die Surjektivität von  $\text{succ}$ , da aber Definitions- und Bildmenge identisch sind auch die Bijektivität beider sowie  $\text{pred} \circ \text{succ} = \text{id}_{E(G)}$ . Deshalb gilt für alle  $e \in E(R) : \text{head}(e) \notin \{a_1, a_2, a_3\}$ , da sonst für ein Gegenbeispiel  $e \in E(R)$  laut Definition  $e = \text{pred}(\text{succ}(e)) = \text{pred}(e)$  gälte, was nach dem oben Gezeigten falsch ist, da  $e$  von  $v := \text{tail}(e)$  auslaufend ist,  $\text{pred}(e)$  aber einlaufend. Somit folgt aus dem oben Gezeigten, dass für alle  $e \in E(R)$  einerseits:

$$\text{tail}(e) = \text{head}(\text{pred}(e))$$

und andererseits:

$$\text{head}(e) = \text{tail}(\text{succ}(e)).$$

Sei nun  $v \in V(R)$  beliebig und  $\delta^+(v), \delta^-(v)$  die Mengen der bei  $v$  ein- bzw. auslaufenden Kanten aus  $E(R)$ . Dann gilt laut eben Gezeigtem  $\text{pred}(\delta^-(v)) \subseteq \delta^+(v), \text{succ}(\delta^+(v)) \subseteq \delta^-(v)$ . Da  $\text{pred}$  und  $\text{succ}$  Bijektionen und damit kardinalitätserhaltend sind, folgt:

$$\deg_R^+(v) = |\delta^+(v)| = |\delta^-(v)| = \deg_R^-(v).$$

Gemäß 3.0.6 zerfällt  $R$  in Zusammenhangskomponenten  $R_1, \dots, R_l$ , auf die sich die in (ii) gezeigte Eigenschaft Außengrad gleich Innengrad überträgt. Gemäß eines Satzes aus [Hoc10] sind die  $R_i, i = 1, \dots, l$  eulersch, da sie zusammenhängend sind und eben genannte Bedingung erfüllen. Insbesondere folgt aus demselben Satz, dass sie und damit  $R$  in kantendisjunkte gerichtete Kreise zerfallen.

Führen wir im homogenen Fall analoge Überlegungen für  $-x$  durch, so erhalten wir entsprechende Aussagen auch für die positiven Gebiete.  $\square$

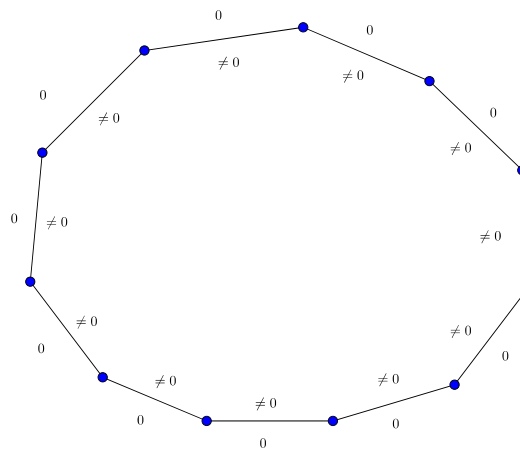
**Lemma 6.3.3.** *Sei ein Schnyder wood  $S$  auf einem 3-triangulierten Graphen gegeben. Sei  $x$  ein Vektor mit  $A_S x = 0$ . Dann gilt  $x_\Delta = 0$ , wobei  $\Delta := \mathcal{F}(a_1) \cup \mathcal{F}(a_2) \cup \mathcal{F}(a_3)$  die Menge der beschränkten Gebiete, die an einen äußeren Knoten grenzen, sei.*

<sup>3</sup>Aus [Ruc11], S. 33 und S.31

*Beweis.* Nach dem eben geführten Beweis von Lemma 4.1 ist keine Randkante zwischen positiven und negativen Gebieten inzident zu einem äußeren Knoten, d.h. entweder sind alle an einen äußeren Knoten  $a_i$  grenzenden Gebiete echt negativ oder alle nichtnegativ,  $i = 1, 2, 3$ . Dies gilt speziell für  $a_1$ . Da aber  $\sum_{f \in \mathcal{F}(a_1)} x_f = 0$  laut Gleichungssystem, ist die erste Alternative nicht möglich, d.h. alle Gebiete aus  $\mathcal{F}(a_1)$  sind nichtnegativ. Da der zugrunde liegende Graph 3-trianguliert ist, gibt es genau ein Gebiet in  $f_i \in \mathcal{F}(a_1) \cap \mathcal{F}(a_i), i = 2, 3$ , das nach eben Gezeigtem nichtnegativ ist. Folglich ist auch für  $\mathcal{F}(a_i), i = 2, 3$  die erste Alternative falsch und damit sind alle Gebiete in  $\Delta = \mathcal{F}(a_1) \cup \mathcal{F}(a_2) \cup \mathcal{F}(a_3)$  nichtnegativ. Nun gilt aber auch  $A_S(-x) = 0$ , d.h. es gibt auch keine positiven Randgebiete, also  $x_\Delta = 0$ .  $\square$

Nun zeigen wir  $A_S x = 0 \Rightarrow x = 0$ , woraus, da  $A_S$  quadratisch ist, mit Linearer Algebra die Behauptung folgt.

Sei  $x$  mit  $A_S x = 0$  beliebig. Von Lemma 4.2 wissen wir  $x_\Delta = 0$ . Angenommen,  $x \neq 0$ . Daraus folgt, dass es negative oder positive Gebiete im Innern des Schnyder woods gibt, wobei wir uns aber wegen  $x_\Delta = 0$  sicher sein können, dass diese von einer mindestens ein Gebiet "dicken" Schicht aus 0-Gebieten umgeben werden. Insbesondere gibt es also eine zusammenhängende Menge an Gebieten, die von einem Kreis berandet werden, der komplett von 0-Gebieten umgeben wird und an den von innen nur Nichtnullgebiete grenzen.



Im Folgenden wird gezeigt, dass es nur in folgendem Fall auslaufende Kanten aus einem beliebigen Randknoten  $v$  in Richtung der 0-Gebiete geben kann:

### 6.3. KONSTRUKTION

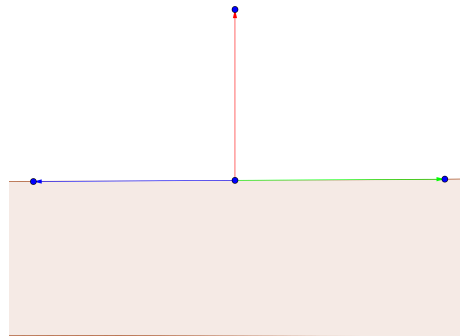


Abbildung 6.9: Typ 1

Dazu betrachten wir einen beliebigen Randknoten  $v$  und unterscheiden verschiedene Fälle.

Es gebe also eine in  $v$  startende aus der Region hinaus zeigende Kante, und mindestens eine der beiden inzidenten Regionsrandkanten sei zu  $v$  hin orientiert.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass beide zu  $v$  inzidenten Randkanten der Region einlaufend sind und es genau eine aus der Region hinaus zeigende Kante gibt. Dann gibt es exakt zwei in die Region hinein zeigende Kanten.

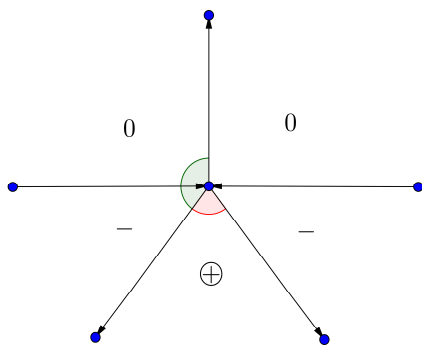
Besitzen die beiden an die einlaufenden Randkanten grenzenden Gebiete auf der Nicht-Null-Seite dasselbe Vorzeichen, so können wir evtl. nach Übergang zu  $-x$  annehmen, dass beide negativ sind. Außerdem sind die beiden Randkanten der Region gleichzeitig Randkanten zwischen negativen und nichtnegativen Gebieten. Folglich gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.3.2  $\deg_R^-(v) = \deg_R^+(v) \geq 2$ . Da an die aus der Region hinaus zeigende Kante aber nur 0-Gebiete anliegen, diese also keine Randkante ist, müssen an die beiden in die Region hinein zeigenden Kanten sowohl negative als auch nichtnegative Gebiete angrenzen, insbesondere kann es keine weiteren außer den bisher genannten Randkanten geben (da  $\deg_R^-(v) = \deg_R^+(v) = 2$ ). Damit folgt zunächst, dass jeweils zwischen den nach innen zeigenden Kanten und den beiden Regionsrandkanten nur echt negative Gebiete liegen. Da erstere auch Randkanten sind, grenzen an die Innenseiten dieser nichtnegative Gebiete. Da es wie oben gezeigt keine weiteren Randkanten gibt, müssen zwischen den beiden nach innen zeigenden Kanten aber sogar alle Gebiete nichtnegativ sein. Laut Gleichungssystem ist  $x_v$  nun einerseits die Summe der Gebietsvariablen zwischen der nach außen und der linken nach innen zeigenden Kante, andererseits die Summe der Gebietsvariablen zwischen den beiden nach innen zeigenden Kanten, d.h. es ist  $x_v < 0, x_v \geq 0$ ,

ein Widerspruch.

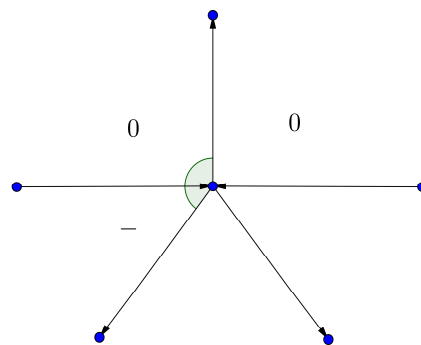
Besitzen die beiden an die Regionsrandkanten grenzenden Gebiete dagegen unterschiedliche Vorzeichen, so können wir analog wie oben (evtl. durch Übergang zu  $-x$ ) annehmen, dass links ein negatives und rechts ein positives Gebiet anliegt. Im Falle  $x_v \geq 0$  gilt laut dem Beweis von Lemma 6.3.2 und der Definition von  $\text{succ}$ , dass ( $e$  bezeichne die linke Randkante,  $e'$  die rechte)  $\text{succ}(e)$  weg zeigt, und zwischen  $e$  und  $\text{succ}(e)$  im Gegenuhrzeigersinn sämtliche an  $v$  grenzende Gebiete positiv sind. Insbesondere sind also zwischen  $e$  und der linken nach innen zeigenden Kante alle Gebiete negativ, und laut Gleichungssystem ist  $x_v$  die Summe der zugehörigen Gebietsvariablen (Plus Nullen), also  $x_v < 0 \leq x_v$ , ein Widerspruch. Wäre allerdings  $x_v \leq 0$ , so folgte mit einer analogen Argumentation, dass  $x_v > 0, x_v \leq 0$ , also auch in diesem Fall ein Widerspruch.

Nun nehmen wir das Gegenteil an, d.h. genau eine der beiden zu  $v$  inzidenten Regionsrandkanten ist zu  $v$  hin orientiert oder es gibt  $\geq 2$  nach außen zeigende in  $v$  startende Kanten. In beiden Fällen überlegt man sich leicht, dass es zwei in  $v$  startende Kanten gibt, zwischen denen nur 0-Gebiete an  $v$  angrenzen. Laut Gleichungssystem folgt sofort  $x_v = 0$ . Betrachten wir nun die Regionsrandkante, die in  $v$  endet, so ist das an diese auf der Regionsseite grenzende Gebiet (evtl. nach Übergang zu  $-x$ ) positiv, und laut Definition von  $\text{succ}$  und wegen  $x_v = 0$  liegen zwischen ihr und ihrem Bild unter  $\text{succ}$  auf der Regionsseite nur positive Gebiete. Laut Gleichungssystem ist  $x_v = 0$  damit Summe der zugehörigen Variablen und Nullen, also  $0 = x_v > 0$ , Widerspruch.

Folglich haben wir unter der Voraussetzung der Existenz einer aus der Region hinaus zeigenden und in  $v$  startenden Kante die Annahme, es gäbe eine in  $v$  einlaufende Regionsrandkante, zum Widerspruch geführt, weshalb beide an  $v$  angrenzenden Regionsrandkanten von  $v$  weg orientiert sind. Damit ist per definitionem  $v$  aber gerade von Typ 1, was die Behauptung beweist.

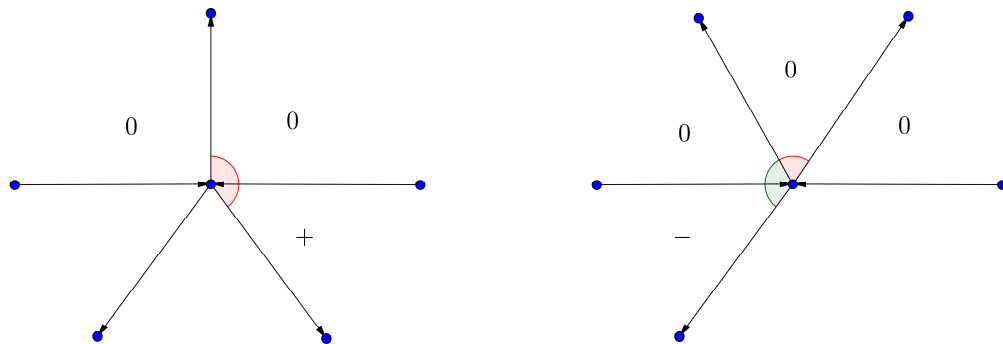


(a) Zwei einlaufende Regionsrandkanten und gleiche Vorzeichen der anliegenden Nicht-Null-Gebiete



(b) Zwei einlaufende Regionsrandkanten und verschiedene Vorzeichen der anliegenden Nicht-Null-Gebiete,  $x_v \geq 0$

### 6.3. KONSTRUKTION



(c) Zwei einlaufende Regionsrandkanten und gleiche Vorzeichen der anliegenden Nicht-Null-Gebiete,  $x_v \leq 0$

(d) Exakt eine einlaufende Regionsrandkante, beispielhaft

Abbildung 6.10: Abbildungen zu den verschiedenen Fällen

Dies wollen wir nun wiederum zu einem Widerspruch führen. Randknoten mit zwei auslaufenden Regionsrandkanten (wie in der letzten Abbildung) nennen wir von Typ 1, die restlichen von Typ 2. Nun gilt mit den oben zitierten Resultaten über Schnyder woods, dass der Graph, der entsteht, wenn wir nur die roten Kanten im Graphen berücksichtigen, einen gerichteten Baum mit Wurzel in  $a_1$  ergibt. Insbesondere muss es also von jedem Knoten des Graphen einen balancierten Pfad in der Farbe Rot zu  $a_1$  geben. Dieser muss demnach irgendwann den Regionsrand in einem Knoten schneiden. Der erste solche Schnittknoten, auf den man bei Verfolgen des Pfads trifft, muss nach dem oben Gezeigten von Typ 1 sein und wird als  $\text{lnode}(v)$  bezeichnet, falls  $v$  der Startknoten des Pfads ist. Die beiden Nachbarn eines Regionsrandknoten  $w$  werden (im Uhrzeigersinn gesehen) als  $\text{left}(w)$  bzw.  $\text{right}(w)$  bezeichnet. Ist  $w$  von Typ-1, so besitzen  $\text{left}(w), \text{right}(w)$  mindestens eine einlaufende Kante (nämlich jeweils die, die in  $w$  startet) und sind damit von Typ 2. Wir wählen nun einen beliebigen Typ-1-Knoten  $v$  aus und betrachten folgendes Verfahren:

```

w=v
iscircle=0
while iscircle==0:
    walt=w
    w=lnode(right(w))
    if walt==w:
        iscircle=1
    else:
        walt=w
        w=lnode(left(w))
        if walt==w:
            iscircle=1
    
```

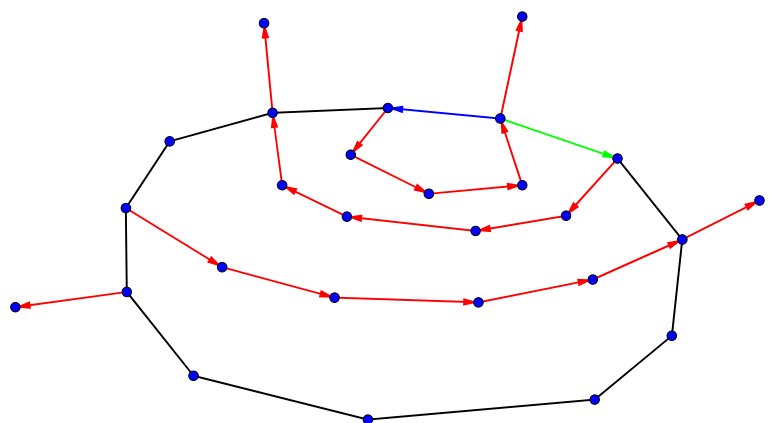


Abbildung 6.11: Das Verfahren

Wir zeigen, dass das Verfahren abbricht. Da als Startknoten für den jeweils nächsten roten balancierten Pfad abwechselnd der linke und der rechte Kreisnachbar des Endknotens des vorigen Pfades gewählt wird, bilden diese Pfade jeweils gemeinsam mit dem Regionsrand Teilregionen, die echt in der Vorgängerregion enthalten sind. Somit verkleinert sich der Abstand von  $w$  und  $walt$  auf dem Kreis mit jedem Schleifendurchlauf. Da dieser aber immer nichtnegativ ist, muss das Verfahren abbrechen, d.h. es muss zuletzt  $w=walt$  gegolten haben. Somit endet das Verfahren mit einem Typ-2 und Typ-1 Knoten (dem Nachbar vom  $walt$  bzw.  $w$ ), die benachbart und durch einen balancierten Pfad verbunden sind. Aufgrund der Struktur des Typ-1-Knotens liegt somit ein gerichteter Kreis im Schnyder wood vor, der nur zwei Farben enthält (siehe Zeichnung). Dies ist ein Widerspruch zu Satz 4.1.1 Folglich war die Annahme falsch, es gilt  $x = 0$ .

Interessant ist, dass der eben aufgeführte Beweis eine allgemeinere Aussage als die eindeutige Lösbarkeit impliziert: Man überlegt sich leicht, dass wir im Beweis samt Vorbereitungen nie ausgenutzt haben, dass für einen inneren Knoten  $v$  und  $c \in \{1, 2, 3\}$  die Beziehung  $x_v = \sum_{f \in \mathcal{F}_c(v)} x_f$  gilt, wir haben nur die Gleichheit der Vorzeichen von rechter und linker Seite verwendet. Damit können wir, die obigen Überlegungen nutzend, unter Einschränkung auf die Gebietsvariablen folgenden allgemeineren Satz formulieren:

**Satz 6.3.4.** *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einem 3-triangulierten Graphen  $G$ , und es bezeichne  $\mathcal{F}$  die Menge der beschränkten Gebiete von  $G$  bzgl.  $S$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$  beliebig, sodass gilt:*

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(a_1)} x_f = 0, \text{sign} \left( \sum_{f \in \mathcal{F}_c(v)} x_f \right) = \text{sign} \left( \sum_{f \in \mathcal{F}_{c+1}(v)} x_f \right), \forall v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3\}, c \in \{1, 2, 3\}.$$

Dann ist  $x = 0$ .

### 6.3.3 Das Verfahren

Fassen wir die Aussagen der letzten beiden Abschnitte zusammen, so überlegt man sich unten folgendes Verfahren zur Konstruktion einer gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellung auf einem gegebenen 4-zusammenhängenden 3-triangulierten Graphen. Dieses nutzt die folgende aufgrund der Konstruktion des Gleichungssystems leicht einsichtige Aussage aus:

**Satz 6.3.5** ([Fel10c], [Ruc11]). *Sei  $G$  eine 4-zusammenhängende planare Triangulation mit Außengebiet  $a_1 a_2 a_3$  und  $S$  ein Schnyder wood auf  $G$ . Ist dann der Lösungsvektor  $x_S$  des Systems  $A_S x = e_1$  nichtnegativ, so existiert eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$  mit Kontakten gemäß  $S$ . Dabei besitzt das einen Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  repräsentierende Dreieck die Seitenlänge  $x_v > 0$ .*

*Beweis.* Es lassen sich die Dreiecke bspw. einfach entlang der Äste des Baumes  $T_1$  in der Präordnung im Gegenuhrzeigersinn setzen. Die Position der Spitze eines Dreiecks gehörig zum Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  auf das Dreieck zum Knoten  $\text{par}_r(v)$  erhält man dabei aus den Variablenwerten der links und rechts von der Spitze liegenden Dual-Dreiecke, die also Gebiete im Graphen repräsentieren. Da der Vektor  $x_S \geq 0$  das Gleichungssystem löst, muss die Konstruktion

### 6.3. KONSTRUKTION

eine evtl. degenerierte gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung ergeben. Dabei gilt insbesondere, dass das Rahmendreieck gleichseitig mit Seitenlänge 1 ist, da die Innenwinkel durch jeweils  $60^\circ$  gegeben sind.

Dass die gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung nicht entartet, d.h. dass  $x_S > 0$ , folgt analog wie im Beweis von 6.2.6. Es sei bemerkt, dass die Konstruktion einer gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellung bei bekanntem  $x_S \geq 0$  in Linearzeit bzgl.  $n := |V(G)|$  erfolgen kann.  $\square$

Nun existieren im Allgemeinen aber sehr viele verschiedene Schnyder woods auf einer planaren Triangulation (siehe bspw. [FZ08]), von denen die meisten tlw. negative Lösungsvektoreinträge besitzen. Daher versucht man im folgenden Verfahren durch Änderung des Gleichungssystem zugrundeliegenden Schnyder woods einen Schnyder wood zu erhalten, bei dem z. B. weniger negative Lösungsvektoreinträge vorhanden sind, sodass nach endlich vielen Wechseln ein nichtnegativer Schnyder wood erreicht wird. Das Verfahren wurde von Stefan Felsner entwickelt.

**Algorithmus 6.3.6** ([Fel10c], [Ruc11]). *Gegeben sei ein 3-triangulierter 4-zusammenhängender Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1 a_2 a_3$ .*

- (1) Konstruiere mit Algorithmus 4.2.2 einen Schnyder wood  $S$  auf  $G$ .
- (2) Berechne die (eindeutige, siehe 6.3.1) Lösung  $x_S$  des Gleichungssystems  $A_S x = e_1$ .
- (3) Wenn  $x_S \not\geq 0$ : Gehe von  $S$  zu einem anderen Schnyder wood  $S'$  über und verwende dabei möglichst die Informationen über die Lösungsvektoreinträge. Setze  $S = S'$  und gehe zu 2.
- (4) Konstruiere aus den Einträgen von  $x_S \geq 0$  und  $S$  eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ , Abbruch.

**Ausgabe:** Eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ .

Da wir in jedem Durchlauf von  $S_2, S_3$  den Schnyder wood wechseln und das Verfahren rekursiv anwenden, gelangen wir aufgrund der endlichen Zahl an Schnyder woods auf  $G$  entweder in endlicher Zeit zu  $S_4$  und damit zu einer Dreieckskontaktdarstellung, oder wir geraten in einen Zyklus, wobei wir ständig dieselben Schnyder woods zyklisch durchlaufen.

#### 6.3.4 Flip-Aktionen

Um die Variable im eben vorgestellten Verfahren, nämlich den Wechsel vom Schnyder wood  $S$  zu  $S'$  durchzuführen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Flip-Aktionen genannt werden. Diese sollten immer anwendbar sein und die Informationen über die Lösungsvektoreinträge möglichst so ausnutzen, dass wir irgendwann zu einem nichtnegativen Schnyder wood und damit zu einer gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellung gelangen. Eine erste Möglichkeit, um zwischen verschiedenen Schnyder woods zu wechseln, sind die sogenannten triangular flips. Diese werden auf gerichtete Dreiecke (oder Gebiete oder Flächen), also gerichtete Kreise der Länge 3, angewendet. Dabei wird jede der auslaufenden Kanten um den Startknoten wie ein Schalter innerhalb des Dreiecks "umgelegt":



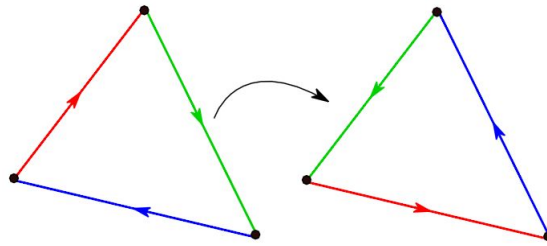


Abbildung 6.12: triangular flip <sup>4</sup>

Wie man sich anhand von (S1) überlegt, ist die Schnyder wood-Eigenschaft invariant unter triangular flips. Eine für uns wichtige Eigenschaft der triangular flips wird durch folgende Aussage beschrieben:

**Satz 6.3.7** ([Fel10c], [Ruc11]). *Gegeben sei ein Schnyder wood  $S$  auf  $G$  und  $f$  sei ein gerichtetes Gebiet in  $S$  (wir nennen es dann auch flippbar). Sei  $S'$  der Schnyder wood, der aus  $S$  durch den triangular flip auf  $f$  entsteht. Dann gilt für die Lösungsvektoreinträge bei  $f$ :*

$$\text{sign}(x_f) = -\text{sign}(x'_f).$$

*Beweis.* Der Beweis baut auf einem anderen Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems von Stefan Felsner auf, weshalb wir ihn hier nicht vorführen wollen, er kann in [Ruc11] gefunden werden. Die Methode, die dort zum Beweis verwendet wurde, werden wir im Anhang A im Zusammenhang mit Fünfecken noch einmal ausführlich erläutern.  $\square$

Dieses Resultat lässt nun die Idee aufkommen, im Schnyder wood  $S$  negative gerichtete Dreiecke zu flippen, um diese gemäß Satz 14 nichtnegativ zu machen. Hier stellen sich allerdings mehrere Fragen:

1. Welche negativen Gebiete sollen geflippt werden? Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann z.B. einfach alle Flächen der Reihenfolge nach durchgehen und das erste negative flippbare Gebiet, auf das man trifft, flippen. Hier treten allerdings oft Zyklen auf, d.h. wir flippen immer die selben Gebiete hintereinander und gelangen folglich nie zu einem nichtnegativen Schnyder wood. Um dieses Problem zu umgehen, kann man das zu flippende Gebiet auch zufällig wählen. Diese Art von Flip-Regel ist aber für Endlichkeitsbeweise eher ungeeignet.

2. Was passiert mit den restlichen Gebieten, wenn wir ein negatives Gebiet flippen? Tatsächlich ist es oft der Fall, dass Gebiete, die vorher nichtnegativ waren, durch den Flip eines negativen Gebiets negativ werden. Um dies besser kontrollieren zu können, muss man die Beschaffenheit der Lösungsvektoren genauer analysieren.

3. Gibt es überhaupt negative flippbare Flächen? Dies ist im Allgemeinen nämlich tatsächlich nicht der Fall. Man kann leicht Gegenbeispiele konstruieren, wie bspw. in (der ersten) unten

<sup>4</sup>Aus [Ruc11], S. 12

### 6.3. KONSTRUKTION

folgenden Abbildung. Insbesondere ist also die Durchführbarkeit des Verfahrens nicht immer gesichert.

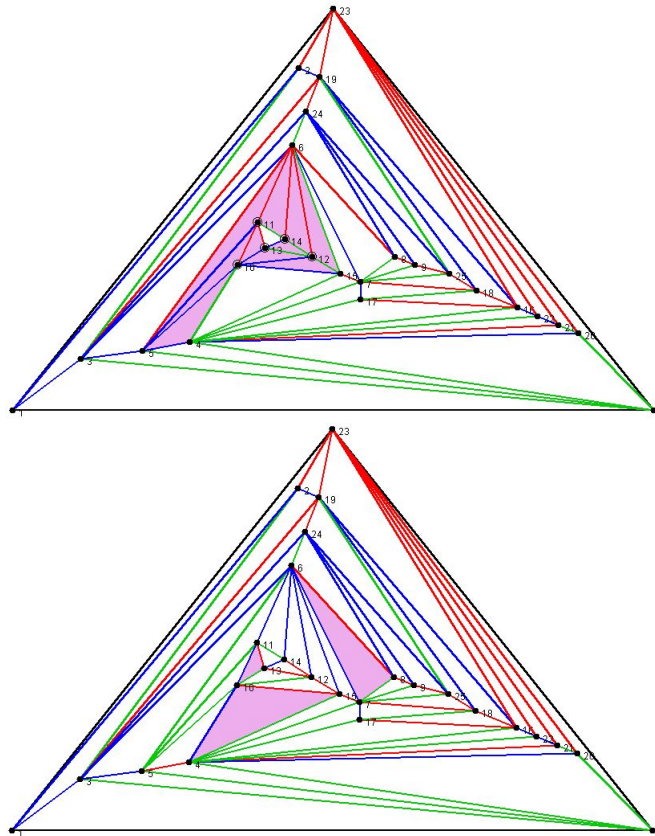


Abbildung 6.13: Schnyder wood ohne flippbare negative Gebiete und daraus entstehender Schnyder wood nach Umdrehen aller unregelmäßiger Kanten.

Aufgrund der geschilderten Probleme ist es vermutlich besser, ein anderes Verfahren zu wählen: Man ignoriert auf dem gegebenen Schnyder wood die Farben und betrachtet nur die induzierte 3-Orientierung. Nun dreht man alle sogenannten unregelmäßigen Kanten, die also auf dem Rand einer negativen Region verlaufen, um. Da wir in Lemma 11 gesehen haben, dass negative Regionen von gerichteten Kreisen im Schnyder wood berandet werden, besitzt jeder Randknoten gleich viele einlaufende wie auslaufende unregelmäßige Kanten. Obige Operation erhält also die Eigenschaft, dass jeder innere Knoten exakt 3 ausgehende Kanten besitzt. Nach Satz 4.2.3 kann man auf jeder 3-Orientierung einen bis auf Farbenpermutationen eindeutigen Schnyder wood konstruieren, und das in Linearzeit bzgl. der Knotenzahl. Tun wir dies, so sind wir vom Schnyder wood  $S$  zu einem Schnyder wood  $S'$  auf dem Ausgangsgraphen übergegangen und haben so eine immer anwendbare Flip-Aktion definiert.

Offen bleibt natürlich, ob bei Verwendung dieser Flip-Regel Algorithmus 6.3.6 auch immer

## KAPITEL 6. GLEICHSEITIGE DREIECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

terminiert, und wie schnell er dies ggf. tut. Einem Programm von Julia Rucker zufolge, das sie mir freundlicherweise zur Verfügung stellte, tut dies bei allen bisher betrachteten Beispielen mit beachtlicher Geschwindigkeit (Die betrachteten Beispiele von Graphen mit tlw. mehreren hundert Knoten wiesen allesamt Iterationszahlen im einstelligen Bereich auf, siehe [Ruc11] für eine genauere Erläuterung).

## Kapitel 7

# Weitere Überlegungen und offene Probleme

In diesem Abschnitt wollen wir einige Überlegungen zu verschiedenen Themen zu den DreieckskontaktDarstellungen machen. Dabei machen wir uns Gedanken über die Plausibilität der Endlichkeit des in Abschnitt 6.3.3 vorgestellten Verfahrens und skizzieren Beweisansätze. Zudem denken wir über weitere Flip-Regeln nach, welche möglicherweise ebenfalls endliche Algorithmen zur Bestimmung eines nichtnegativen Schnyder woods liefern, und insbesondere deren Endlichkeit plausibel erscheint.

### 7.1 Eindeutigkeit

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, wurde von Goncalves et al. in [GLP10] gezeigt, dass jeder 4-zusammenhängende 3-triangulierte Graph eine gleichseitige DreieckskontaktDarstellung besitzt. Im selben Paper vermuten sie darüber hinaus, dass diese DreieckskontaktDarstellungen bis auf Skalierung eindeutig sind, d.h., dass jeder 4-zusammenhängende planar eingebettete 3-triangulierte Graph genau eine gleichseitige DreieckskontaktDarstellung besitzt. Diese Vermutung wollen wir kurz aus der Perspektive des Gleichungssystems betrachten. Zunächst formulieren wir sie äquivalent in eine leichter zu handhabende Aussage um:

**Satz 7.1.1.** *Gegeben sei eine 4-zusammenhängende planare Triangulation  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$ . Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine bis auf Skalierung eindeutige gleichseitige DreieckskontaktDarstellung von  $G$ .*

(ii) *Für beliebige Schnyder woods  $S_1, S_2$  auf  $G$  gilt  $x_{S_1}, x_{S_2} \geq 0 \Rightarrow x_{S_1} = x_{S_2}$ .*

*Beweis.* Nach Satz 6.2.6 existieren gleichseitige DreieckskontaktDarstellungen von  $G$ . Der Lösungsvektor  $x_S$ , wobei  $S$  ein durch solch eine DreieckskontaktDarstellung induzierter Schnyder wood ist, setzt sich aus den nichtnegativen Seitenlängen der die Knoten bzw. Gebiete repräsentierenden gleichseitigen Dreiecke zusammen (evtl. nach Skalierung des Rahmendreiecks auf

Seitenlänge 1), da diese offensichtlich das zugehörige Gleichungssystem erfüllen. Hierbei ist  $x_S$  unabhängig von der Wahl des die Kontakte der Dreieckskontaktdarstellung beschreibenden Schnyder woods  $S$ , denn dieser ist (offenbar) nur dann nicht eindeutig, wenn Nulleinträge bei Gebieten im Lösungsvektor auftauchen bzw. drei Dreiecke in einem Punkt zusammen stoßen. In diesem Fall gibt es dann pro solchem Kontakt bzw. pro Nulleintrag zwei Variationen des Schnyder woods: Das Gebiet mit Nulleintrag kann im Schnyder wood entweder im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn orientiert werden. In diesem Fall ändert sich dennoch nichts am Lösungsvektor, da die Unterschiede bei den zugehörigen Gleichungssystemen nur bei diesen degenerierenden Gebieten auftreten, deren Variablen aber in beiden Lösungsvektoren 0 sein müssen, weshalb die Gleichungssysteme als gleich betrachtet werden können und damit die zugehörigen Lösungsvektoren identisch sind.

Umgekehrt existiert für einen Schnyder wood  $S$  mit  $x_S \geq 0$  nach Satz 6.3.5 eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$  mit Seitenlängen der auftauchenden Dreiecke gemäß  $S$ .

Somit lässt sich jedem nichtnegativen Lösungsvektor bzgl. einem Schnyder wood auf  $G$  eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung zuordnen und umgekehrt. Betrachten wir zwei Dreieckskontaktdarstellungen, die durch Skalieren auseinander hervorgehen als identisch (und definieren so Äquivalenzklassen), so verknüpfen sich die so definierten beiden Abbildungen in beiden Reihenfolgen zur Einheitsabbildung, sind also bijektiv. Insbesondere ist gezeigt, dass die Mengen

$\{x_S \geq 0 \mid S \text{ ist Schnyder wood auf } G\}$  und

$\{D \mid D \text{ ist eine bis auf Skalieren bestimmte gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung auf } G\}$

dieselbe Kardinalität besitzen, und folglich (i) genau dann erfüllt ist, wenn diese beiden Mengen genau ein Element besitzen, d.h. wenn genau ein  $x_S \geq 0$ ,  $S$  Schnyder wood auf  $G$  existiert. Da mindestens ein solcher Vektor existiert (siehe anfängliche Überlegungen), ist dies zu (ii) äquivalent und die Behauptung gezeigt.  $\square$

Für den Beweis der Aussage (ii) des Satzes gibt es folgende Möglichkeit:

(U): Man zeigt, dass das Umdrehen der Kanten eines eulerschen gerichteten Teilgraphen einer 3-Orientierung gemäß einem nichtnegativen Schnyder wood  $S_0$  die Vorzeichen des zugehörigen Lösungsvektors nicht unverändert lässt, sofern es den Vektor verändert.

Seien unter der Annahme der Korrektheit dieser Aussage  $S_0$  und  $S$  Schnyder woods, beide nichtnegativ, auf dem zugrundeliegenden Graphen. Wir betrachten die Menge  $E(S_0, S)$  der orientierten Kanten im zugrunde liegenden Graphen  $G$ , die in  $S_0$  und  $S$  eine unterschiedliche Orientierung besitzen. Dann erhält man die  $S$  zugrundeliegende 3-Orientierung aus der von  $S_0$ , in dem man alle Kanten aus  $E(S_0, S)$  in der zu  $S_0$  gehörigen Orientierung umdreht und die entstehende Orientierung mit bekannten Verfahren wieder färbt. Nun ist der durch  $E(S_0, S)$  erzeugte Teil-Digraph der 3-Orientierung von  $S_0$  darüber hinaus eulersch, denn laut Definition einer 3-Orientierung

## 7.1. EINDEUTIGKEIT

erhält man für die Außengrade in  $S_0, S$  bzw. den durch  $E(S_0, S)$  induzierten Teilgraphen  $G'$  die Beziehung

$$3 = \deg_{S_0}^-(v) = \deg_{S_0}^-(v) + \deg_{G'}^+(v) - \deg_{G'}^-(v) = 3 + \deg_{G'}^+(v) - \deg_{G'}^-(v), \forall v \in V(G'),$$

da Kanten umgekehrt werden, also  $\deg_{G'}^+(v) = \deg_{G'}^-(v), \forall v \in V(G')$ . Aus einem bereits in 6.3 verwendeten Satz aus [Hoc10] erhält man, dass  $G'$  eulersch ist. Da wir obige Aussage als richtig angenommen haben, ist entweder  $x_{S_0} = x_S$  oder das Vorzeichen mindestens eines Lösungsvektoreintrags verschieden. Letzteres stellt aber einen offensichtlichen Widerspruch zu  $x_{S_0}, x_S \geq 0$  dar, es muss also  $x_{S_0} = x_S$  gelten. Da  $S_0, S$  beliebig als nichtnegative Schnyder woods gewählt waren, folgt dann Teil (ii) aus 7.1.1 und somit die Existenz einer bis auf Skalierung eindeutigen gleichseitigen Dreieckskontaktendarstellung.

Die Aussage (U) ist in gewissem Sinne ein Verallgemeinerung von Satz 6.3.7 auf größere eulersche Digraphen wie flippbare Gebiete bzw. 3er-Kreise. Hier lässt sich allerdings der für Satz 6.3.7 von Stefan Felsner geführte Beweis, der auf dem Zählen von Matchings eines gewissen Hilfsgraphen aufbaut, kaum verallgemeinern, da sich in der Darstellung eines Lösungsvektoreintrags  $(x_S)_f = \frac{\det([A_S]_{1,f})}{\det(A_S)}$  nicht nur der Nenner, sondern i.d.R. auch der Zähler des Bruchs beim Übergang zu einem anderen Schnyder wood verändern wird.

Man könnte versuchen, Satz 6.3.4 für den Beweis der Aussage (U) zum Einsatz zu bringen. Die Idee dabei ist die folgende:

Ausgehend von zwei nichtnegativen Schnyder woods  $S, S'$  versucht man einen Vektor  $x$  zu konstruieren, der die Voraussetzungen von Satz 6.3.4 erfüllt und demnach mit dem Nullvektor identisch sein muss. Hierbei sollte der Vektor  $x$  so konstruiert werden, dass aus  $x = 0$  die Beziehung  $x_S = x_{S'}$  folgt.

Sei wieder wie oben  $E(S, S')$  die Kantenmenge, deren Orientierung in  $S, S'$  verschieden ist, und  $F(S, S')$  die Menge der Gebiete, die mindestens eine solche Kante enthalten. Dann bietet es sich an, für ein beschränktes Gebiet  $f \notin F(S, S')$  den Vektoreintrag  $x_f$  als  $(x_S - x_{S'})_f$  anzusetzen, da dann einerseits aus  $x_f = 0$  die Gleichheit  $(x_S)_f = (x_{S'})_f$  folgt, und andererseits aus den Schnyder wood-Regeln (S1), (S2) das Erfülltsein der Voraussetzungen aus Satz 6.3.4 bei den nicht in einer der umzudrehenden Kanten enthaltenen Knoten sowie für  $\mathcal{F}(a_1)$  folgt. Die Variablen bei an solche Kanten angrenzenden Gebieten müssen anders bestimmt werden, da hier Unterschiede in den Gleichungssystemen bzgl. der Schnyder woods  $S, S'$  auftreten. Die Hoffnung ist, dass dadurch, dass in Satz 6.3.4 nur Vorzeichengleichheit verlangt wird, genügend Spielraum für die Festlegung dieser Variablen gegeben ist und insbesondere die Information  $x_S, x_{S'} \geq 0$  ausgenutzt werden kann.

Dies ist bisher allerdings nur ein Ansatz, bisher wurde noch keine geeignete Definition des Vektors  $x$  gefunden, um oben genannte Eigenschaften zu garantieren. Zur Illustration der Idee für "kleine" gerichtete Kreise wollen wir Satz 6.3.7 unter einer kleinen zusätzlichen Voraussetzung nur unter Verwendung von Satz 6.3.4 beweisen:

**Satz 7.1.2.** Gegeben sei ein Schnyder wood  $S$  auf einer planaren Triangulation  $G$ ,  $f$  sei ein beschränktes Gebiet in  $G$ , das in  $S$  flippbar ist und  $S'$  der aus  $S$  durch den triangular flip auf  $f$  entstehende Schnyder wood. Dann gilt für die Lösungsvektoreinträge von  $S$  bzw.  $S'$  bei  $f$ :

$$\text{sign}(x_f) = -\text{sign}(x'_f),$$

sofern die Lösungsvektoreinträge bei den drei in  $f$  enthaltenen Knoten in  $S$  und  $S'$  jeweils paarweise verschieden sind.

*Beweis.* Seien  $x_S, x_{S'}$  die Lösungsvektoren der zu  $S, S'$  gehörigen Gleichungssysteme, sowie  $v_1, v_2, v_3$  die im Rand des Gebiets enthaltenen (inneren) Knoten.

Zunächst können wir annehmen, dass  $x_f, x'_f \neq 0$ , denn sonst gälte  $A_S x_S = e_1$  bzw.  $A_{S'} x_{S'} = e_1$ , da sich  $A_S$  und  $A_{S'}$  nur in der zu  $f$  gehörigen Spalte unterscheiden, und damit aufgrund der in Satz 6.3.1 gezeigten eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungssysteme  $x_S = x_{S'}$  und damit auch  $x_f = x'_f = 0$ , womit in diesem Fall die Behauptung bereits gezeigt wäre.

Nun verwenden wir die Verallgemeinerung der Aussage über die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems, Satz 6.3.4. Wir definieren vier Vektoren  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$  durch:

$$\begin{aligned} (x_1)_{\mathcal{F} \setminus \{f\}} &:= (x_2)_{\mathcal{F} \setminus \{f\}} := (x_3)_{\mathcal{F} \setminus \{f\}} := (x_4)_{\mathcal{F} \setminus \{f\}} := (x_S - x'_{S'})_{\mathcal{F} \setminus \{f\}}, \\ (x_1)_f &:= x_f + x'_f, (x_2)_f := x_f, (x_3)_f := -(x_f + x'_f), (x_4)_f := -x'_f. \end{aligned}$$

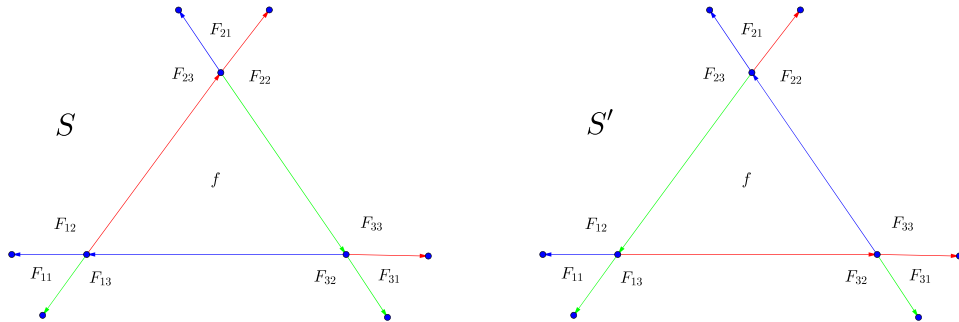


Abbildung 7.1: Bezeichnungen im Beweis vor und nach dem triangular flip auf  $f$ . Insbesondere gehören die Gebietsmengen  $F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}$  zu  $v_i, i = 1, 2, 3$ .

Seien die Mengen der Gebiete um die in  $f$  enthaltenen Knoten  $v_i, i = 1, 2, 3$  wie in der Abbildung mit  $F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}$  bezeichnet und  $f$  o.E. im Uhrzeigersinn orientiert (sonst "spiegeln" wir die Überlegungen). Laut der Definition der zu  $S, S'$  gehörigen Gleichungssysteme gilt dann für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_S)_g = \sum_{g \in F_{i2}} (x_S)_g = \sum_{g \in F_{i3}} (x_S)_g + x_f$$

und

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_{S'})_g = \sum_{g \in F_{i2}} (x_{S'})_g + x'_f = \sum_{g \in F_{i3}} (x_{S'})_g.$$

## 7.1. EINDEUTIGKEIT

Nach Subtraktion der Gleichungen und unter Beachtung der Definitionen von  $x_k, k = 1, 2, 3, 4$  erhält man dann:

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_1)_g + x'_f = \sum_{g \in F_{i2}} (x_1)_g = \sum_{g \in F_{i3} \cup \{f\}} (x_1)_g, i = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_2)_g = \sum_{g \in F_{i2}} (x_2)_g - x'_f = \sum_{g \in F_{i3} \cup \{f\}} (x_2)_g, i = 1, 2, 3, \quad (7.2)$$

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_3)_g - x_f = \sum_{g \in F_{i2} \cup \{f\}} (x_3)_g = \sum_{g \in F_{i3}} (x_3)_g, i = 1, 2, 3, \quad (7.3)$$

$$\sum_{g \in F_{i1}} (x_4)_g = \sum_{g \in F_{i2} \cup \{f\}} (x_4)_g = \sum_{g \in F_{i3}} (x_4)_g + x_f, i = 1, 2, 3. \quad (7.4)$$

Aus der Definition der Vektoren  $x_1, \dots, x_4$  folgt darüber hinaus, dass alle Bedingungen aus Satz 6.3.4 bis auf die zu den  $v_i, i = 1, 2, 3$  gehörigen erfüllt sind. Dabei beziehen wir uns im Fall  $k \in \{1, 2\}$  auf  $S$  und im Fall  $k \in \{3, 4\}$  auf  $S'$ . Sei nun  $k = 1, \dots, 4$  beliebig. Angenommen, die Bedingungen aus Satz 6.3.4 sind für  $x_k$  auch an den  $v_i, i = 1, 2, 3$  erfüllt. Gemäß selbigem folgt dann  $x_k = 0$ , also insbesondere  $(x_k)_f = 0$  und damit  $x_f + x'_f = 0$  im Fall  $k \in \{1, 3\}$  und  $x_f = 0$  für  $k = 2$  sowie  $x'_f = 0$  für  $k = 4$ , wobei die letzteren beiden Fälle oben ausgeschlossen wurden. Im ersten Fall folgt sofort  $x_f = -x'_f$  und damit die Behauptung.

Somit können wir weiter annehmen, dass es für jedes  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  ein  $i_k \in \{1, 2, 3\}$  gibt, für welches bei  $v_{i_k}$  die Bedingungen in Satz 6.3.4 verletzt sind. Aufgrund der Gleichungen (1)-(4) (s.o.) muss dann

$$\text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_1 1}} (x_1)_g \right) \neq \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_1 1}} (x_1)_g + x'_f \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_1 2}} (x_1)_g \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_1 3} \cup \{f\}} (x_1)_g \right),$$

$$\text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_2 2}} (x_2)_g \right) \neq \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_2 2}} (x_2)_g - x'_f \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_2 1}} (x_2)_g \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_2 3} \cup \{f\}} (x_2)_g \right),$$

$$\text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_3 3}} (x_3)_g \right) \neq \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_3 3}} (x_3)_g - x_f \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_3 2} \cup \{f\}} (x_3)_g \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_3 1}} (x_3)_g \right),$$

$$\text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_4 4}} (x_4)_g \right) \neq \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_4 4}} (x_4)_g + x_f \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_4 1}} (x_4)_g \right) = \text{sign} \left( \sum_{g \in F_{i_4 2} \cup \{f\}} (x_4)_g \right)$$

gelten. Daraus schließt man zunächst  $i_1 \neq i_2, i_3 \neq i_4$ , insbesondere gibt es also ein  $j \in \{i_1, i_2\} \cap \{i_3, i_4\}$ . Durch Betrachtung der jeweils ersten Ungleichheit erhält man darüberhinaus:

$$x'_f \sum_{g \in F_{i_1 1}} (x_1)_g \leq 0, x'_f \sum_{g \in F_{i_2 1}} (x_2)_g \leq 0, x_f \sum_{g \in F_{i_3 1}} (x_3)_g \geq 0, x_f \sum_{g \in F_{i_4 1}} (x_4)_g \geq 0.$$



Damit gilt insbesondere für  $j$ :  $x'_f \sum_{g \in F_{j1}} (x_1)_g \leq 0, x_f \sum_{g \in F_{j1}} (x_1)_g \geq 0$ . Ist  $\sum_{g \in F_{j1}} (x_j)_g \neq 0$ , so erhalten wir offensichtlich wegen  $x_f, x'_f \neq 0$  die Behauptung. Ist dagegen  $\sum_{g \in F_{j1}} (x_j)_g = 0$ , so folgt, wenn  $v$  den Knoten bei  $j$  bezeichnet,  $(x_S)_v = (x_{S'})_v$ , im Widerspruch zur zusätzlichen Annahme. Somit ist die Behauptung in allen betrachteten Fällen gezeigt.  $\square$

## 7.2 Weitere Flip-Aktionen

In diesem Abschnitt wollen wir zwei weitere Varianten von Flip-Aktionen einführen, die im Gegensatz zum in 6.3.6 vorgestellten Verfahren auf triangular flips basieren. Die Idee dafür ergibt sich aus der Untersuchung der Sensitivität des Lösungsvektors gegenüber triangular flips, dem folgenden

**Satz 7.2.1.** *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einer planaren Triangulation,  $f$  ein in  $S$  flipbares Gebiet und  $S'$  der durch den triangular flip auf  $f$  entstehende Schnyder wood. Seien  $x := x_S, x' := x_{S'}$  die Lösungsvektoren der zugehörigen Gleichungssysteme. Dann gilt, wobei  $\|\cdot\|_1$  die Summennorm sowie die dadurch induzierte Spaltensummennorm bezeichnet,*

$$\|x' - x\|_1 \leq 3 \min(\|A_S^{-1}\|_1, \|A_{S'}^{-1}\|_1) \left(1 + \left| \frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})} \right| \right) |x_f|.$$

Außerdem gilt, wobei  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm und die Spektralnorm bezeichnet:

$$\|x' - x\|_2 \leq \sqrt{3} \min(\|A_S^{-1}\|_2, \|A_{S'}^{-1}\|_2) \sqrt{1 + \left( \frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})} \right)^2} |x_f|.$$

*Beweis.* Da  $x, x'$  Lösungsvektoren der zu den Schnyder woods gehörigen Gleichungssysteme sind, gilt:  $A_S x = e_1 = A_{S'} x'$ . Wir bezeichnen mit  $(A_S)_{\cdot f}, (A_{S'})_{\cdot f}$  die Spaltenvektoren der Matrizen  $A_S, A_{S'}$  bei  $f$  und mit  $(A_S)_{\setminus f}, (A_{S'})_{\setminus f} \in \mathbb{R}^{(3n-8) \times (3n-9)}$  die aus  $A_S, A_{S'}$  durch Streichen dieser Spalten entstehenden Matrizen. Analog bezeichnen wir mit  $x_{\setminus f}, x'_{\setminus f} \in \mathbb{R}^{3n-9}$  die aus  $x, x'$  durch Streichen des zu  $f$  gehörigen Eintrags entstehenden Vektoren. Dann gilt folglich:

$$(A_S)_{\setminus f} x_{\setminus f} + (A_S)_{\cdot f} x_f = A_S x_S = A_{S'} x_{S'} = (A_{S'})_{\setminus f} x'_{\setminus f} + (A_{S'})_{\cdot f} x'_f.$$

Da der triangular flip auf  $f$  an der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems nur die zu  $f$  gehörige Spalte verändert, kann man dies umschreiben zu

$$(A_S)_{\setminus f} (x' - x)_{\setminus f} = x_f (A_S)_{\cdot f} - x'_f (A_{S'})_{\cdot f}$$

Wir definieren den Vektor  $x^0 \in \mathbb{R}^{3n-8}$  nun dadurch, dass  $x_f^0 = 0, (x^0)_{\setminus f} = (x' - x)_{\setminus f}$ . Zudem überlegt man sich aufgrund der Konstruktion des Gleichungssystems, und da  $S$  und  $S'$  sich nur durch den triangular flip auf  $f$  unterscheiden, dass der Vektor  $x_f (A_S)_{\cdot f} - x'_f (A_{S'})_{\cdot f}$  exakt 6 Nichtnull-Einträge besitzt, und zwar  $x_f, -x'_f, x_f, -x'_f, x_f, -x'_f$ . Somit erhält man

$$\|x_f (A_S)_{\cdot f} - x'_f (A_{S'})_{\cdot f}\|_1 = 3(|x_f| + |x'_f|), \|x_f (A_S)_{\cdot f} - x'_f (A_{S'})_{\cdot f}\|_2 = \sqrt{3} \sqrt{x_f^2 + x'^2}.$$

## 7.2. WEITERE FLIP-AKTIONEN

Da darüber hinaus wegen  $x_f^0 = 0$  gilt:

$$x^0 = A_S^{-1}(A_S)_{\setminus f}(x' - x)_{\setminus f} = A_S^{-1}(x_f(A_S)_{.f} - x_{f'}(A_{S'})_{.f}),$$

erhält man mit der Verträglichkeit der genannten Vektor- und Matrixnormen, dass:

$$\|x' - x\|_1 = \|x^0\|_1 \leq 3\|A_S^{-1}\|_1(|x_f| + |x'_f|),$$

$$\|x' - x\|_2 = \|x^0\|_2 \leq \sqrt{3}\|A_S^{-1}\|_2\sqrt{x_f^2 + x'_f{}^2}.$$

Nun lässt sich nach der Cramer'schen Regel  $x_f = \frac{\det([A_S]_{1,f})}{\det(A_S)}$ ,  $x'_f = \frac{\det([A_{S'}]_{1,f})}{\det(A_{S'})}$  schreiben, wobei für eine Matrix  $B$  und Zeilen- bzw. Spaltenindizes  $i, j$   $[B]_{i,j}$  die Matrix bezeichne, die aus  $B$  durch Streichen der  $i$  ten Zeile und  $j$  ten Spalte hervorgeht. Folglich erhält man  $\frac{x'_f}{x_f} = \frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})}$  und somit die Ungleichungen:

$$\|x' - x\|_1 = \|x^0\|_1 \leq 3\|A_S^{-1}\|_1\left(1 + \left|\frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})}\right|\right)|x_f|,$$

$$\|x' - x\|_2 = \|x^0\|_2 \leq \sqrt{3}\|A_S^{-1}\|_2\sqrt{1 + \left(\frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})}\right)^2}|x_f|.$$

Nun gilt selbiges natürlich auch, wenn wir in obiger Matrixnorm statt  $A_S$   $A_{S'}$  betrachten, denn  $(A_S)_{\setminus f} = (A_{S'})_{\setminus f}$ . Außerdem können wir unabhängig davon das Gebiet "rückwärts" flippen, d.h. in den Ungleichungen  $S$  und  $S'$  (allerdings auch  $x$  und  $x'$ !) vertauschen und erhalten dadurch die behaupteten Ungleichungen

$$\|x' - x\|_1 \leq 3 \min(\|A_S^{-1}\|_1, \|A_{S'}^{-1}\|_1)\left(1 + \left|\frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})}\right|\right)|x_f|,$$

$$\|x' - x\|_2 \leq \sqrt{3} \min(\|A_S^{-1}\|_2, \|A_{S'}^{-1}\|_2)\sqrt{1 + \left(\frac{\det(A_S)}{\det(A_{S'})}\right)^2}|x_f|.$$

□

Dieser Satz ist zwar für den Beweis konkreter weiterer Aussagen unbrauchbar, fungiert allerdings als Ideengeber für die erste der beiden nun vorgestellten Flip-Aktionen: Die rechte Seite beider obiger Ungleichungen ist in gewissem Sinne proportional zur absoluten Größe von  $x_f$ , da man in der Regel davon ausgehen kann, dass sich die Größen  $|\det(A_S)|$ ,  $\|A_S^{-1}\|_i$ ,  $i = 1, 2$ , verhältnismäßig gering durch einen triangular flip auf dem betrachteten Schnyder wood  $S$  ändern (wir wollen hier allerdings nicht weiter ins Detail gehen).

Folglich lässt sich vermuten, dass die Wahl eines flippbaren Gebiets mit betragsmäßig kleinem Lösungsvektoreintrag im Schnyder wood den gesamten Lösungsvektor in den angegebenen Normen wenig verändert. Andererseits wissen wir aber, dass der Lösungsvektor beim zu flippenden Gebiet selbst sogar das Vorzeichen wechselt, siehe Satz 6.3.7.

Die Hoffnung im jetzt vorgestellten Verfahren besteht deshalb darin, dass die wesentliche Gesamtänderung des Lösungsvektors durch den Eintrag beim geflippten Gebiet selbst verursacht wird, bei der Wahl eines negativen flippbaren Gebietes dieses durch den triangular flip nichtnegativ wird und dadurch die Vorzeichen der restlichen (negativen und nichtnegativen) Gebiete unverändert bleiben. Dies würde dann zu einer echten Erhöhung der Zahl an positiven Gebieten führen.

**Algorithmus 7.2.2.** *Gegeben sei ein 3-triangulierter 4-zusammenhängender und planar eingebetteter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1 a_2 a_3$ .*

- Konstruiere mit Algorithmus 4.2.2 einen Schnyder wood  $S$  auf  $G$ .
- Berechne die (eindeutige, siehe 6.3.1) Lösung  $x_S$  des Gleichungssystems  $A_S x = e_1$ .
- while**  $x_S \not\geq 0$  **do**
  - Bestimme ein Gebiet  $f_{\min} \in \operatorname{argmin}\{|(x_S)_g| \mid g \text{ ist flippbar und } (x_S)_g < 0\}$ .
  - Setze  $S = S'$ , wobei  $S'$  der Schnyder wood ist, der aus  $S$  durch den triangular flip auf  $f_{\min}$  entsteht.
- end while**
  - Konstruiere aus den Einträgen von  $x_S \geq 0$  und  $S$  eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ , Abbruch.

**Ausgabe:** Eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ .

Zunächst ist überhaupt nicht klar, weshalb der Algorithmus überhaupt durchführbar ist, da wir ja bspw. in Abschnitt 6.3.4 gesehen hatten, dass es durchaus Schnyder woods ohne flippbare negative Gebiete gibt. Dies ist auch bei diesem Verfahren ein Problem und folglich sind nicht alle Schnyder woods als Start-Schnyder wood des Algorithmus geeignet. Folgende Aussage zeigt allerdings zumindest, dass es in einigen Fällen flippbare negative Gebiete gibt und das Gebiet  $f_{\min}$  das betragsminimale negative Gebiet darstellt.

**Proposition 7.2.3.** *Sei  $S$  ein Schnyder wood auf einer 4-zusammenhängenden planaren Triangulation  $G$ , und sei  $x_S$  der Lösungsvektor des zugehörigen Gleichungssystems. Sei  $g_{\min} \in \operatorname{argmin}\{|(x_S)_g| \mid g \text{ ist Gebiet mit } (x_S)_g < 0\}$ , sodass auch alle Gebiete, die mindestens einen Knoten mit  $g_{\min}$  gemeinsam haben, negativ sind. Dann ist  $g_{\min}$  flippbar.*

*Beweis.* Angenommen,  $g_{\min}$  wäre nicht flippbar. Dann gibt es einen Knoten  $v$  auf dem Rand von  $g_{\min}$ , dessen beide inzidenten Randkanten von  $g_{\min}$  auslaufend sind. Laut Gleichungssystem erhält man dann  $(x_S)_v = (x_S)_{g_{\min}}$ .



Fortschritte erzielt wurden.

Nachdem bei der eben vorgestellten Flip-Aktion negative Gebiete mit betragsmäßig möglichst kleinem Lösungsvektoreintrag für einen triangular flip ausgewählt wurden, betrachten wir nun das Gegenstück hierzu, die negativen Gebiete mit betragsmäßig möglichst großem Lösungsvektoreintrag, also die Gebiete mit kleinstem Eintrag im Lösungsvektor.

Leider kann hier keine derart direkte Plausibilitätsbegründung wie bei obigem Verfahren angegeben werden, denn die Überlegungen im Beweis von Satz 7.2.1 würden beim Flip eines betragsmäßig großen Gebietes eher für eine große Veränderung des Lösungsvektors sprechen, von der ja nicht unbedingt klar ist, in welche "Richtung" sie vollzogen wird, d.h. es können sowohl negative zu positiven Gebieten werden als auch umgekehrt.

Man kann allerdings die anschaulich plausible (bei Übergang vom Schnyder wood zur allgemeinen Dreieckskontaktdarstellung) Vermutung haben, dass der triangular flip eines gerichteten Gebietes in einem Schnyder wood bezogen auf den Lösungsvektor sich am meisten auf die umliegenden Gebiets- und Knotenvariablen auswirkt, während im Schnyder wood weiter "entfernt" liegende Gebiete und Knoten zunehmend unberührt bleiben.

Beim Flip eines negativen Gebiets mit betragsmäßig großer Gebietsvariable kann man unter Annahme dieser Vermutung hoffen, dass sich die Änderung des Lösungsvektors wieder hauptsächlich auf das geflippte Gebiet selbst auswirkt, welches danach zu einem positiven Gebiet mit einem in der Regel ähnlich großen Betrag des Lösungsvektoreintrags wie zuvor wird. Die in der Umgebung liegenden Gebiete, von denen oft viele negativ sind, verursachen dann den Großteil der Änderung des Lösungsvektors, sodass ähnlich wie bei Wahl eines betragsminimalen negativen Gebiets wenige oder kaum nichtnegative Gebiete zu negativen würden, aber umgekehrt. So erhielte man (unter Annahme der Korrektheit der gemachten Überlegungen!) eine Vergrößerung der Zahl an positiven Gebieten.

Das zu dieser Flip-Aktion gehörige Verfahren zur Bestimmung einer Dreieckskontaktdarstellung lautet formal geschrieben wie folgt.

**Algorithmus 7.2.4.** Gegeben sei ein 3-triangulierter 4-zusammenhängender und planar eingebetteter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3$ .

- Konstruiere mit Algorithmus 4.2.2 einen Schnyder wood  $S$  auf  $G$ .
- Berechne die (eindeutige, siehe 6.3.1) Lösung  $x_S$  des Gleichungssystems  $A_S x = e_1$ .
- while**  $x_S \not\geq 0$  **do**
  - Bestimme ein Gebiet  $f_{\max} \in \operatorname{argmin}\{(x_S)_g \mid g \text{ ist flippbar und } (x_S)_g < 0\}$ .
  - Setze  $S = S'$ , wobei  $S'$  der Schnyder wood ist, der aus  $S$  durch den triangular flip auf  $f_{\max}$  entsteht.
- end while**
- Konstruiere aus den Einträgen von  $x_S \geq 0$  und  $S$  eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ , Abbruch.

**Ausgabe:** Eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von  $G$ .

### 7.3. ANSATZ FÜR EINEN ENDLICHKEITSBEWEIS

Auch dieses Verfahren hat in den (wenigen) betrachteten Beispielen zum Erfolg geführt und schien sogar effektiver zu sein als das Verfahren 7.2.2. Leider ist hier bisher noch weniger theoretischer Hintergrund als beim erstgenannten Verfahren vorhanden, z.B. ist in vielen Fällen die Existenz eines negativen flippbaren Gebiets nicht gesichert. Dennoch gilt auch hier, dass eine genauere Analyse der Auswirkung von triangular flips auf einzelne Einträge im Lösungsvektor diesen Nachteil ausgleichen und evtl. sogar zu einem Beweis der Korrektheit des Verfahrens führen könnte.

### 7.3 Ansatz für einen Endlichkeitsbeweis

Nachdem im vorigen Abschnitt zwei weitere Flip-Aktionen und die zugehörigen Verfahren auf Plausibilität untersucht wurden, kommen wir nun noch einmal auf das Verfahren 6.3.6 zurück und stellen einen Ansatz vor, der für den Endlichkeitsbeweis dieses Verfahrens bei weiterer Forschung vielleicht zielführend sein könnte.

Wie bereits in Abschnitt 6.3.3 erläutert, genügt es für die Korrektheit des Verfahrens zu zeigen, dass dieses nicht zyckelt, d.h. dass es nicht die immer selben Schnyder woods zyklisch durchläuft. Eine Möglichkeit, diese Zyckelfreiheit für eine gegebene planare Triangulation  $G$  nachzuweisen, besteht darin, eine Funktion  $f : \{S \mid S \text{ ist ein Schnyder wood auf } G\} \rightarrow \mathbb{R}$  so zu konstruieren, dass für jeden Schnyder wood  $S$  auf  $G$  und den daraus gemäß Verfahren entstehenden Schnyder wood  $S'$  die Beziehung  $f(S) < f(S')$  gilt. Hieraus folgte dann offensichtlich die Zyckelfreiheit des Verfahrens, da sich der Funktionswert von  $f$  während der Durchführung von Algorithmus 6.3.6 bei jeder Iteration erhöhte und man somit nicht zu einem vorher bereits durchlaufenen Schnyder wood zurückkehren könnte.

Wir wollen nun eine Größe bzw. Abbildung angeben, für die sich bei einigen Experimenten herausgestellt hat, dass sie obige Bedingung "fast" erfüllt.

Diese Abbildung ( $G$  ist die betrachtete planare Triangulation)

$$n : \{S \mid S \text{ ist ein Schnyder wood auf } G\} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

ordnet jedem Schnyder wood schlicht die Zahl der in ihm enthaltenen flippbaren Gebiete zu.

Leider ist dies ein durch rein praktische Untersuchungen erlangter Ansatzpunkt, für den bisher keine theoretische Überlegungen wirklich greifen. Zudem erhöht sich der Funktionswert von  $n$  beim Umdrehen aller unregelmäßigen Kanten leider wie gesagt nicht immer, weshalb obige Überlegungen für die Abbildung  $n$  an sich noch nicht greifen können.

Dies lässt sich genauer an den folgenden Beispielen für die Entwicklung der Zahl an flippbaren Gebieten im Laufe von Algorithmus 6.3.6 bei einigen Schnyder woods beobachten:

## KAPITEL 7. WEITERE ÜBERLEGUNGEN UND OFFENE PROBLEME

Iteration	$n(\cdot)$	$n(\cdot)$	$n(\cdot)$	$n(\cdot)$
0	5	10	19	30
1	9	16	57	90
2	13	22	71	109
3	12	22	72	113
4	13	-	76	108
5	-	-	77	111
6	-	-	-	110
7	-	-	-	110

Besonders der letzte Schnyder wood zeigt gut, dass zu Beginn eine rasante Erhöhung von  $n$  von Iteration zu Iteration stattfindet, gegen Ende dann aber kleine Schwankungen nach unten auftreten können. Dies könnte daran liegen, dass in diesem Bereich nur noch wenige und in der Regel weniger zusammenhängende negative Gebiete vorhanden sind, sodass evtl. bei größeren Regionen auftretende Effekte, die zur Vergrößerung der Zahl an flippbaren Gebieten führen, hier im Kleinen nicht mehr greifen und daher zu kleinen Schwankungen führen. Dies bleibt aber eine Vermutung.

Zusammengefasst haben wir eine Funktion  $n$  von der Menge der Schnyder woods auf die reellen Zahlen definiert, die sich bei den meisten Iterationen in 6.3.6 echt verbessert, gegen Ende allerdings kleine Schwankungen aufweist und daher für das eigentliche Ziel der Konstruktion einer Funktion  $f$ , die sich bei ausnahmslos jeder Iteration verbessert (s.o.), in dieser Form noch nicht geeignet ist. Dennoch zeigt obige Tabelle m.E. auch, dass in diesem Ansatz Potential steckt und eine geeignete Modifikation der Funktion  $n$  evtl. zu einer stetigen Verbesserung führen könnte. Ein Vorteil bei diesem Ansatz besteht auch darin, dass für den Beweis der Erhöhung von  $n$  offensichtlich nur Gebiete betrachtet werden müssen, die mindestens eine unregelmäßige Kante enthalten, da deren Orientierung sonst unverändert bleibt. Außerdem kann so das Problem der Zyklfreiheit des Verfahrens auf ein größtenteils graphentheoretisches Problem in Verbindung mit dem Gleichungssystem zurückgeführt werden.

# Anhang A

## Fünfeckskontaktdarstellungen

In diesem Kapitel wollen wir Kontaktdarstellungen planarer Graphen mit regelmäßigen Fünfecken betrachten und dazu analoge Überlegungen wie in den vorigen Abschnitten zu gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen anstellen. Motiviert werden unsere Untersuchungen durch folgenden Satz, der eine Analogie zu Satz 6.2.6 herstellt:

**Satz A.0.1.** *Jeder 5-triangulierte planare Graph besitzt eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung.*

Wie solch eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung überhaupt genau aussieht, wird im folgenden Abschnitt definiert.

### A.1 Definitionen

In diesem Abschnitt definieren wir allgemeine und regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellungen und das zugehörige Pendant der Schnyder woods bei den Dreieckskontaktdarstellungen, die so getauften Fünffarbenwälder.

**Definition A.1.1.** Gegeben sei ein planar eingebetteter 5-triangulierter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3a_4a_5$  im Uhrzeigersinn. Eine *allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung* von  $G$  ist (hier) eine Kontaktdarstellung von  $G$  unter Verwendung konvexer nichtverschwindender Fünfecke.

Eine *regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung* ist (hier) eine Kontaktdarstellung von  $G$  mit nicht verschwindenden regelmäßigen Fünfecken mit parallelen Seiten.

Bei beiden Arten von Fünfeckskontaktdarstellungen soll darüberhinaus gelten, dass die zu den äußeren Knoten  $a_i, i = 1, \dots, 5$  gehörigen Fünfecke ein umgekehrtes Rahmenfünfeck bilden, d.h. dass die Kontakte zwischen den Fünfecken der äußeren Knoten von der Form Ecke-Ecke sind. Dieses Rahmenfünfeck muss darüber hinaus die gesamte restliche Fünfeckskontaktdarstellung umschließen.

Zudem benötigen wir noch die Definition eines Kontaktsystems aus (Jordan-) Bögen.



**Definition A.1.2.** Gegeben sei eine Menge  $\mathcal{J}$  an Jordanbögen in der Ebene, die jeweils nicht geschlossen sind. Insbesondere besitzt also jeder Bogen  $J \in \mathcal{J}$  zwei Endpunkte. Die Menge der Punkte des Bogens abgesehen von den zwei Endpunkten bezeichnen wir dann als das *Innere* des Bogens, und einen Punkt im Innern des Bogens als *inneren Punkt*. Wir nennen nun  $\mathcal{J}$  ein *Kontaktsystem aus Jordanbögen*, wenn je zwei verschiedene Bögen  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$  keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Der Schnitt zweier Jordanbögen darf zudem aus höchstens einem Endpunkt bestehen, insbesondere sind doppelte Kontakte nicht erlaubt. Ein *Kontaktpunkt* von  $\mathcal{J}$  ist ein beliebiger Endpunkt eines Jordanbogens  $J \in \mathcal{J}$ .

Ein Beispiel für ein Bögenkontaktsystem ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

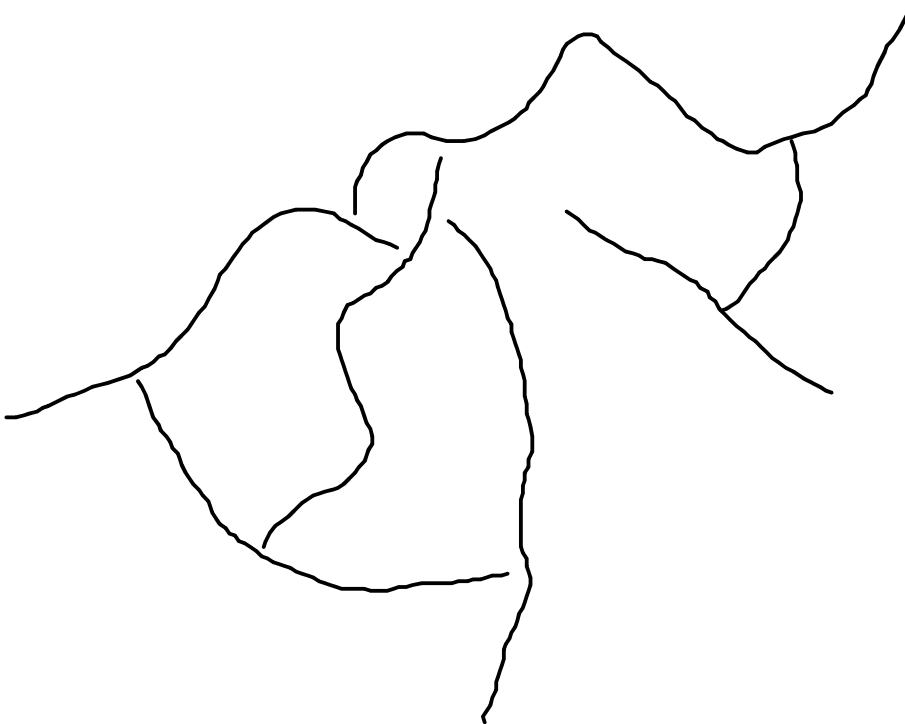


Abbildung A.1: Ein Kontaktsystem aus Jordanbögen

## A.1. DEFINITIONEN

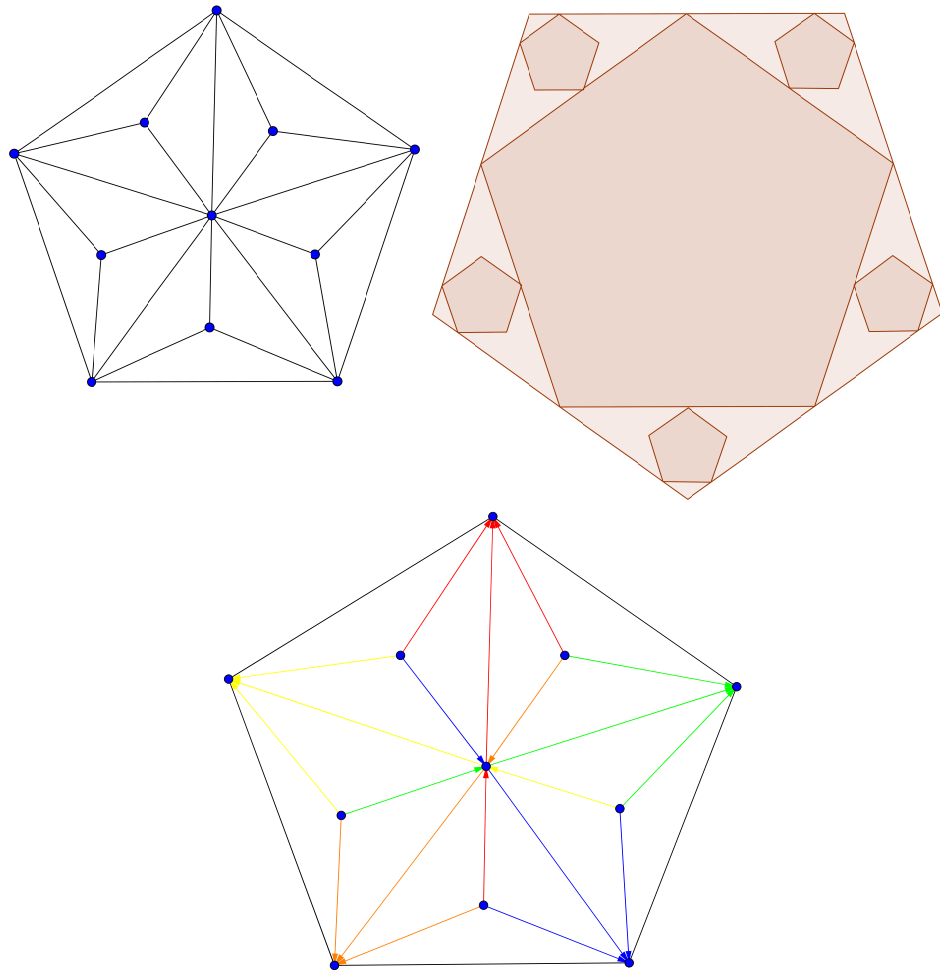


Abbildung A.2: Ein planarer Graph mit einer zugehörigen regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung und der zu dieser Fünfeckskontaktdarstellung gehörige Fünffarbenwald auf dem Graphen.

**Definition A.1.3.** Gegeben sei ein 5-triangulierter planarer Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3a_4a_5$ . Ein *Fünffarbenwald* ist eine Orientierung und Färbung der Kanten der planaren Einbettung in den Farben  $1, 2, \dots, 5$ , entsprechend Rot, Grün, Blau, Orange, Gelb, sodass gilt:

(FF 1) Für jeden inneren Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, \dots, a_5\}$  gilt: Es gibt für jede der fünf Farben höchstens eine aus  $v$  auslaufende Kante dieser Farbe. Die in  $v$  einlaufenden Kanten einer Farbe bilden ein Intervall um  $v$ , diese sind im Gegenuhrzeigersinn um  $v$  (bzgl. der Farben) angeordnet.

Die auslaufende Kante in der Farbe  $i$  verläuft (wenn sie denn existiert) zwischen den Intervallen der Farben  $i-2, i+2$  (wobei wir wieder eine zyklische Struktur auf  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  voraussetzen). Es ist nicht möglich, dass eine in  $v$  einlaufende und eine aus  $v$  auslaufende Kante derselben Farben direkt nebeneinander bzgl.  $v$  liegen.

(FF 2) Alle zum äußeren Knoten  $a_i$  inzidenten Kanten sind zu diesem hin orientiert und mit  $i$  gefärbt.

Die Definition eines Fünffarbenwalds korrespondiert mit der eines Schnyder woods in dem Sinne, dass eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung einen Fünffarbenwald induziert:

**Satz A.1.4.** Sei  $G$  ein 5-triangulierter Graph mit einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung. Dann induziert diese einen Fünffarbenwald auf  $G$ .

*Beweis.* Wir setzen für jeden Knoten  $v \in V(G)$  einen Knoten in die Mitte des zugehörigen Fünfecks. Die Seiten eines jeden Fünfecks werden beginnend bei der horizontalen Seite im Uhrzeigersinn mit den Farben Rot, Grün, Blau, Orange, Gelb gefärbt. Die zu einem Kontaktpunkt zwischen zwei Fünfecken gehörige Kante wird in Richtung des Fünfeckes, bei welchem der Kontaktpunkt innerhalb einer Seite liegt, orientiert und mit der Farbe dieser Seite gefärbt. Dass hierdurch ein Fünffarbenwald auf  $G$  definiert wird, folgt nun sofort aus den Definitionen Fünffarbenwald und regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung.

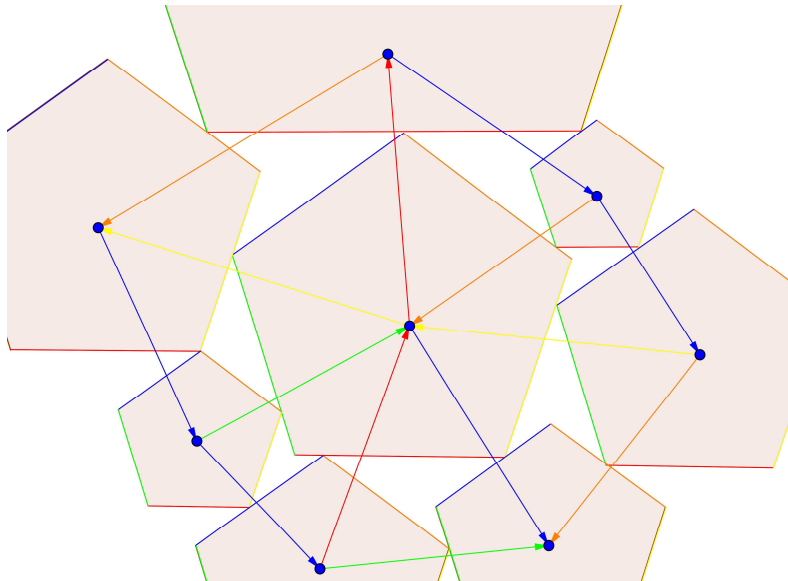


Abbildung A.3: Konstruktion des Fünffarbenwaldes lokal an einem Fünfeck.

□

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Aufgrund dieser Korrespondenz zwischen Fünffarbenwäldern und Fünfeckskontaktdarstellungen liegt die Idee nahe, ähnlich wie bei den gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen bei durch einen Fünffarbenwald gegebenen Kontakten ein Gleichungssystem für eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung mit solchen Kontakten aufzustellen und dessen Lösbarkeit zu untersuchen. Zunächst wollen wir aber die Überlegungen aus Abschnitt 6.2 sowie Überlegungen aus [GLP10] nutzend die Existenz von allgemeinen und regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen untersuchen.

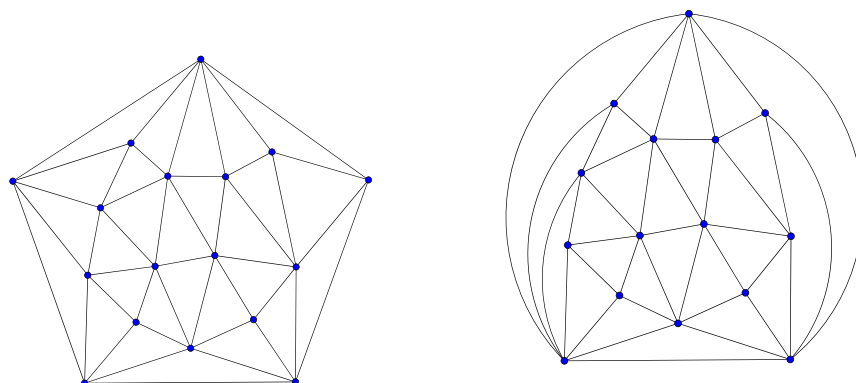
### A.2 Existenz von Fünffarbenwäldern und Fünfeckskontaktdarstellungen

#### A.2.1 Existenz und Konstruktion von Fünffarbenwäldern

Mithilfe der Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2 über die Konstruktion von Schnyder woods lässt sich auch auf jeder planaren Einbettung eines 5-triangulierten Graphen ein Fünffarbenwald konstruieren. Dazu nutzen wir Algorithmus 4.2.2.

**Satz A.2.1.** *Auf jedem planar eingebetteten 5-triangulierten planaren Graphen  $G$ , für den keine zwei zu den zwei selben äußeren Knoten adjazente Knoten existieren, existiert ein Fünffarbenwald, der sich in  $\mathcal{O}(n)$  mit  $n := |V(G)|$  konstruieren lässt.*

*Beweis.* Gegeben sei der 5-triangulierte Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3a_4a_5$ . Durch Löschen der Knoten  $a_2, a_5$  und Verschieben der zu  $a_2, a_5$  inzidenten Kanten zu  $a_3, a_4$  (ohne Entstehung von Doppelkanten) erhält man einen 3-triangulierten planaren Graphen mit Außengebiet  $a_1a_3a_4$  wie in folgender Abbildung. Wir kontrahieren also die Kanten  $\{a_2, a_3\}$  und  $\{a_4, a_5\}$  und löschen jeweils eine der Kanten bei den beiden auftretenden Doppelkanten. Hierbei stellt die zusätzliche Forderung an den Graphen in der Voraussetzung des Graphen sicher, dass nur zwischen den Knoten, die zu  $a_2, a_3$  bzw.  $a_4, a_5$  adjazent sind sowie  $a_3$  und  $a_4$  dabei Doppelkanten entstehen können.



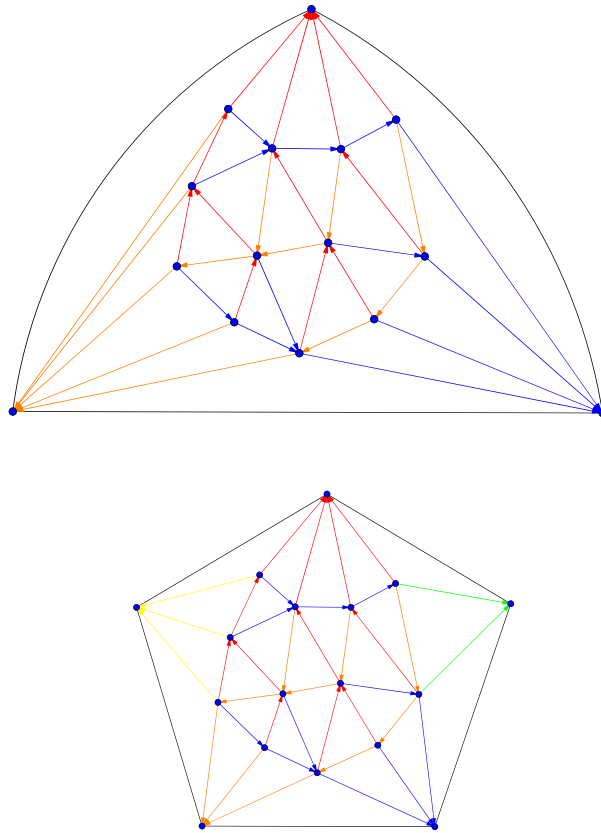


Abbildung A.4: Beispiel zur Konstruktion eines Fünffarbenwaldes auf einem 5-triangulierten Graphen in Abhängigkeit eines Schnyder woods auf dem 3-triangulierten Hilfsgraphen.

Nun verwenden wir Algorithmus 4.2.2, um in  $\mathcal{O}(n)$  einen Schnyder wood auf dieser planaren Triangulation mit den Farben Rot, Blau, Orange zu konstruieren.

Wie man leicht aus den Definitionen folgert, folgt aus dem Erfülltsein von (S1) bei allen inneren Knoten das Erfülltsein von (FF1) für diese Färbung bei allen inneren Knoten. Insbesondere folgt aus dem Erfülltsein von (S2) das Erfülltsein von (FF2) bei  $a_1, a_3$  und  $a_4$ . Es muss die Färbung nun also so modifiziert werden, dass (FF2) auch bei  $a_2$  und  $a_5$  erfüllt ist. Hierfür färben wir einfach die zu  $a_2$  bzw.  $a_5$  inzidenten Kanten, die bisher die Farben orange bzw. blau besitzen, gelb bzw. grün, und übertragen nun die Farben der innerhalb liegenden Kanten dieser Färbung und die Orientierung auf die entsprechenden Kanten des 5-triangulierten Ausgangsgraphen. Nun ist (FF2) auch bei  $a_2, a_5$  erfüllt. Es bleibt also zu verifizieren, dass diese Umfärbung das Erfülltsein von (FF1) bei den zu  $a_2, a_5$  adjazenten Knoten nicht geändert hat. Da die Umfärbung aber von der Form orange  $\rightarrow$  gelb bzw. blau  $\rightarrow$  grün war, und zuvor nur Kanten mit Farben Rot, Blau und Orange auftraten, folgt dies aus der Definition von (FF2).  $\square$

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Die zusätzlich gemachten Voraussetzungen bei obigem Satz sind insofern nicht sehr einschränkend, da für einen beliebigen 5-triangulierten Graphen für jede äußere Kante alle zu beiden äußeren Knoten dieser Kante adjazenten Knoten, bis auf den am weitesten im Innern liegenden entfernt werden können, und diese nach Konstruktion wieder hinzugefügt und der Fünffarbenwald leicht ergänzt werden kann.

### A.2.2 Existenz von allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellungen von planaren Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst mit den in den Definitionen eingeführten allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellungen befassen, welche später unter anderem für die Konstruktion von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen benötigt werden. Insbesondere wollen wir zeigen, dass zu jedem Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten Graphen solch eine Fünfeckskontaktdarstellung existiert, die jenen ähnlich wie in Satz A.1.4 induziert. Hierzu beschreiten wir einen anderen Weg als Hubert de Fraysseix et al. bei der Konstruktion von gleichschenkligen oder rechtwinkligen Dreieckskontaktdarstellungen planarer Graphen und nutzen statt des Konzepts der geordneten Spannbäume und des induktiven Setzens der Objekte eine von Goncalves et al. ebenfalls in [GLP10] eingeführte Methode, die dort zur Konstruktion so genannter primal-dualer Dreieckskontaktdarstellungen eingesetzt wurde.

Bei dieser Methode wird ein Kontaktsystem von nicht-geschlossenen Jordan-Bögen konstruiert, das bezüglich der Kontakte der gesuchten Fünfeckskontaktdarstellung nahe kommt. Die Bögen, die abgesehen von einigen Hilfsbögen die Seiten der Fünfecke darstellen, stoßen sich dementsprechend in Punkten, die mit den Kontaktstellen der zu konstruierenden Fünfeckskontaktdarstellung korrespondieren.

Von diesem Kontaktsystem aus Bögen wird unter Annahme einer Zusatzbedingung mithilfe eines Satzes aus [dFdM07] gezeigt, dass es dehnbar ist in dem Sinne, dass es sich mit geradlinigen Bögen zeichnen lässt. Zudem wird gezeigt, dass diese Streckungen tatsächlich eine allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung liefern, deren Kontakte durch den Fünffarbenwald bestimmt werden.

Hierzu setzen wir Kontaktpunkte zwischen den Bögen des zu konstruierenden Systems auf den Mittelpunkt einer jeden Kante im Fünffarbenwald.

Wir betrachten nun die Situation lokal an einem inneren Knoten. Laut (FF1) gliedern sich die einlaufenden Kanten der jeweiligen Farben in Blöcken um den Knoten, während die auslaufenden Kanten der jeweiligen Farben, falls sie existieren, zwischen den Blöcken der "gegenüberliegenden" Farben auslaufen.

Wir betrachten nun einen beliebigen solchen Block aus einlaufenden Kanten und definieren einen Bogen des Kontaktsystems dadurch, dass er der Reihenfolge nach (im Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn) die Kontaktpunkte auf den Kanten des Blocks durchläuft. Dieser Bogen startet und endet auf den Kontaktpunkten der den Block begrenzenden auslaufenden Kanten.

Sollte solch eine Kante auf einer Seite nicht existieren, so wird ein zusätzlicher Kontaktpunkt zwischen die beiden benachbarten Blöcke gesetzt, welcher auch als Endpunkt des Bogens verwendet wird, der zum benachbarten Block gehört, siehe Abbildung A.5 . Insbesondere färben

wir den jeweiligen Bogen der Übersicht halber mit der Farbe der Kanten des entsprechenden Blocks.

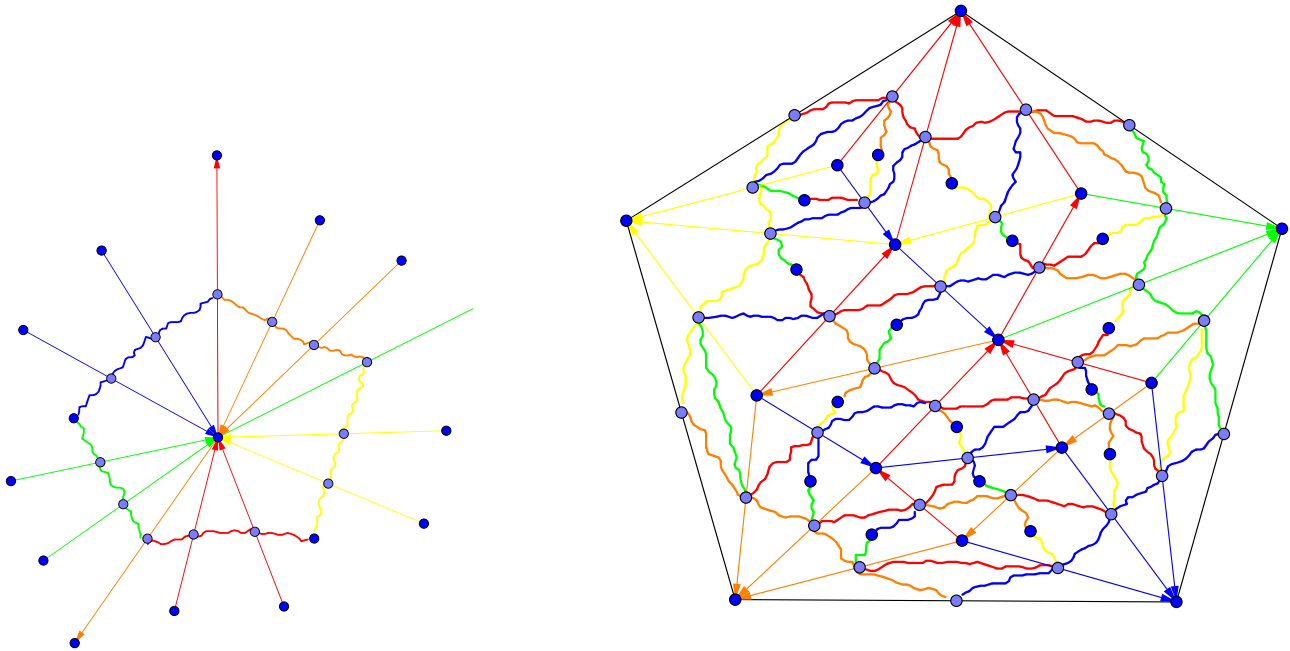


Abbildung A.5: Beispielhafte Konstruktion des Bögen-Kontaktsystems links lokal an einem inneren Knoten und rechts bei einem ganzen Fünffarbenwald.

Diese Bögen ergeben nun zusammen ein nicht geradliniges Fünfeck, das den gewählten inneren Knoten umgibt. Nach Streckung des Kontaktsystems wird es das den gewählten Knoten repräsentierende Fünfeck ergeben.

Analoges wird auch für die äußeren Knoten durchgeführt: Ein Bogen der Farbe  $i$  durchläuft im Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn die Kontaktpunkte auf den zum äußeren Knoten  $a_i$  inzidenten Kanten und beginnt und endet an den Kontaktpunkten der beiden angrenzenden nicht orientierten Randkanten. Diese fünf Bögen werden nach Streckung das Rahmenfünfeck der Kontaktdarstellung ergeben.

Betrachten wir all diese Bögen gemeinsam, so erhält man ein Kontaktsystem von Bögen, dem man schon ansehen kann, dass es mit einer Fünfeckskontaktdarstellung korrespondiert. Dieses ist allerdings für unsere Zwecke noch nicht ausreichend, da nach Streckung evtl. nicht-konvexe Fünfecke entstehen können, was aber der Definition einer allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung widerspräche.

Aus diesem Grund werden wir das System durch weitere Hilfsbögen ergänzen und dann zeigen, dass das entstehende Kontaktsystem, falls es mit geradlinigen Bögen gezeichnet wird, eine

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung ergibt.

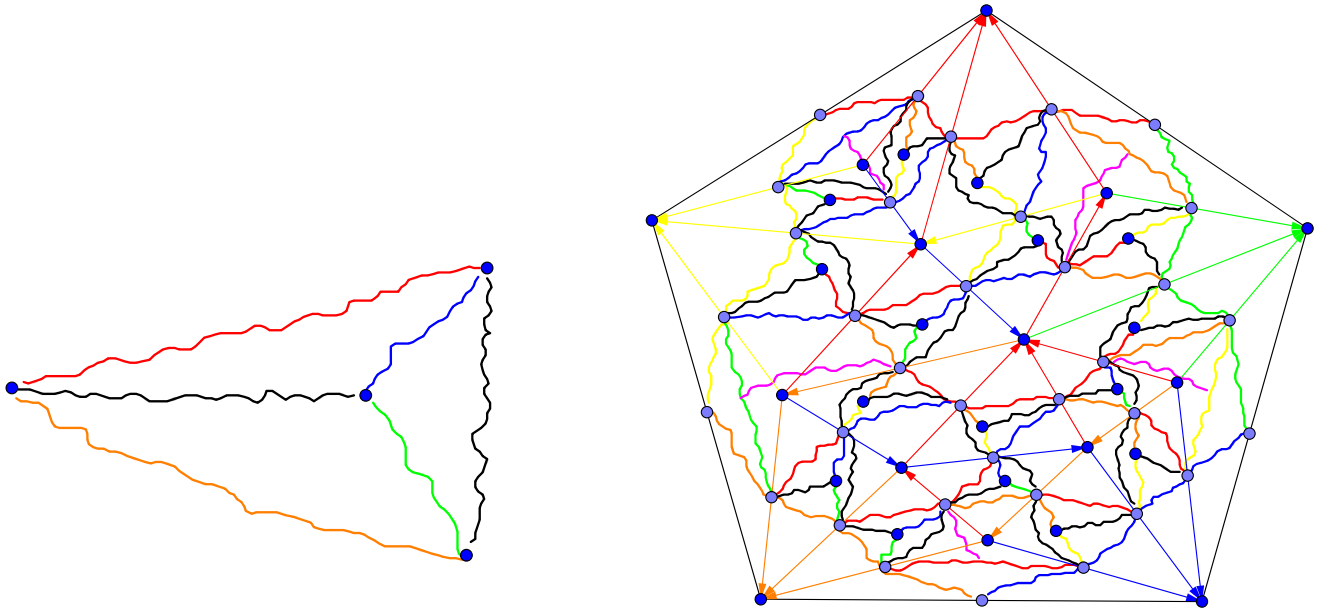


Abbildung A.6: Links: Lage der Hilfsbögen in einem beispielhaften Pfeil. Rechts: Kontaktsystem mit Hilfsbögen. Hilfsbögen bei Pfeilen im Kontaktsystem sind schwarz, die fünf Hilfsbögen bei den Eck-Fünfecken violett gezeichnet.

Aus den Eigenschaften (FF1) eines Fünffarbenwaldes schließt man, dass jedes Gebiet im Fünffarbenwald einen so getauften Pfeil im Kontaktsystem erzeugt. Dieser enthält vier Kontaktpunkte, darunter ein Kontaktpunkt, der sich nicht auf einer Kante befindet, sondern wie oben beschrieben zusätzlich hinzugefügt wurde. Diese werden durch Bögen vierer unterschiedlicher Farben verbunden, siehe folgende Abbildung.

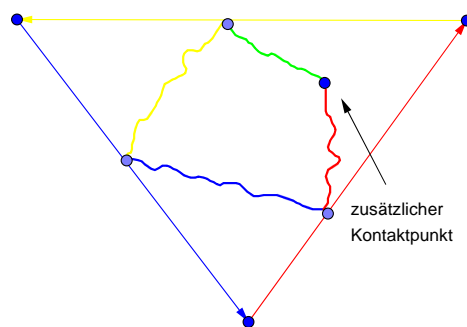


Abbildung A.7: Entstehung eines Pfeils oberhalb eines beispielhaften Gebiets im Fünffarbenwald. Für beliebige andere Farb- und Orientierungs-Konstellationen erhält man analog solch einen Pfeil.



Die zwei mit dem zusätzlichen Kontaktpunkt verbundenen Kontaktpunkte des Pfeils werden nun durch einen zusätzlichen Hilfsbogen verbunden, der keine Kontakte zu anderen Bögen besitzt. Außerdem wird der verbleibende Kontaktpunkt mit dem zusätzlichen durch einen Hilfsbogen, wieder ohne sonstige Kontakte zu anderen Bögen, verbunden.

Weiter betrachten wir die fünf am weitesten außen liegenden und an zwei der Bögen des Rahmenfünfecks grenzenden Bögen. Für jeden dieser Bögen führen wir einen Hilfsbogen ein, der im Innern des betrachteten Bogens startet und in einem anderen Bogen des jeweiligen Fünfecks endet sowie keine sonstigen Kontakte zu anderen Bögen besitzt. Dies wird in Abbildung A.6 veranschaulicht.

Diese Bögen werden im Beweis des nun folgenden Satzes für die Konvexität der auftretenden Fünfecke sorgen.

**Satz A.2.2.** *Gegeben sei ein Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten planar eingebetteten Graphen. Dann ergibt eine geradlinige Darstellung des oben beschriebene Kontaktsystems von Jordan-Bögen eine allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung, deren Kontakte durch den Fünffarbenwald beschrieben werden.*

*Beweis.* Sei eine geradlinige Zeichnung des Kontaktsystems gegeben. Wir werden im Folgenden zeigen, dass jedes der inneren "Fünfecke" in obigem Kontaktsystem in der geradlinigen Zeichnung des Kontaktsystems konvex ist und keine weiteren Fünfecke enthält. Anschließend wird gezeigt, dass auch das "Rahmenfünfeck" im geradlinigen Kontaktsystem ein konvexes Fünfeck ergibt, das in seinem Innern alle anderen entstandenen Fünfecke enthält.

Nun betrachten wir zunächst einen beliebigen Pfeil im Kontaktsystem. Dieser muss bei der geradlinigen Zeichnung ein Viereck ergeben. Wir zeigen, dass dieses drei konvexe Ecken bei den auf Seiten der Fünfecke bzw. Kanten im Fünffarbenwald liegenden Kontaktpunkte besitzt und eine nicht-konvexe Ecke beim zusätzlich hinzugefügten Kontaktpunkt.

Zunächst kann es in einem Viereck höchstens eine nicht-konvexe Ecke geben. Angenommen, die Ecke beim zusätzlichen Kontaktpunkt wäre konvex. Dann muss eine der drei restlichen Ecken nicht-konvex sein, da sich ansonsten die beiden Hilfsbögen im Pfeil, die nun geradlinig sind, schneiden würden, siehe die erste Grafik in folgender Abbildung. Unabhängig davon, welche der drei Ecken nicht konvex ist, erhält man einen Kontaktpunkt, der innerhalb eines Dreiecks liegt:

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

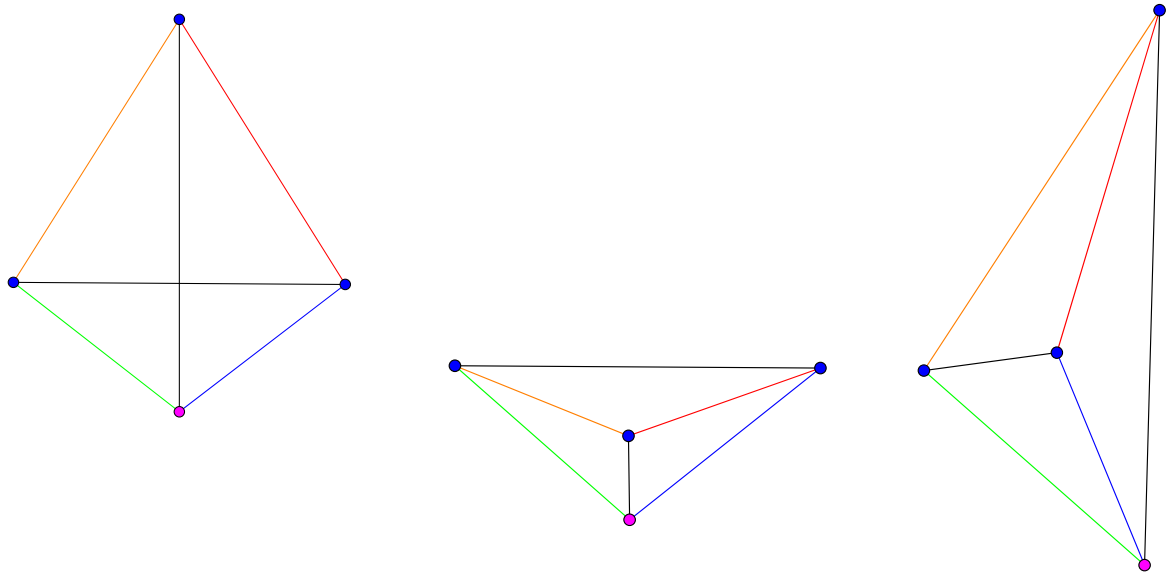


Abbildung A.8: Die betrachteten Fälle in obiger Argumentation. Die erste Abbildung zeigt den Fall nur konvexer Ecken, die zweite den Fall der Nicht-Konvexität der oberen und die letzte zeigt den Fall einer benachbarten nicht-konvexen Ecke.

Da an diese Kontaktpunkte jeweils aber noch mindestens ein weiterer Bogen, der keinen Hilfsbogen darstellt, grenzt, muss auch dieser (um nicht vorgesehene Kreuzungen zu vermeiden) vollständig innerhalb dieses Dreiecks liegen. Da das konstruierte Kontaktsystem von Bögen aber offensichtlich zusammenhängend ist, müssten dann die gesamten Bögen innerhalb oder auf dem Rand dieses Dreiecks liegen. Dies ist aber aus dem Grund nicht möglich, dass einer der Bögen, die die Seiten des Dreiecks formen, auch über das Dreieck hinaus fortgesetzt werden muss (laut den Eigenschaften eines Fünffarbenwaldes und der Definition eines Pfeils, und da das Kontaktsystem nun als geradlinig gezeichnet angenommen wird). Folglich erhalten wir einen Widerspruch zur gemachten Annahme, und folglich ist die zum zusätzlichen Kontaktpunkt gehörige Ecke des Vierecks nicht-konvex und die restlichen konvex.

Wir zeigen nun zunächst, dass keines der durch die geradlinige Zeichnung des Systems entstehenden Fünfecke, die innere Knoten des Fünffarbenwaldes repräsentieren sollen, Bögen, die keine Hilfsbögen sind, in ihrem Inneren enthalten, also insbesondere, dass die entstehenden Fünfecke sich höchstens berühren, aber nicht schneiden können:

Angenommen, ein Fünfeck enthielte zumindest ein Ende eines nicht zum Fünfeck gehörigen Bogens, der weder ein Hilfsbogen noch einer der fünf das Rahmenfünfeck bildenden Bögen ist. Aufgrund des Zusammenhangs des Kontaktsystems und der vorgegebenen Kontakte müssen sich dann alle Bögen des Kontaktsystems, abgesehen von den fünf Seitenbögen des Fünfecks

und evtl. Hilfsbögen, innerhalb des Fünfecks befinden. Wir zeigen nun, dass dann alle Ecken des Fünfecks nicht-konvex sind, was offensichtlich nicht möglich ist, da ein Fünfeck immer mindestens 3 konvexe Ecken besitzt. Wir betrachten eine beliebige Ecke des Fünfecks und unterscheiden im Folgenden nach der Art der Ecke:

1. Die betrachtete Ecke gehört zu einem zusätzlichen Kontaktpunkt. Folglich ist sie laut Definition der Pfeile der zusätzliche Kontaktpunkt des Pfeils, der an dieser Ecke anliegt. Die beiden Bögen des Pfeils, die nicht an die Ecke grenzen, müssen also innerhalb des Fünfecks liegen. Folglich liegt der gesamte Pfeil, evtl. abgesehen vom äußeren Hilfsbogen, innerhalb des Fünfecks. Aus der oben gezeigten Nicht-Konvexität der Ecke bzgl. des Pfeils folgt aufgrund der speziellen Lage dann auch die Nicht-Konvexität der betrachteten Fünfecksecke, siehe folgende Abbildung.

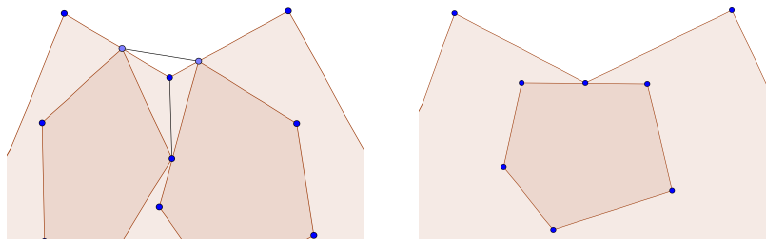


Abbildung A.9: Illustration obiger Argumente

2. Die betrachtete Ecke gehört zu einem Kontaktpunkt auf einer auslaufenden Kante des betrachteten Knotens im Fünffarbenwald, bzw. der zugehörige Kontaktpunkt liegt im Innern einer Seite eines anderen Fünfecks, dessen zugehöriger Knoten mit dem betrachteten im Fünffarbenwald adjazent ist.

Da alle Seitenbögen des benachbarten Fünfecks innerhalb des betrachteten liegen, muss aufgrund der geradlinigen Zeichnung der Bögen offenbar auch diese Ecke nicht-konvex sein, siehe ebenfalls obige Abbildung.

Somit sind alle Ecken des Fünfecks nicht-konvex, ein Widerspruch, wie oben erläutert.

Folglich war obige Annahme falsch, und es liegen abgesehen von evtl. Hilfsbögen keine anderen Bögen des Kontaktsystems innerhalb des betrachteten Fünfecks, es folgt die Zwischenbehauptung der Disjunktheit der Fünfecke bzgl. ihres Inneren.

Wir betrachten nun ein beliebiges zu einem inneren Knoten gehöriges Fünfeck und zeigen, dass es konvex ist, d.h. dass es nur konvexe Ecken besitzt. Hierzu unterscheiden wir wieder die Fälle einer Ecke, die zu einem zusätzlichen Kontaktpunkt gehört sowie einer Ecke, bei der das

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

betrachtete Fünfeck an ein anderes stößt.

1. Die betrachtete Ecke gehört zu einem zusätzlichen Kontaktpunkt. Da der Pfeil nach eben gezeigter Disjunktheit des Inneren der Fünfecke abgesehen von seinem äußeren Hilfsbogen von außen her an das Fünfeck grenzt, folgt aus der oben gezeigten Nicht-Konvexität der Pfeilecke die Konvexität der von gegenüber betrachteten Fünfecksecke.

2. Die betrachtete Ecke liegt im Innern einer Seite eines anderen Fünfecks, dessen zugehöriger Knoten mit dem betrachteten im Fünffarbenwald adjazent ist. Da die beiden durch diese Ecke benachbarten Fünfecke bzgl. ihres Inneren disjunkt sind, muss auch diese Ecke konvex sein.

Insgesamt haben wir bisher also gezeigt, dass aus den nicht-geradlinigen Fünfecken um innere Knoten bis auf Berührung disjunkte und konvexe Fünfecke entstehen.

Nun kümmern wir uns noch um das Rahmenfünfeck. Zum Beweis, dass das Kontaktsystem nach Streckung ein allgemeines Fünfeckskontaktsystem liefert, bleibt zu zeigen, dass das Rahmenfünfeck alle restlichen Fünfecke enthält und ebenfalls konvex ist.

Da bereits bekannt ist, dass nach Streckung die nicht-geradlinigen Fünfecke des Kontaktsystems aus Jordanbögen zu konvexen Fünfecken werden, in deren Innern bis auf evtl. Hilfsbögen keine Bögen des Kontaktsystems enthalten sind, gilt selbiges für das offensichtlich durch Streckung des "Rahmenfünfecks" im Kontaktsystem entstehende Rahmenfünfeck, welches demnach zur Vermeidung von im Kontaktsystem nicht vorhergesehenen Kontakten die zu den inneren Knoten gehörigen Fünfecke umschreiben muss. Es wäre lediglich noch möglich, dass das Rahmenfünfeck in Fünfecke, deren zugehöriger innerer Knoten im Fünffarbenwald gemeinsam mit zwei äußeren benachbarten Knoten ein Gebiet bildet, also in "Eckfünfecke", hineinragt, da die zu den Ecken des Rahmenfünfecks gehörigen Kontaktpunkte im Gegensatz zu allen restlichen Kontaktpunkten nur in einem Fünfeck enthalten sind.

Dies wird aber durch die eingangs konstruierten fünf Hilfsbögen des Kontaktsystems, die in Abbildung A.6 violett gezeichnet sind, ausgeschlossen, da ansonsten Kontakte zwischen den jeweiligen Bögen des Rahmenfünfecks sowie des jeweiligen Hilfsbogens entstünden, was aber im Kontaktsystem nicht vorgesehen ist. Alles in allem umschreibt also das ebenfalls konvexe Rahmenfünfeck die gesamten restlichen ebenfalls konvexen und bzgl. des Innern disjunkten Fünfecke nach Streckung des Kontaktsystems.

Wir betrachten nun die Farben der im Rahmenfünfeck enthaltenen gestreckten Bögen. Für diese gibt es (im Uhrzeigersinn gelesen) die möglichen Reihenfolgen rot, grün, blau, orange, gelb oder rot, gelb, orange, blau, grün. Indem wir in letzterem Fall einfach die gesamte Kontaktdarstellung spiegeln, können wir uns auf den ersten Fall beschränken. Aufgrund der Konstruktion der Bögenkontakte und der möglichen Farbverteilung der die Pfeile berandenden Bögen im Kontaktsystem überlegt man sich leicht, dass dann auch für alle restlichen Fünfecke in der entstandenen

Kontaktdarstellung sich die Farben gemäß rot, grün, blau, orange, gelb im Uhrzeigersinn auf die Seitenbögen selbiger verteilen.

Nun setzen wir Knoten in die Mitten der entstandenen Fünfecke sowie auf die einzelnen Kanten des Rahmenfünfecks und verbinden und orientieren sie gemäß den Fünfeckskontakten. Die Farben der orientierten Kanten ergeben sich aus der Farbe des Bogens, innerhalb dessen sich der zugehörige Kontaktpunkt befindet. Da das Kontaktsystem gerade so konstruiert wurde, dass Kontaktpunkte zwischen Fünfecken auf die auslaufenden Kanten des jeweiligen Fünfecks gelegt werden und die Farben der Seitenbögen mit denen der überstriffenen einlaufenden Kanten übereinstimmen, erhält man also, dass die zugehörige gefärbte Orientierung gerade den gewählten Fünffarbenwald ergibt (sofern noch Randkanten zwischen den Knoten auf dem Rahmenfünfeck hinzugefügt werden) und somit die Kontakte dieser allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung tatsächlich durch den Fünffarbenwald beschrieben werden.  $\square$

Insgesamt wissen wir nun, dass obiges Kontaktsystem tatsächlich mit einer allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung korrespondiert. Es bleibt also zu zeigen, dass dieses Kontaktsystem sich auch tatsächlich geradlinig zeichnen lässt. Hierfür verwenden wir folgende allgemeine Aussage aus [dFdM07]:

**Satz A.2.3.** *Ein Kontaktsystem von Jordan-Bögen lässt sich genau dann geradlinig zeichnen, d.h. es ist genau dann dehnbar, wenn jedes Teilsystem dieses Kontaktsystems mit mindestens zwei enthaltenen Bögen mindestens drei Kontaktpunkte besitzt, die im Innern keines der Bögen des Systems liegen.*

Die im Satz beschriebenen Punkte wollen wir im Folgenden als Extrempunkte des jeweiligen Kontaktsystems bezeichnen. Als eine erste Beobachtung stellen wir fest, dass es genügt, obige Aussage für das Kontaktsystem ohne Hilfsbögen zu zeigen.

**Lemma A.2.4.** *Besitzt für einen Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten planaren Graphen jedes Teilsystem des Kontaktsystems ohne Hilfsbögen mit mindestens zwei enthaltenen Bögen mindestens drei Extrempunkte, gilt selbiges für das Kontaktsystem mit Hilfsbögen.*

*Beweis.* Sei ein beliebiges Teilsystem des Kontaktsystems mit Hilfsbögen gegeben, das mindestens zwei Bögen umfasst. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Das Teilsystem enthält mindestens zwei Bögen, die keine Hilfsbögen (also "Fünfecksseiten") sind. Dann betrachten wir das Teilsystem, das nur aus den Bögen, die keine Hilfsbögen sind, besteht. Dieses muss dann laut Annahme mindestens 3 Extrempunkte besitzen. Nun erhalten wir aus diesem wieder das eigentliche Teil-Kontaktsystem, indem wir die enthaltenen Hilfsbögen sukzessive hinzufügen.

Hierbei kann sich die Zahl der Extrempunkte nicht verringern, da die Hilfsbögen laut Konstruktion keine Kontaktpunkte in ihrem Innern besitzen und das Hinzufügen eines solchen Bogens zu einem Teilkontaktsystem in keinem Fall einen vorigen Extrempunkt zu einem Kontaktpunkt im Innern eines Bogens machen kann. Folglich besitzt das Teilkontaktsystem mit evtl.

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Hilfsbögen mindestens so viele Extrempunkte wie dessen Teilsystem ohne Hilfsbögen, d.h. mindestens 3 und in diesem Fall folgt die Behauptung.

2. Das Teilsystem enthält nur Hilfsbögen. Wir betrachten beliebige zwei der Bögen aus dem Teilsystem. Da diese höchstens Kontakte bei ihren Enden haben und sich außerdem höchstens in einem Kontaktpunkt berühren, enthält dieses Teilsystem aus zwei Bögen mindestens 3 Extrempunkte. Wie oben folgt daraus, da Hilfsbögen keine Kontaktpunkte in ihrem Innern besitzen, dass wir die restlichen Hilfsbögen sukzessive zu diesem System hinzufügen können und so das eigentliche Teilsystem erhalten, ohne jeweils die Zahl an Extrempunkten zu verkleinern. Folglich enthält auch in diesem Fall das Teilsystem mindestens 3 Extrempunkte.

3. Das Teilsystem enthält genau einen Bogen, der kein Hilfsbogen ist. Wir betrachten wieder einen beliebigen enthaltenen Hilfsbogen sowie das Teilsystem aus Bögen, das nur aus diesem und dem einzigen enthaltenen Nicht-Hilfsbogen, besteht. Analog wie in 2. besitzt dieses System mindestens drei Extrempunkte, da sie höchstens einen Kontaktpunkt besitzen, und man erhält das eigentliche Teilsystem daraus durch sukzessives Hinzufügen der restlichen Hilfsbögen, ohne dabei jeweils die Zahl an Extrempunkten zu verkleinern, und folglich besitzt das betrachtete Teilsystem auch in diesem Fall mindestens 3 Extrempunkte.

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir werden im Folgenden die Aussage der Existenz von mindestens drei Extrempunkten für Teilsysteme des Kontaktsystems ohne Hilfsbögen für Fünffarbenwälder beweisen, die folgende graphentheoretische Bedingung erfüllen:

Wir sagen im Folgenden, ein Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten planaren Graphen erfüllt die Bedingung (A), falls in diesem kein gerichteter Kreis existiert, für den die Farben von im Kreis benachbarten Kanten bzgl. der zyklischen Reihenfolge rot, grün, blau, orange, gelb den Minimalabstand 2 haben. Solche Farben wären beispielsweise Rot und Blau oder Gelb und Grün.

**Satz A.2.5.** *Gegeben sei ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph  $G$  und ein Fünffarbenwald  $F$  auf ihm, der (A) erfüllt. Dann besitzt jedes Teilsystem des zu  $F$  gehörigen Bogen-Kontaktsystems ohne Hilfsbögen mindestens 3 Extrempunkte.*

*Beweis.* Wir betrachten ein beliebiges Teil-System des Kontaktsystems ohne Hilfsbögen und führen Induktion über die Anzahl  $k$  an im Teil-System enthaltenen Bögen.

Induktionsanfang:

Ein Teil-Kontaktsystem mit  $k = 2$  Bögen besitzt  $2 \cdot 2 = 4$  Kontaktpunkte, allerdings existiert höchstens ein Kontakt zwischen den beiden enthaltenen Bögen, da im zu  $F$  gehörigen Kontakt-

system offensichtlich keine zwei Bögen mehr als einen Kontakt besitzen. Folglich existieren mindestens  $4 - 1 = 3$  Extrempunkte des Teilsystems.

Induktionsannahme:

Für ein  $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$  besitzt jedes Teilsystem des zu  $F$  gehörigen Kontaktsystems ohne Hilfsbögen mit  $k - 1$  enthaltenen Bögen mindestens 3 Extrempunkte.

Induktionsschritt:

Sei ein beliebiges Teilsystem mit  $k$  enthaltenen Bögen gegeben. Wir zeigen, dass es einen in diesem enthaltenen Bogen gibt, dessen Entfernen die Zahl an Extrempunkten nicht erhöht. Da dadurch ein Teilsystem mit  $k - 1$  enthaltenen Bögen entsteht, das also laut Induktionsannahme mindestens 3 Extrempunkte besitzt, besitzt dann auch das Teilsystem der Mächtigkeit  $k$  mindestens 3 Extrempunkte und wir sind fertig.

Zum Finden eines solchen Bogens starten wir mit einem beliebigen im Teilsystem enthaltenen Bogen und prüfen, ob dieser sich ohne Erhöhung der Zahl an Extrempunkten aus dem System entfernen lässt. Ist dies der Fall, so haben wir einen Bogen wie gefordert gefunden. Ansonsten muss es einen Kontaktpunkt des Teilsystems im Innern des Bogens geben, d.h. insbesondere einen weiteren Bogen, der den Bogen in seinem Innern mit einem Endpunkt berührt.

Laut Konstruktion des Kontaktsystems liegen beide Bögen auf "Fünfecken", die zu zwei inneren Knoten  $v$  und  $w$  gehören, und da der zweite Bogen mit seinem Endpunkt den ersten in seinem Innern trifft, muss (wieder nach Konstruktion) eine Kante zwischen  $v_1$  und  $v_2$  in  $F$  existieren, die von  $v_2$  nach  $v_1$  orientiert ist.

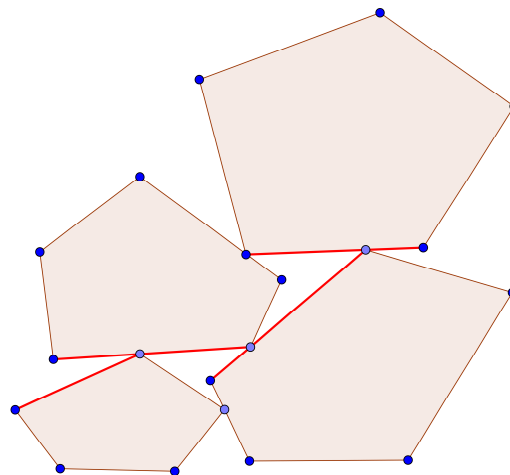


Abbildung A.10: Illustration des Verfahrens zur Findung eines geeigneten Bogens. Die durchlaufenden Bögen sind rot markiert.

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Dasselbe Vorgehen wenden wir jetzt auf den zweiten Bogen an und erhalten analog entweder einen Bogen wie gefordert oder einen weiteren inneren Knoten  $v_3$  im Fünffarbenwald, sodass  $v_3$  und  $v_2$  durch eine Kante, die zu  $v_2$  hin orientiert ist, verbunden sind, etc. Da der Fünffarbenwald endlich ist, wird durch dieses Verfahren entweder ein Bogen wie gefordert gefunden, und wir sind fertig (s.o.), oder es werden zyklisch dieselben Knoten des Fünffarbenwaldes durchlaufen. Im letzteren Fall erhielte man dann aber, da zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine rückwärts gerichtete Kante verbunden werden, einen gerichteten Kreis in  $F$ , für den insbesondere aufgrund der Wahl der Bögen und damit der Knoten die Farben zweier benachbarter Kanten bezüglich der zyklischen Anordnung rot, grün, blau, orange, gelb den Abstand 2 besitzen, im Widerspruch dazu, dass der Fünffarbenwald  $F$  nach Voraussetzung der Bedingung (A) genügt. Insgesamt folgt mit dem Induktionsprinzip die Behauptung des Satzes.  $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus den vorangegangenen Sätzen erhalten wir:

**Korollar A.2.6.** *Zu jedem Fünffarbenwald  $F$  auf einem 5-triangulierten planaren Graphen, der (A) genügt, existiert eine allgemeine Kontaktdarstellung mit Kontakten gemäß  $F$ .*

Der Autor vermutet, dass die Bedingung (A) von einem jeden Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten planaren Graphen erfüllt wird, hat aber momentan noch keinen Beweis vorliegen. Vermutlich lassen sich allgemeine Fünfeckskontaktdarstellungen auch durch schrittweises Setzen der Fünfecke, sodass die Kontakte gemäß gewähltem Fünffarbenwald erfüllt sind, konstruieren.

### A.2.3 Existenz von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen für beliebige 5-triangulierte planare Graphen nachweisen. Hierfür formulieren noch einmal Satz A.0.1 und beweisen ihn. Hierbei verwenden wir wieder das allgemeine Convex Packing Theorem aus 6.2.

**Satz A.2.7.** *Jeder 5-triangulierte planar eingebettete Graph besitzt eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung.*

*Beweis.* Gegeben sei ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3a_4a_5$ . Durch Hinzufügen von äußeren Verbindungskanten zwischen  $a_1, a_3$  und  $a_1, a_4$  erhält man eine planare Triangulation mit Außengebiet  $a_1a_3a_4$ . Mit  $a := a_1, b := a_4, c := a_3$  definieren wir die Bögen  $P_a, P_b, P_c$  aus dem Convex Packing Theorem als Strecken parallel zur oberen bzw. links unteren bzw. rechts unteren Seite eines auf dem Kopf stehenden regelmäßigen Fünfecks mit oberer Seite parallel zur  $x$ -Achse. Offensichtlich formen  $P_a, P_b, P_c$  zusammen eine geschlossene Kurve in der Ebene, die sich aus diesen im Gegenuhrzeigersinn zusammensetzt, sofern sie so definiert sind, dass sie im Gegenuhrzeigersinn zu einem umgekehrten Dreieck zusammengesetzt werden können.

Wir definieren die konvexen Mengen  $P_{a_2}, P_{a_5}$  analog als Strecken der Länge 1 parallel zur rechts oberen bzw. links oberen Seite eines auf dem Kopf stehenden regelmäßigen Fünfecks mit oberer Seite parallel zur  $x$ -Achse. Für  $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  ist  $P_v$  einfach ein regelmäßiges Fünfeck mit Grundseite parallel zur  $x$ -Achse.



Da diese Mengen offensichtlich ebenfalls konvex sind, lässt sich das Convex Packing Theorem, Satz 6.2.1 anwenden, und folglich existiert eine evtl. entartete Kontaktendarstellung von  $G$ , wobei  $a$  durch  $P_a$ ,  $b$  durch  $P_b$ ,  $c$  durch  $P_c$ , und jeder Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a, b, c\}$  durch eine aus  $P_v$  durch Verschieben, Strecken und Stauchen hervorgehenden Menge  $Q_v$  dargestellt wird.

Da laut dem modifizierten Graphen  $Q_{a_2}$  und  $Q_{a_5}$  Kontakte mit  $P_a, P_c$  bzw.  $P_a, P_b$  besitzen müssen, folgt aufgrund der obigen Definitionen, dass diese zusammen eine Art umgekehrtes Fünfeck mit oberer Seite parallel zur  $x$ -Achse bilden, siehe folgende Abbildung.

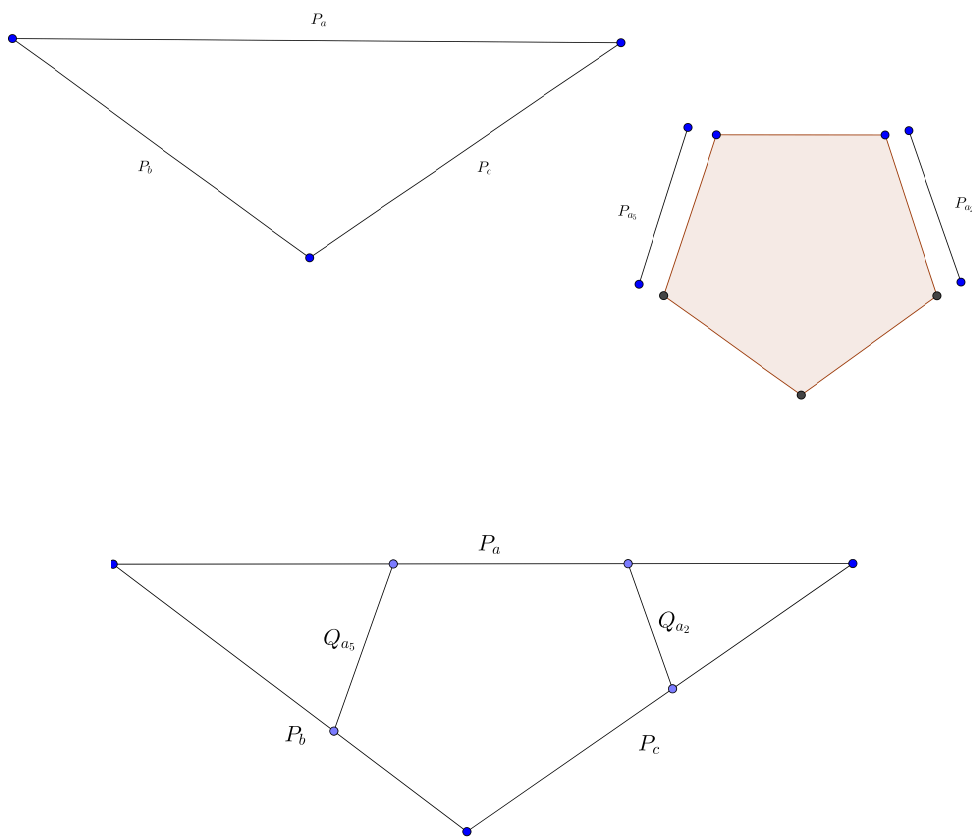


Abbildung A.11: Definition der Objekte  $P_{a_i}, i = 1, \dots, 5$ .

Laut dem Convex Packing Theorem sind also nun alle Kontakte gemäß  $G$  erfüllt, sofern wir das konstruierte umgekehrte Rahmenfünfeck verwenden, und offenbar werden die Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  durch regelmäßige Fünfecke mit parallelen Seiten sowie zur  $x$ -Achse paralleler Grundseite dargestellt, bei denen Entartung aber noch nicht ausgeschlossen ist. Für die Kompletierung des Beweises, dass es sich hierbei auch tatsächlich um eine regel-

## A.2. EXISTENZ VON FÜNFFARBENWÄLDERN UND FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

mäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$  handelt, muss gezeigt werden, dass alle Mengen  $Q_v, v \in V(G) \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  aus mehr als einem Punkt bestehen. Dass alle Fünfecke, die innere Knoten repräsentieren, innerhalb des oben konstruierten Rahmenfünfecks liegen müssen, folgt daraus, dass dies bei der Konstruktion des Monsters bei der Herleitung des Convex Packing Theorem in Abschnitt 6.2 sicher gestellt wurde.

Angenommen also, es gäbe einen inneren Knoten  $v$ , für den  $Q_v$  zu einem Punkt degeneriert. Da  $G$  5-trianguliert ist, besitzt  $v$  mindestens 3 Nachbarn  $v_1, v_2, v_3$  in  $G$ , da aufgrund der Trianguliertheit des Graphen sonst Doppelkanten entstünden. Dies müssen allerdings auch schon alle Nachbarn von  $v$  sein, denn offensichtlich treffen sich alle Fünfecke, die Knoten aus  $N(v)$  repräsentieren, in dem Punkt, zu dem das  $v$  repräsentierende Fünfeck degeneriert. Insbesondere müssen sie also zu  $v$  und untereinander adjazent sein. Der durch die Knotenmenge  $\{v\} \cup N(v)$  induzierte Teilgraph von  $G$  ist also vollständig und mit  $G$  planar, kann also bekanntlich höchstens 4 Knoten besitzen, d.h.  $|N(v)| \leq 3$ . Nun treffen sich die zu  $v_i, i = 1, 2, 3$  gehörigen Fünfecke in einem Punkt. Dies ist aufgrund der Winkelbeziehungen im Fünfeck nur dann möglich, wenn mindestens eines der drei Fünfecke ebenfalls zu einem Punkt degeneriert. Sei o.B.d.A.  $v_3$  dieser Knoten.  $v_3$  muss in  $G$  außer  $v_1, v_2, v$  noch einen weiteren Nachbarn besitzen, da aufgrund der Trianguliertheit von  $G$  sonst wieder Doppelkanten entstünden, wie folgende Abbildung veranschaulicht.

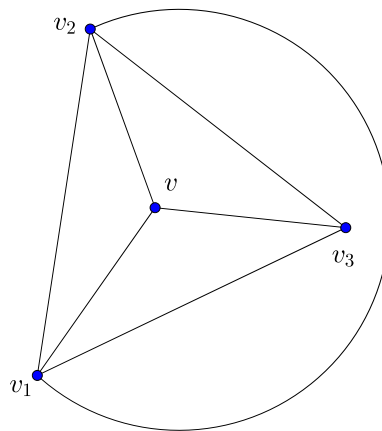


Abbildung A.12: Veranschaulichung des Arguments zur Nicht-Entartung der Kontaktdarstellung.

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass (wie oben gezeigt wurde) innere Knoten mit degenerierenden Fünfecken immer exakt 3 Nachbarn in  $G$  besitzen, und folglich war die Annahme falsch, d.h. keines der zu einem inneren Knoten gehörigen Fünfecke degeneriert, womit tatsächlich eine nicht-entartete regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$  existiert.  $\square$

### A.3 Das Gleichungssystem

Im Folgenden wollen wir analog wie im Abschnitt über gleichseitige DreieckskontaktDarstellungen eine Möglichkeit aufzeigen, FünfeckskontaktDarstellungen mittels Aufbau und Lösung eines durch einen Fünffarbenwald induzierten Gleichungssystems zu berechnen. Hierbei bezeichnet ab nun  $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  den goldenen Schnitt.

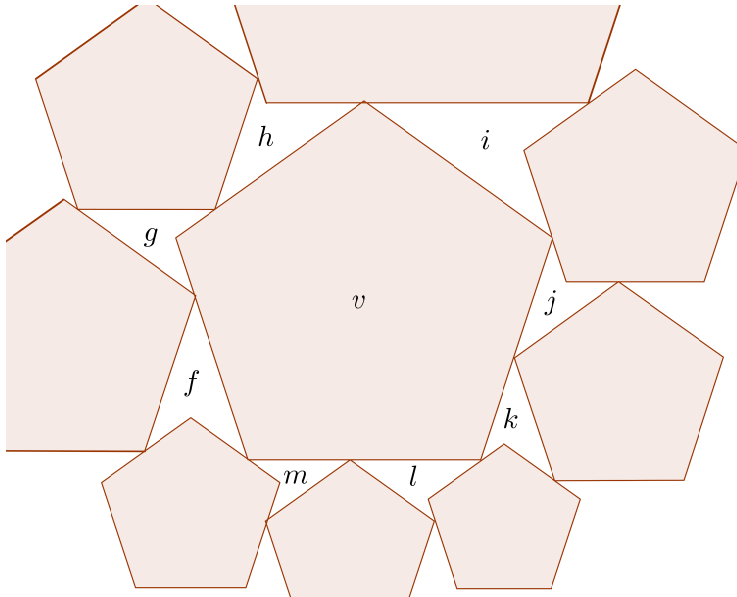


Abbildung A.13: Gleichungen im Gleichungssystem lokal an einem inneren Knoten  $v$ . Es ergeben sich (für jede der fünf Seiten des Fünfecks) die Gleichungen:

$x_v = x_{i,l} = x_{j,r} + x_{k,l} = x_{m,l} + x_{l,r} = x_{f,r} + x_{g,1} = x_{g,2} + x_{h,l}$ . Hierbei bezeichnen wir mit  $f, g, h, i, j, k, l, m$  sowohl die beschränkten Gebiete des Graphen als auch die zugehörigen Zwischenräume.

Wir betrachten einen beliebigen Fünffarbenwald auf einem 5-triangulierten planaren Graphen. Zur Konstruktion des Gleichungssystems betrachten wie in Abschnitt 6.3.1 eine evtl. hypothetische regelmäßige FünfeckskontaktDarstellung mit Kontakten gemäß dem Fünffarbenwald und leiten Beziehungen zwischen den auftretenden Seitenlängen her, woraus ein Gleichungssystem nur in Abhängigkeit des gegebenen Fünffarbenwaldes entsteht. Dies ist dann so beschaffen, dass sich wie bei den Snyder woods aus einer nichtnegativen Lösung des Systems tatsächlich eine regelmäßige FünfeckskontaktDarstellung des betrachteten Fünffarbenwaldes konstruieren lässt.

Die Variablen des nun zu konstruierenden Gleichungssystems sind wie bei den Dreieckskontakt-

### A.3. DAS GLEICHUNGSSYSTEM

darstellungen die Seitenlängen der an der hypothetischen Fünfeckskontaktdarstellung beteiligten geometrischen Strukturen. Im Gegensatz zu den Dreieckskontaktdarstellungen werden die Gebiete des Graphen bzw. die zugehörigen Zwischenräume der Fünfecke hier aber nicht mehr durch Fünfecke, sondern durch andere nicht-konvexe Gebilde repräsentiert. Diese hatten wir schon in Abschnitt A.2.2 im Zusammenhang mit allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellungen unter dem Namen Pfeil betrachtet. Um die hier gemeinten geometrischen Vierecke im Kontext von regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen von den dortigen evtl. nicht einmal geradlinigen Strukturen abzugrenzen, verwenden wir hier dem Aussehen entsprechend den Namen V-Gebiet für solch einen Zwischenraum. Für einen beliebigen solches V-Gebiet gelten aufgrund der Winkelbeziehungen im regelmäßigen Fünfeck folgende Gleichungen, die sich auf die Abbildung beziehen:

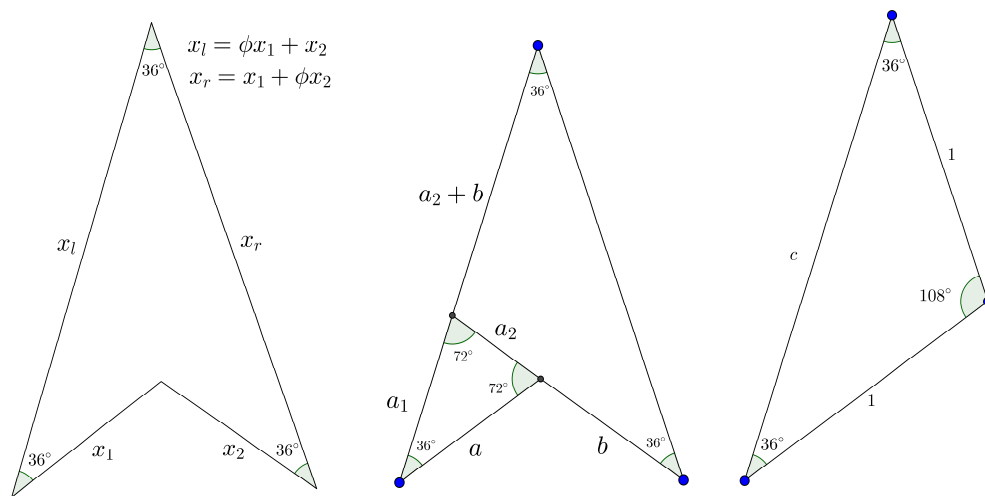


Abbildung A.14: Links: Beziehungen in einem "V-Gebiet". Sie werden in der folgenden Proposition gezeigt. Mitte: Illustration der Situation im Beweis von A.3.1 nach Verlängerung der rechts unteren Seite. Rechts: Ein zu einem Dreieck degeneriertes V-Gebiet wie im Beweis.

**Proposition A.3.1.** *Gegeben sei ein V-Gebiet in einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung, und es bezeichnen  $a, b$  die links bzw. rechts "untere" Seite des V-Gebiets sowie  $c, d$  die links bzw. rechts "obere" Seite. Mit "Seite" sind hier jeweils die entsprechenden Seitenlängen gemeint. Dann gilt:*

$$c = \phi a + b, d = a + \phi b.$$

*Beweis.* Da regelmäßige Fünfecke bekanntlich konstante Innenwinkel von  $108^\circ$  besitzen, erhält man für jeden Kontakt zwischen zwei Fünfecken in einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung, dass die beiden (aufgrund der parallelen Seiten der Fünfecke gleich großen) Innenwinkel der beiden an den Kontakt grenzenden Zwischenräume beim Kontaktpunkt jeweils  $36^\circ$  betragen. Da für ein jedes V-Gebiet die drei spitzen Innenwinkel bei genau einem Kontakt zwischen Fünfecken in der eben beschriebenen Form auftreten, besitzen für das betrachtete Gebiet diese jeweils die Größe  $36^\circ$ . Wir betrachten nun die rechts untere Seite des V-Gebiets und verlängern sie so lange, bis sie die links obere Seite des V-Gebiets trifft. Dies ergibt dann ein weiteres

Teildreieck links unten, dessen Innenwinkel sich komplett aus den restlichen ableiten lassen, siehe Abbildung A.14 rechts. Da die Innenwinkel konstant sind, und die Seitenverhältnisse in einem Dreieck mit bekannten Winkeln eindeutig festgelegt sind, existieren Konstanten  $c_1, c_2 \geq 0$ , sodass für die restlichen beiden Seitenlängen  $a_1, a_2$  des Teildreiecks (siehe obige Abbildung)  $a_1 = c_1 a, a_2 = c_2 a$  gilt. Hierbei ist insbesondere  $c_1 = 1$ , da das links untere Teildreieck gleichseitig ist (siehe obere Skizze). Zudem ergibt das gesamte V-Gebiet ohne das eben betrachtete Teildreieck ein gleichschenkliges Dreieck (denn zwei der Innenwinkel sind spitze Innenwinkel des V-Gebiets und haben somit die Größe von jeweils  $36^\circ$ ). Insbesondere sind also die beiden Schenkel gleich lang, d.h. die Teilstrecke von  $c$ , die  $a_1$  ergänzt, ist mit der Länge des anderen Schenkels, also (die Summe der Teilstrecken)  $a_2 + b$  identisch. Insgesamt ist also  $c = a_1 + a_2 + b$  gezeigt. Mit der Konstanten  $c_3 := 1 + c_2 \geq 0$  erhält man also, dass ein linearer Zusammenhang  $c = c_3 a + b$  besteht.

Dies gilt also insbesondere im Fall, dass wir ein V-Gebiet mit  $a = 1$  und  $b = 0$  vorliegen haben. In diesem Fall degeneriert das V-Gebiet zu einem Dreieck mit Innenwinkeln  $36^\circ, 108^\circ, 36^\circ$  und Seitenlängen (das Dreieck ist insbesondere aufgrund zweier identischer Innenwinkel gleichschenklige)  $1, 1, c$ , siehe Abbildung A.14 ganz rechts. Man kann sich das auch so vorstellen, dass man die Seite  $b$  kontinuierlich verkürzt und gegen 0 gehen lässt. Beim entstehenden Grenzprozess resultiert ein gleichschenkliges Dreieck, das als V-Gebiet mit  $b = 0$  interpretiert werden kann.

Unter Verwendung der geometrischen Definitionen von  $\sin, \cos$  etc. erhält man für diesen Spezialfall die Beziehung  $c = 2 \cos(36^\circ) = \phi$ . Nun muss aber nach obiger allgemeiner Beziehung auch  $c = c_3 \cdot 1 + 0 = c_3$  gelten, womit  $c_3 = c = \phi$  gezeigt ist. Aus obigem linearen Zusammenhang schließt man dann auf die linke behauptete Gleichung. Die zweite Gleichung folgt daraus sofort durch Spiegelung des V-Gebiets.  $\square$

Zudem stellt man aber fest, dass für die 5 beschränkten Gebiete, die mindestens zwei äußere Knoten beinhalten, der zugehörige Zwischenraum nicht ein V-Gebiet, sondern ein Dreieck mit eindeutig bestimmten Innenwinkeln  $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$  ist. Damit lässt es sich als V-Gebiet wie oben beschreiben, bei dem eine der beiden unteren Seiten die Länge 0 besitzt. Aus den Beziehungen in einem V-Gebiet erhält man deshalb, dass (wie im Beweis) die längere Seite eines solchen Dreiecks die  $\phi$ -fache Länge der beiden anderen Seiten besitzt.

Wir bezeichnen nun für jedes beschränkte Gebiet  $f$ , das nicht zu den 5 oben beschriebenen "Eckgebieten" gehört (die wir im Uhrzeigersinn mit  $f_i, i = 1, \dots, 5$ , beginnend beim untersten dieser Eckgebiete, durchnummerieren), mit  $x_{f,1}, x_{f,2}, x_{f,l}, x_{f,r}$  die Seitenlängen der links unteren bzw. rechts unteren bzw. links oberen bzw. rechts oberen Seite des zugehörigen V-Gebiets, bezogen auf die Lage wie in Abbildung A.14.

Für  $f_i, i = 1, \dots, 5$  bezeichnen wir mit  $x_{f_i}, i = 1, \dots, 5$  die Länge der beiden gleich langen und kürzeren Seiten des zugehörigen Dreiecks. Mit  $x_{f_i,2}, i = 1, \dots, 5$  bezeichnen wir die längere Seite des jeweiligen Dreiecks.

Zuletzt wird für alle inneren Knoten  $v$  mit  $x_v$  die Seitenlänge des zugehörigen regelmäßigen

### A.3. DAS GLEICHUNGSSYSTEM

Fünfecks bezeichnet.

Betrachten wir wie beim Dreiecks-Gleichungssystem nun jede Seite eines zu einem inneren Knoten gehörigen Fünfecks und betrachten alle an diese Seiten grenzenden Seiten von Zwischenräumen zwischen Fünfecken, so setzt sich die Fünfecksseite offensichtlich aus diesen Teilseiten zusammen, und es lässt sich  $x_v$ , wobei  $v$  der zum Fünfeck gehörige innere Knoten sei, als Summe der zu diesen Seiten gehörigen Variablen schreiben, siehe bspw. Abbildung A.13. Welche der 4 zu den jeweiligen angrenzenden Gebieten gehörigen Variablen an dieser Gleichung beteiligt sind, ergibt sich sehr leicht aus der Beschaffenheit des Fünffarbenwaldes lokal an diesem Gebiet, da sich aus diesem die Art der auftretenden Kontakte zwischen Fünfecken und somit auch die Lage des zum Gebiet gehörigen V-Gebiets sehr leicht ableiten lässt (insbesondere ist die Aufstellung dieser Gleichungen in  $\mathcal{O}(|V(G)|)$ , wobei  $G$  der betrachtete 5-triangulierte Graph ist, durchführbar). Wie dies im Detail aussieht, ist hier für unsere weiteren theoretischen Überlegungen, insbesondere zur eindeutigen Lösbarkeit des entstehenden Gleichungssystems, unwesentlich.

Nun fügen wir zu diesen Gleichungen für die Fünfecksseiten noch eine weitere Gleichung für die obere Kante des Rahmenfünfecks hinzu. Hierzu nehmen wir die Seitenlänge des Rahmenfünfecks o.E. als 1 an. Ohne diese Einschränkung könnten (wie auch schon bei den Dreiecken) Lösungen durch Skalieren aus anderen hervorgehen, insbesondere wird durch Einführung dieser Gleichung der Nullvektor als Lösung ausgeschlossen.

Wir betrachten wieder die an diese Seite des Rahmenfünfecks grenzenden Seiten von Zwischenräumen, die diese Seite wieder disjunkt zusammensetzen. Deshalb erhält man auch hier, dass die Summe der Längen dieser Teilseiten, was wieder eine lineare Kombination obiger Variablen ist, gerade die Länge der Rahmenfünfecksseite, also 1 ergibt. Welche Variablen im Einzelnen an dieser Gleichung teilnehmen, muss wieder anhand des zugehörigen Fünffarbenwaldes bestimmt werden.

Insgesamt erhalten wir für die genannten Seitenlängen / Variablen ein System linearer Gleichungen, das von diesen erfüllt werden muss. Allerdings stellt sich heraus, dass unter Verwendung der in Abbildung A.14 gezeigten Beziehungen innerhalb eines V-Gebiets oder Eckdreiecks die Gleichungen

$$x_{f,l} = \phi x_{f,1} + x_{f,2}, x_{f,r} = x_{f,1} + \phi x_{f,2}$$

für alle beschränkten Gebiete  $f \notin \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  und

$$x_{f_i,2} = \phi x_{f_i}, i = 1, \dots, 5,$$

gelten, weshalb in eben konstruiertem System die Variablen  $x_{f,r}, x_{f,l}$  für ein beschränktes Gebiet  $f \notin \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  und  $x_{f_i,2}, i = 1, \dots, 5$  durch Ersetzen eliminiert werden können.

Dieses nun reduzierte System wollen wir im Folgenden in Abhängigkeit des betrachteten Fünffarbenwaldes  $F$  in Matrixform als  $A_F x = e_1$  notieren. Hierbei werden die Gleichungen für die Seiten der innerhalb liegenden Fünfecke wie bei den Dreiecken so notiert, dass  $-1$  en nur vor

den  $x_v$ ,  $v$  innerer Knoten existieren, und die restlichen Koeffizienten in den Gleichungen unverändert bleiben.

Aufgrund der Konstruktion des Gleichungssystems liefert ein nichtnegativer Lösungsvektor des Gleichungssystems eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung.

**Satz A.3.2.** *Gegeben sei ein planar eingebetteter 5-triangulierter Graph  $G$  und ein Fünffarbenwald  $F$  darauf. Ist dann  $x_F \geq 0$  eine nichtnegative Lösung des Gleichungssystems  $A_F x = e_1$ , so existiert eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$ , die  $F$  gemäß Satz A.1.4 induziert, sodass das Fünfeck, das einen inneren Knoten  $v$  repräsentiert, die Seitenlänge  $x_v > 0$  besitzt.*

*Beweis.* Wir zeichnen wie bei den Dreieckskontaktdarstellungen zunächst die obere Randkante des Rahmenfünfecks mit Seitenlänge 1 und setzen nun sukzessiv zunächst die Fünfecke, die an diese Rahmenkante grenzen. Deren Position erhält man offensichtlich aus den Seitenlängen der an die Rahmenkante grenzenden V-Gebiete sowie den zugehörigen Knotenvariablen im Gleichungssystem. Analog verfahren wir nun mit den Fünfecken, die zu den inneren Knoten in der Nachbarschaft der eben betrachteten Knoten liegen, etc. So erhält man, wie man sich anhand der Definition des Gleichungssystems leicht klar macht, tatsächlich eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$  (und offenbar mit Kontakten gemäß  $F$ ), wobei das Fünfeck zu einem inneren Knoten  $v$  die Seitenlänge  $x_v$  besitzt. Dass diese Fünfeckskontaktdarstellung auch tatsächlich nicht-degeneriert ist, folgt nun analog wie im Beweis von A.2.7.  $\square$

## A.4 Eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems

Wir zeigen wie bei den Dreieckskontaktdarstellungen, dass das LGS  $A_F x = e_1$  für einen beliebigen Fünffarbenwald eindeutig lösbar ist. Die Grundidee der hier verwendeten Methode, um die Regularität der Koeffizientenmatrix auf die Betrachtung der Längen von alternierenden Matching-Kreisen auf einem geeigneten Hilfsgraphen zurückzuführen, wurde von Stefan Felsner entwickelt und erfolgreich bei der eindeutigen Lösbarkeit des Dreiecks-Gleichungssystems angewandt. Ein detaillierter Beweis ist wie bereits gesagt in [Ruc11] zu finden.

**Satz A.4.1.** *Sei  $G$  ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph mit  $n$  Knoten und  $F$  ein beliebiger Fünffarbenwald auf  $G$ . Sei  $A_F$  die Matrix wie im vorigen Abschnitt definiert. Dann ist  $A_F \in \mathbb{R}^{(5n-24) \times (5n-24)}$  quadratisch und regulär, insbesondere besitzt das Gleichungssystem  $A_F x = e_1$  eine eindeutige Lösung  $x_F \in \mathbb{R}^{5n-24}$ .*

*Beweis.* Zunächst ist die Matrix  $A_F$  quadratisch: Die Zahl ihrer Zeilen bzw. im Gleichungssystem vorkommenden Gleichungen ist  $5(n-5) + 1 = 5n - 24$ , nämlich 5 für jeden inneren Knoten, von welchen es  $n-5$  gibt (da 5 äußere) und eine für die obere Randkante. Es existiert für jeden inneren Knoten eine Variable im Gleichungssystem, für die 5 an zwei äußere Knoten grenzenden Gebiete eine und für alle anderen beschränkten Gebiete existieren zwei Variablen im Gleichungssystem. Da es  $2n-7$  beschränkte Gebiete gibt, hat die Matrix  $A_F$  exakt

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

$n - 5 + 5 + 2(2n - 7 - 5) = 5n - 24$  Spalten, womit  $A_F \in \mathbb{R}^{(5n-24) \times (5n-24)}$  quadratisch ist.

Wir betrachten nun die Determinante  $\det(A_F)$  der Koeffizientenmatrix und zeigen, dass sie von 0 verschieden ist. Zunächst betrachten wir aber die Matrix  $\hat{A}_F$ , die aus  $A_F$  durch Multiplikation der zu den inneren Knoten gehörigen Spalten mit  $-1$  entsteht. Diese erfüllt natürlich  $\det(A_F) = (-1)^{n-5} \det(\hat{A}_F)$  und hat nur 0, 1 und  $\phi$  als Matrixeinträge, denn die einzigen negativen Koeffizienten im Gleichungssystem sind die  $-1$ en vor den  $x_v, v \in V \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ , und diese sind bei obiger Transformation zu Einsen geworden. Nun berechnen wir  $\det(\hat{A}_F)$ . Dazu nummerieren wir die inneren Knoten und die beschränkten Gebiete des Graphen sowie die Gleichungen im LGS gemäß  $r_i, i = 1, \dots, 5n - 24$  bzw.  $g_i, i = 1, \dots, 5n - 24$  durch und berechnen nach der Leibniz-Formel:

$$\det(\hat{A}_F) = \sum_{\sigma \in S_{5n-24}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{5n-24} (\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)}.$$

Da  $(\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)} \in \{0, 1, \phi\}, i = 1, \dots, 5n - 24$ , gilt  $\prod_{i=1}^{5n-24} (\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)} = 0$ , falls mindestens ein  $(\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)}$  gleich 0 ist, und ansonsten  $\prod_{i=1}^{5n-24} (\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)} > 0$ . Sei  $P_\sigma := \prod_{i=1}^{5n-24} (\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)}, \forall \sigma \in S_{5n-24}$ . Damit vereinfacht sich obige Summe (Nullsummanden ändern die Summe nicht) zu:

$$\det(\hat{A}_F) = \sum_{\sigma \in \mathcal{M}'} \text{sign}(\sigma) \underbrace{P_\sigma}_{>0}.$$

Dabei ist  $\mathcal{M}' := \{\sigma \in S_{5n-24} \mid (\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)} > 0, i = 1, \dots, 5n - 24\}$  schlicht die Menge der Indizes, für die sich kein Nullsummand ergibt.

Sei nun  $H_F$  der bipartite Graph mit den Farbmengen  $V_1 := \bigcup_{i=1}^{5n-24} \{g_i\}, V_2 := \bigcup_{i=1}^{5n-24} \{r_i\}$  und Adjazenzmatrix  $B_F$ , definiert durch  $(B_F)_{i,j} := \text{sign}((\hat{A}_F)_{i,j}), i, j = 1, \dots, 5n - 24$ . Wir können nun eine Bijektion zwischen  $\mathcal{M}'$  und der Menge  $\mathcal{M}$  der perfekten Matchings von  $H_F$  wie folgt definieren: Einer Permutation  $\sigma \in \mathcal{M}'$  ordnen wir die Menge  $M_\sigma := \{\{g_i, r_{\sigma(i)}\} \mid i = 1, \dots, 5n - 24\}$  zu. Zunächst gilt  $M_\sigma \subseteq E(H_S)$ , denn wegen  $\sigma \in \mathcal{M}'$  ist  $(\hat{A}_F)_{i, \sigma(i)} > 0$ , also  $(B_F)_{i, \sigma(i)} = 1, i = 1, \dots, 5n - 24$ , und da  $B_F$  die Adjazenzmatrix von  $H_F$  ist, sind also  $g_i, r_{\sigma(i)}$  adjazent,  $i = 1, \dots, 5n - 24$ . Da  $\sigma$  eine Permutation und  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ist, sind insbesondere die Kanten  $\{g_i, r_{\sigma(i)}\}, i = 1, \dots, 5n - 24$  paarweise disjunkt und damit ist  $M_\sigma$  ein Matching auf  $H_F$ . Da außerdem  $|M_\sigma| = 5n - 24 = \frac{|V(H_F)|}{2}$  ist, ist  $M_\sigma \in \mathcal{M}$ . Offensichtlich ist die so definierte Abbildung eine Bijektion, da man eine Umkehrfunktion wie folgt angeben kann: Einem perfekten Matching  $M \in \mathcal{M}$  wird die Permutation  $\sigma_M$  zugeordnet, die dadurch definiert ist, dass  $\sigma_M(i)$  die Nummer des eindeutigen Partners in  $V_2$  des Knotens aus  $V_1$  mit Nummer  $i$  im Matching  $M$  ist. Wir definieren außerdem das Vorzeichen eines Matchings  $M \in \mathcal{M}$  durch  $\text{sign}(M) := \text{sign}(\sigma_M)$ .

Wir betten den Graphen  $H_F$  zunächst in die Ebene ein. Dazu betrachten wir eine nach Abschnitt A.2.2 im Fall von (A) existente Fünfeckskontaktdarstellung, welche  $F$  repräsentiert. Allerdings benötigen wir hier die Voraussetzung (A) im Satz nicht, da selbst dann, wenn (A) nicht erfüllt



wäre, eine  $F$  repräsentierende Fünfeckskontaktdarstellung mit evtl. nicht geradlinigen Fünfecken existiert, die bzgl. der nun folgenden Einbettung des Graphen dieselben Eigenschaften besitzt. Wir wollen hierbei allerdings nicht weiter ins Detail gehen. Zudem sei darauf hin gewiesen, dass für den Fall der Existenz nichtnegativer Lösungen des Gleichungssystems  $A_F x = e_1$  gemäß Satz A.4.1 eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $F$  existiert. In diesem Fall überlegt man sich mit geometrischen Argumenten, dass (A) hier mit Sicherheit erfüllt ist.

Wir setzen nun für jeden inneren Knoten von  $F$  einen Knoten in die Mitte des entsprechenden Fünfecks in der Fünfeckskontaktdarstellung und die den Variablen  $x_{f,1}, x_{f,2}$  im Gleichungssystem entsprechenden Knoten in  $H_F$  auf die linke bzw. rechte untere Kante des zum beschränkten Gebiet  $f$  gehörigen Pfeils in der Fünfeckskontaktdarstellung. Für jeden inneren Knoten  $v$  und jede Farbe  $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  wird die zu  $(v, c)$  gehörige Gleichung bzw. der dieser entsprechende Knoten in  $H_F$  in der Nähe der entsprechenden Fünfecks-Seite, aber noch innerhalb des Fünfecks platziert. Für den die erste Gleichung des Gleichungssystems repräsentierenden Knoten verfährt man analog mit der oberen Randkante. Somit sind alle Knoten von  $H_F$  eingebettet. Nun wird jeder Knoten in der Mitte eines Fünfecks mit den 5 Knoten bei den Seiten des Fünfecks durch gerade Linien verbunden, welche dann vollständig innerhalb des Fünfecks liegen. Jeder dieser 5 Knoten wiederum wird durch Jordanbögen mit allen Knoten verbunden, die auch im Gleichungssystem bei dieser Kante auftauchen. Hierbei sollen (und können) die Jordanbögen so gezeichnet werden, dass Kantenkreuzungen nur oberhalb von Pfeilen bzw. beschränkten Gebieten  $f$  auftreten, nämlich die Kreuzungen zwischen den beiden Kanten startend in den  $x_{f,1}$  bzw.  $x_{f,2}$  entsprechenden Knoten und endend beim Knoten der Fünfeckskante, an die der Pfeil mit der rechten bzw. linken oberen Kante stößt. Dies wird in der folgenden Abbildung veranschaulicht.

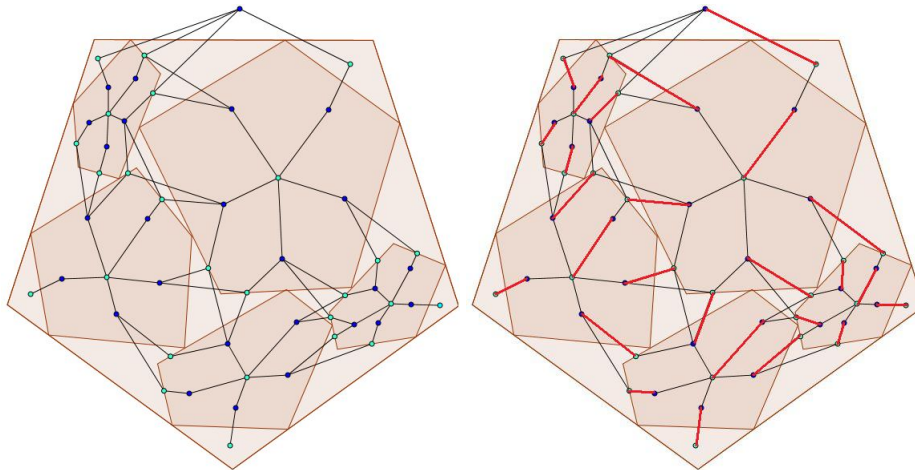


Abbildung A.15: Eine zu einem Fünffarbenwald gehörige allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung mit zugehöriger Einbettung des Graphen  $H_F$  sowie rechts das zugehörige Matching  $M_0$  darauf. Knoten der ersten Farbklasse sind blau, die der zweiten grün gezeichnet.

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

Wir geben nun ein perfektes Matching auf  $H_F$  wie folgt an: Wir betrachten wieder wie eine  $F$  induzierende allgemeine Fünfeckskontaktendarstellung bzw. bei Verletzung von (A) eine geeignete nicht-geradlinige Kontaktendarstellung und die oben angegebene planare Einbettung von  $H_F$ . Jeder innere Knoten  $v \in V(G) \setminus \{a_1, \dots, a_5\}$  matcht mit dem Knoten auf der rechts oberen Seite des zugehörigen Fünfecks. Jeder Knoten aus der 2. Farbmenge, dessen zugehörige Seite nicht die rechte Seite des angrenzenden primalen Dreiecks ist, matcht mit einem der beiden Knoten aus dem Pfeil, der an die zur Gleichung gehörige Seite grenzt und möglichst weit in Richtung der rechts oberen Seite liegt. Dies wird in der folgenden Abbildung veranschaulicht.

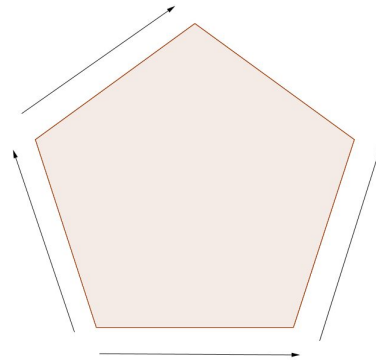


Abbildung A.16: Die Pfeile an den Kanten des Fünfecks geben die Position der Matchingpartner der Knoten auf den jeweiligen Kanten an.

Es bleibt festzulegen, mit welchem der beiden Knoten des gewählten Pfeils die Kante inzidiert. Im Allgemeinen tut sie dies mit demjenigen der beiden Knoten, der weiter in Richtung der rechts oberen Kante bzgl. den verbindenden Kanten in der gewählten Einbettung liegt, siehe Abbildung A.15. Es existiert allerdings ein Spezialfall, und dieser liegt vor, falls einer der beiden Knoten auf der rechts oberen Seite eines Fünfecks liegt. Dann wird nämlich dieser als Matchingknoten gewählt, unabhängig von dessen Position im Pfeil.

Außerdem matcht der Knoten auf der oberen Randkante mit dem Dreieck rechts oben. Wir haben also insgesamt  $n - 5 + 4(n - 5) + 1 = 5n - 24 = \frac{|V(H_S)|}{2}$  Zuweisungen gemacht. Wenn wir zeigen können, dass alle so definierten Matchingkanten disjunkt sind, haben wir also gezeigt, dass es sich um ein perfektes Matching auf  $H_F$  handelt.

Offensichtlich ist eine Matchingkante aus der zuerst festgelegten Menge an Matchingkanten von allen restlichen definierten Kanten disjunkt, da diese entweder im Gegensatz zu dieser außerhalb des Fünfecks oder bei einem Knoten einer anderen Fünfecksseite liegen, und nur diese Kante den Knoten in der Mitte des zugehörigen Fünfecks verwendet. Es bleibt also auszuschließen, dass auch zwei unterschiedliche Kanten aus der zweiten Gruppe immer voneinander disjunkt sind. Dieser Beweis enthält einige Fallunterscheidungen, ist aber recht einfach und soll deshalb

an dieser Stelle nicht aufgeführt werden.

Da wir nun wissen, dass ein Matching  $M_0$  (wie oben konstruiert) auf  $H_F$  existiert, überlegen wir uns, wie hieraus andere Matchings auf  $H_F$  entstehen. Seien also  $M, M'$  beliebige perfekte Matchings auf  $H_F$ . Wir betrachten die symmetrische Differenz  $M\Delta M'$  der Matchings, d.h. in dieser Menge liegen alle Kanten, die in exakt einer der beiden Matchings enthalten sind. Betrachten wir nun  $M\Delta M'$  als Teilgraph von  $H_F$  mit Knotenmenge  $V(H_F)$ , so gilt für alle  $w \in V(H_F)$ :  $\deg_{M\Delta M'}(w) \in \{0, 2\}$ , da sich die beiden zu  $w$  inzidenten Matchingkanten in  $M\Delta M'$  auslöschen, falls sie identisch sind. Folglich setzt sich  $M\Delta M'$  aus disjunkten Kreisen  $C_1, \dots, C_m$  in  $H_F$  zusammen, die offensichtlich sowohl  $M$ - als auch  $M'$ -alternierend sind. Also erhält man von  $M$  ausgehend das Matching  $M'$ , indem man entlang jedes Zyklus  $C_i, i = 1, \dots, m$  jede Matchingkante zu einer Nichtmatchingkante macht und umgekehrt. Übertragen wir diesen Prozess auf die den Matchings entsprechenden Permutationen  $\sigma_M, \sigma_{M'}$ , so erhält man für jeden Kreis  $C_i$  eine Permutation  $\sigma_i$  auf den Nummerierungen in  $V_1$ , welche die Nummern aller Knoten aus  $V_1$  außerhalb des Zyklus unverändert lässt, aber jeder Nummer eines Knotens auf  $C_i$  aus  $V_1$  die Nummer des Knotens des doppelten linken bzw. rechten Nachbarn auf  $C_i$  und aus  $V_1$  zuordnet, in der Richtung, in welcher eine (die) Matchingkante mit dem gewählten Knoten inzidiert. Es gilt dann

$$\sigma_M = \sigma_{M'} \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m$$

und somit mit der Signaturformel

$$\text{sign}(M) = \text{sign}(M')\text{sign}(\sigma_1)\text{sign}(\sigma_2)\dots\text{sign}(\sigma_m) \Leftrightarrow \text{sign}(M') = \text{sign}(M)\text{sign}(\sigma_1)\text{sign}(\sigma_2)\dots\text{sign}(\sigma_m).$$

Da die  $\sigma_i, i = 1, \dots, m$  zyklische Permutationen der Länge  $\frac{|V(C_i)|}{2}$  sind, gilt für sie:  $\text{sign}(\sigma_i) = (-1)^{\frac{|V(C_i)|}{2}+1}, i = 1, \dots, m$ .

Aus diesem Grund betrachten wir im unten folgenden Lemma die Länge der  $M_1$ -alternierenden Kreise in  $H_F$ .  $M_1$  sei dabei das Matching, das aus  $M_0$  durch oben beschriebenes "Invertieren" von Matchingzyklen der in der folgenden Abbildung beschriebenen Art entstehen:

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

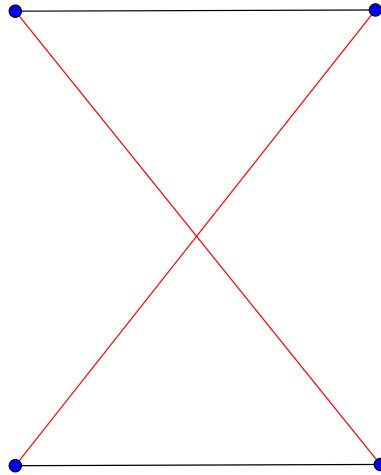


Abbildung A.17: Ein X-Kreis mit zwei diagonalen Matchingkanten.

Nach diesem Vorgang existieren X-Kreise dieses Typs in  $M_1$  also nicht mehr, insbesondere besitzt jeder X-Kreis in  $M_1$  mindestens eine diagonale Nicht-Matchingkante. Zunächst bereiten wir das Lemma aber mit einem anderen vor, das schon in [Fel10c] und [Ruc11] für den Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des Dreiecks-Gleichungssystems verwendet wurde.

**Lemma A.4.2.** *Sei  $G$  ein bipartiter planar eingebetteter Graph, dessen Gebiete allesamt von Kreisen der Länge 6 umschlossen sind. Dann besitzt ein Kreis mit Länge 2 modulo 4 eine gerade Zahl an Knoten in seinem Innern, ein Kreis der Länge 0 modulo 4 eine ungerade. Anders gesagt, ist  $C$  ein Kreis in  $G$ ,  $I(C)$  die Zahl der in dessen Inneren liegenden Knoten, so gilt  $I(G) + \frac{|V(C)|}{2} \pmod{2} = 1$ .*

*Beweis.* Siehe [Ruc11]. □

**Lemma A.4.3.** *Sei  $C$  ein  $M_1$ -alternierender Kreis in  $H_F$ , und es sei  $M(C)$  das Matching, das aus  $M_1$  durch oben beschriebenes "Invertieren" von  $C$  entsteht. Dann gilt*

$$\text{sign}(M(C)) = (-1)^{N(C)} \text{sign}(M_1),$$

wobei  $N(C)$  die Zahl an von  $C$  durchlaufenen X-Kreisen des Typs 3, 8 oder 10 bezeichnet, welche im Beweis genauer beschrieben werden.

*Beweis.* Wie man sich leicht klar macht, haben die minimalen Kreise in  $H_F$  Länge 4 oder 6, wobei Kreise der Länge 4 nur in Form von X-Kreisen über einem jeden Pfeil in der oben beschriebenen planaren Einbettung auftreten. Wie bereits oben angesprochen, existieren in dieser

Einbettung von  $H_F$  in der Ebene Kantenkreuzungen nur gerade innerhalb dieser Sanduhren. Um obige Aussage zu zeigen, führen wir den Fall des Graphen  $H_F$  auf den einfacheren Fall eines planaren Graphen zurück und verwenden dann Lemma A.4.3. Hierzu "entkreuzen" wir jeden solchen X-Kreis in der Einbettung von  $H_F$ , indem wir eine diagonale Nicht-Matchingkante löschen. Dass dies in  $M_1$  bei jedem X-Kreis möglich ist, wurde beim Übergang von  $M_0$  zu  $M_1$  sichergestellt, s.o.

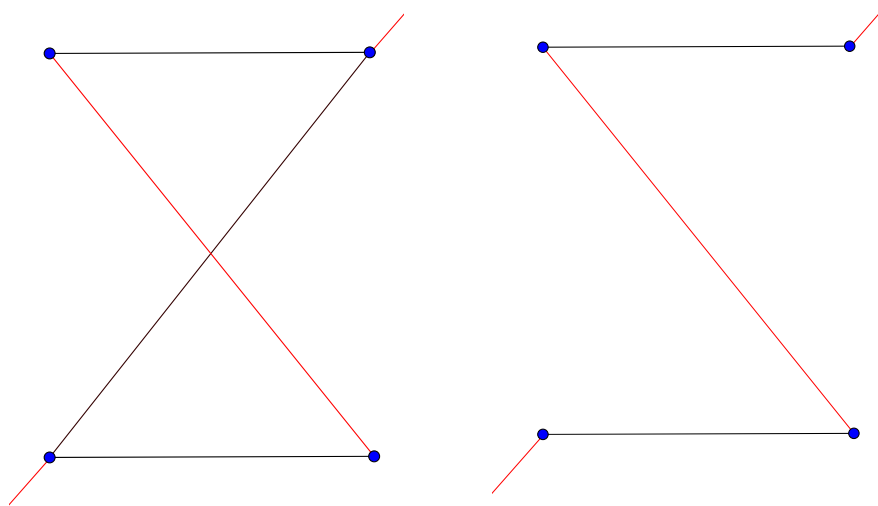


Abbildung A.18: Entkreuzen eines X-Kreises durch Löschen einer diagonalen Nicht-Matchingkante.

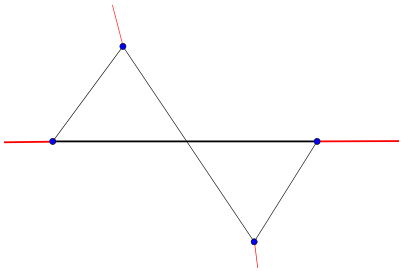
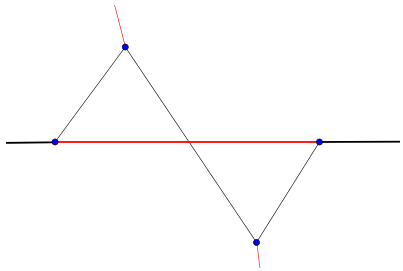
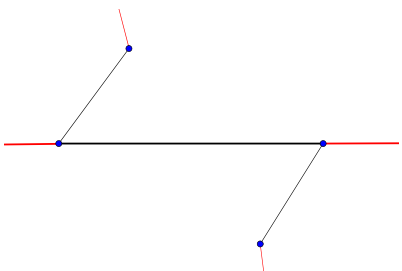
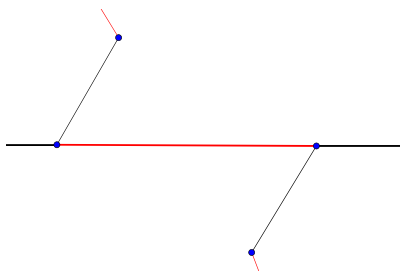
Da alle minimalen Kreise abgesehen von den X-Kreisen Länge 6 besitzen und nur bei diesen Kreuzungen vorkommen, liegt nach dem Entkreuzen ein planarer Graph vor, dessen alle minimalen Kreise Länge 6 besitzen, anders gesagt, alle beschränkten Gebiete des Graphen sind von Kreisen der Länge 6 umschlossen. Da hierbei nur Kanten aus dem Graphen gelöscht werden, bleibt die Bipartitheit des Graphen  $H_F$  behalten.

Sei nun  $C$  ein beliebiger  $M_1$ -alternierender Kreis. An  $C$  werden durch das Entkreuzen höchstens dann Änderungen vorgenommen, wenn diagonale Kanten von X-Kreisen durchlaufen werden. Bei Wahlmöglichkeiten entscheiden wir im Folgenden bei von  $C$  teilweise durchlaufenen X-Kreisen, welche der beiden diagonalen Kanten wir löschen, bei den anderen X-Kreisen ist dies irrelevant. Die hierbei möglichen auftretenden Fälle lassen sich systematisch ordnen und sind lokal in der folgenden Tabelle eingezeichnet, zusammen mit dem resultierenden Bild nach Entkreuzen des zugehörigen X-Kreises, und wie  $C$  im neuen planaren Graphen (diesen wollen wir

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

als  $G_F$  bezeichnen) an dieser Stelle ggf. verändert wird, denn für die weiteren Überlegungen benötigen wir, dass der Kreis  $C$  ggf. nach Änderung auch im entkreuzten Graphen beibehalten bleibt. Hierbei können evtl. auch mehrere Kreise entstehen, siehe den letzten Fall in folgender Tabelle.

Für jeden Fall wird die Veränderung der Länge des Kreises ( $\Delta|V(C)|$ ), die Veränderung der Zahl an innerhalb des Kreises liegenden Knoten bzgl. der Einbettung ( $\Delta I$ ) sowie die Zahl an hinzukommenden Matchingkanten, die einen Knoten innerhalb des Kreises mit einem auf oder außerhalb des Kreises liegenden Knoten verbindet ( $\Delta K$ ), durch die Änderung des Kreises am jeweilig durchlaufenen X-Kreis angegeben. Man beachte, dass der Fall eines X-Kreises mit zwei diagonalen Matchingkanten nicht auftreten kann (s.o.). Weshalb tatsächlich nur diese Fälle auftreten können, wird im Anhang der Arbeit erläutert. In den Abbildungen sind die zum jeweiligen Kreis gehörigen Kanten fett markiert. Bei mehrfacher Schließung (siehe die letzten beiden Fälle), wird dies mit beispielhafter Länge des Kreises markiert.

Kreis vor Entkreuzen		
Kreis nach Entkreuzen		
$\Delta V(C) $	0	0
$\Delta I$	0	0
$\Delta K$	0	0

ANHANG A. FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Kreis vor Entkreuzen		
Kreis nach Entkreuzen		
$\Delta V(C) $	2	0
$\Delta I$	-1	0
$\Delta K$	-1	0

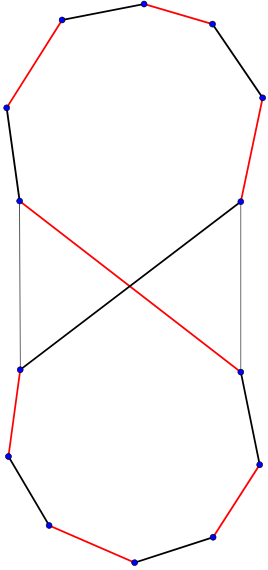
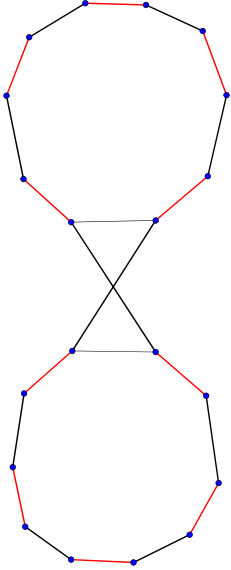
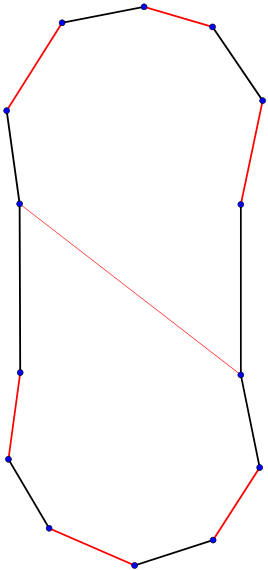
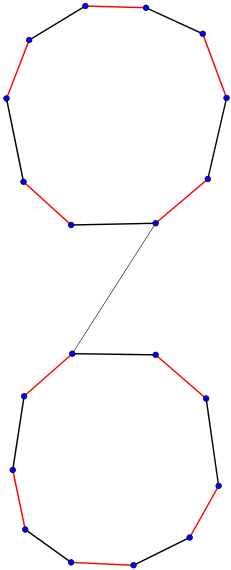
Kreis vor Entkreuzen		
Kreis nach Entkreuzen		
$\Delta V(C) $	0	0
$\Delta I$	0	0
$\Delta K$	0	0

A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

Kreis vor Entkreuzen		
Kreis nach Entkreuzen		
$\Delta V(C) $	0	-2
$\Delta I$	0	0
$\Delta K$	0	0



ANHANG A. FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN

Kreis vor Entkreuzen		
Kreis nach Entkreuzen		
$\Delta V(C) $	0	-
$\Delta I$	0	-
$\Delta K$	0	-

Wir nehmen im Folgenden für  $C$  zunächst an, dass er keine X-Kreise des letzten und zehnten Typs in obiger Tabelle enthält. Dieser wird im Nachhinein "hinzugefügt", da er im Gegensatz zu

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

den restlichen Typen mehrere Kreise beim Entkreuzen liefert.

Es bezeichne nun für einen durchlaufenen  $X$ -Kreis  $V, I, K$  die Zahl an Knoten die auf bzw. innerhalb des Kreises liegen, sowie die Zahl der Matchingkanten, die einen inneren Knoten mit einem nicht inneren Knoten verbinden, und  $V', I', K'$  die entsprechenden Größen nach dem Entkreuzen dieses  $X$ -Kreises.

Dann gilt für die in der Tabelle angegebenen Änderungen, dass  $V' = V + \Delta|V(C)|, I' = I + \Delta I, K' = K + \Delta K$ .

Seien nun  $X_i, i = 1, \dots, m$  die  $X$ -Kreise, deren diagonale Kanten tlw. von  $C$  durchlaufen werden, es bezeichnen  $V_C, I_C, K_C$  und  $\tilde{V}_C, \tilde{I}_C, \tilde{K}_C = 0$  die oben definierten Größen für den Kreis  $C$  und den aus ihm entstehenden Kreis  $\tilde{C}$  nach dem Entkreuzen. Es folgt also, dass, wenn  $\Delta V_i, \Delta I_i, \Delta K_i$  die Änderungen der jeweiligen Größen bei Entkreuzen von  $C$  bei  $X_i$  bezeichnet,

$$\tilde{V}_C = V_C + \sum_{i=1}^m \Delta V_i, \tilde{I}_C = I_C + \sum_{i=1}^m \Delta I_i, \tilde{K}_C = K_C + \sum_{i=1}^m \Delta K_i = \sum_{i=1}^m \Delta K_i.$$

Nun lässt sich auf  $\tilde{C}$  wie oben überlegt Lemma A.4.2 anwenden, und es folgt  $\frac{\tilde{V}_C}{2} + \tilde{I}_C \pmod 2 = 1$ . Teilen wir die linke obige Gleichung durch 2 und addieren sie zur zweiten, so erhält man:

$$\left( \frac{V_C}{2} + I_C + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta V_i}{2} + \Delta I_i \right) \pmod 2 = \left( \frac{\tilde{V}_C}{2} + \tilde{I}_C \right) \pmod 2 = 1.$$

Nun beschreibt  $I_C$  die Zahl an innerhalb von  $C$  liegenden Knoten und  $K_C$  die Zahl an Matchingkanten, die einen innerhalb von  $C$  liegenden Knoten mit einem auf oder außerhalb von  $C$  liegenden Knoten verbindet. Folglich ist  $I_C + K_C$  die Zahl an Knoten, die innerhalb von  $C$  liegen oder durch eine Matchingkante mit einem Knoten innerhalb von  $C$  verbunden sind, und damit besitzt jeder Knoten aus dieser Knotenmenge einen eindeutigen Partner aus derselbigen, nämlich der zu ihm im Matching adjazente Knoten. Insbesondere muss also, da jede der Matchingkanten zwei Knoten enthält,  $I_C + K_C$  gerade und somit  $-I_C \pmod 2 = K_C \pmod 2$  gelten. Eingesetzt in obige Kongruenz liefert dies die Beziehung:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{V_C}{2} \pmod 2 &= \left( \left( \sum_{i=1}^m \frac{\Delta V_i}{2} + \Delta I_i \right) + K_C \right) \pmod 2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \frac{\Delta V_i}{2} + \Delta I_i + \Delta K_i \right) \pmod 2. \end{aligned}$$

Nun greifen wir auf die vor Formulierung des Lemmas gemachten Überlegungen zurück, welche besagen, dass die Änderung des Vorzeichens des Matchings durch "Invertieren" des alternierenden Kreises  $C$  gerade

$$(-1)^{1 + \frac{V_C}{2}} = (-1)^{1 + \frac{V_C}{2}} \pmod 2 = \prod_{i=1}^m (-1)^{\frac{\Delta V_i}{2} + \Delta I_i + \Delta K_i}$$

ist. Obige Tabelle zeigt nun aber, dass die Größen  $\frac{\Delta V_i}{2} + \Delta I_i + \Delta K_i$  nur im Falle, dass  $X_i$  dem Typ 3 oder 8 in der Tabelle entspricht, ungerade sind. Folglich liefern solche Kreise  $X_i$  eine  $-1$  in obigem Produkt, alle restlichen eine  $1$ . Ist dann  $N(C)$  die Zahl an X-Kreisen  $X_i$ , die dem Fall 3 oder 8 in der Tabelle entsprechen, so vereinfacht sich obiges Produkt offensichtlich zu  $(-1)^{N(C)}$  und dies ist die Änderung des Vorzeichens des Matchings. Damit das Lemma für den Fall des Nicht-Auftretens von X-Kreisen des zehnten Typs in der Tabelle gezeigt.

Wir lassen nun diese Restriktion wieder fallen und betrachten einen beliebigen alternierenden Matchingkreis  $C$  in  $M_1$ . Laut dem zehnten Fall in der Tabelle erhält man dann durch das Entkreuzen aller enthaltenen X-Kreise dieses Typs weitere alternierende Matchingkreise  $C_1, \dots, C_r$ . Für diese gilt (siehe folgende Abbildung), dass das Matching  $M'$ , das aus  $M_1$  durch jeweiliges Invertieren von  $C_1, \dots, C_r$  entsteht, sich von  $M(C)$  nur dadurch unterscheidet, dass in  $M'$  für jeden der  $r$  X-Kreise die beiden nicht-diagonalen Kanten und in  $M$  jeweils die beiden diagonalen Kanten gematcht sind. Da jeder X-Kreis die Länge 4 besitzt, erhält man durch jeweiliges Invertieren dieser X-Kreise mit jeweils negativer Vorzeichenveränderung, dass  $\text{sign}(M(C)) = (-1)^r \text{sign}(M')$  gilt.

Gleichzeitig enthalten die Kreise  $C_1, \dots, C_r$  jeweils keine X-Kreise des zehnten Typs in der Tabelle mehr, womit sich obige Überlegungen anwenden lassen. Folglich gilt, da sich das Matching  $M'$  aus  $M_1$  durch jeweiliges Entkreuzen der  $C_i, i = 1, \dots, m$  ergibt, dass

$$\begin{aligned} \text{sign}(M(C)) &= (-1)^r \text{sign}(M') = (-1)^r \prod_{i=1}^r (-1)^{N(C_i)} \text{sign}(M_1) \\ &= (-1)^{r + \sum_{i=1}^r N(C_i)} \text{sign}(M_1) = (-1)^{N(C)} \text{sign}(M_1). \end{aligned}$$

Letzteres folgt dabei daraus, dass sich die von  $C$  durchlaufenen X-Kreise aus den  $r$  Kreisen des Typs 10 sowie den restlichen X-Kreisen, die sich auf die  $C_i, i = 1, \dots, m$  aufteilen, zusammensetzen.  $\square$

Wir nutzen obiges Lemma nun, um die Vorzeichen der Matchings auf  $H_F$  allgemein zu beschreiben. Nach den Vorüberlegungen geht jedes Matching  $M \in \mathcal{M}$  aus  $M_1$  durch das Invertieren von knotendisjunkten Kreisen  $C_1, \dots, C_m$  hervor, für welche laut Lemma A.4.3 dann  $\text{sign}(M) = \text{sign}(M_1) \cdot \prod_{i=1}^m (-1)^{N(C_i)} = (-1)^{N(M)} \text{sign}(M_1)$ , mit  $N(M) := \sum_{i=1}^m N(C_i)$  gilt.

Sei unabhängig davon im Folgenden  $\mathcal{C}$  die Menge an Mengen von disjunkten alternierenden Kreisen bzgl.  $M_1$ , die wie oben beschrieben in Bijektion zu  $\mathcal{M}$  steht. Insbesondere ist  $\emptyset \in \mathcal{C}$ , was dem Matching  $M_1$  entspricht.

Wir definieren nun für eine beliebige Menge  $C$  an alternierenden Matchingkreisen in  $M_1$  die Kreismenge  $\hat{C}$  in  $H_F$  und/oder  $G_F$  dadurch, dass sie die Kreise enthält, die aus den in  $C$  enthaltenen Kreisen durch jeweiliges Entkreuzen der durchlaufenen X-Kreise des Typs 3,8 oder 10 entstehen. Wie man sich anhand der zugehörigen Abbildungen in der Tabelle klar macht, bleibt durch das Entkreuzen der enthaltenen X-Kreise der Typen 3, 8 oder 10 insbesondere die

#### A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS

Eigenschaft erhalten, dass es sich bei den enthaltenen Kreisen um alternierende Matchingkreise handelt.

Wir definieren nun die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathcal{C}$  gemäß

$$C \sim D : \iff \hat{C} = \hat{D}.$$

Somit sind zwei Kreismengen genau dann äquivalent, wenn sie nach jeweiligem Entkreuzen dieselben Kanten enthalten. Wir setzen  $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} / \sim$ . Offensichtlich ist für alle  $C \in \mathcal{C}$  die Äquivalenzklasse  $[C]$  bezüglich  $\sim$  mit  $[\hat{C}]$  identisch, da nach Entkreuzen eines Kreises bei den  $X$ -Kreisen von Typ 3, 8 oder 10 solche  $X$ -Kreise offensichtlich nicht mehr in dieser Form durchlaufen werden.

Insbesondere besitzt also jede Äquivalenzklasse exakt einen von  $X$ -Kreisen des Typs 3, 8 oder 10 freien Repräsentanten.

Sei solch ein Repräsentant  $C$  einer beliebigen Äquivalenzklasse gewählt. Dann entsteht laut Definition jede Kreismenge  $D \in [C]$  aus  $C$  durch Rückgängigmachen des Entkreuzens an den in  $D$  enthaltenen  $X$ -Kreisen des Typs 3, 8 oder 10 auftreten. Es seien  $X_1, \dots, X_r$  all diese  $X$ -Kreise. Wir bezeichnen für alle  $x \in \mathcal{P}(\{1, \dots, r\})$  mit  $C(x) \in \mathcal{C}$  die Kreismenge, die aus  $C$  durch Wiederverkreuzen der  $X$ -Kreise  $X_i, i \in x$  entstehen. Nach eben gemachten Überlegungen ist dann die Abbildung

$$C(\cdot) : \mathcal{P}(\{1, \dots, r\}) \longrightarrow [C], x \longrightarrow C(x)$$

eine Bijektion.

Nach Lemma A.4.3 erhält man darüber hinaus, dass für das durch das Invertieren der in  $C(x)$  enthaltenen Kreise aus  $M_1$  entstehende Matching  $M(C(x))$  die Beziehung  $\text{sign}(M(C(x))) = (-1)^{|x|} \text{sign}(M_1)$  gilt.

Wir müssen nun weiter den Einfluss der Kreis-Invertierung auf den Wert der eingangs definierten Produkte  $P_M, M \in \mathcal{M}$  analysieren. Für einen alternierenden Matchingkreis  $D$  und den/die dadurch entstehende(n) Kreis(menge)  $\hat{D}$  gilt, wie man an obiger Tabelle erkennen kann, dass nach Invertieren der/des Kreise(s) in  $\hat{D}$  beim jeweiligen  $X$ -Kreis die beiden nicht-diagonalen Kanten gematcht sind, und nach Invertieren von  $D$  die beiden diagonalen Matchingkanten gematcht sind. Ansonsten unterscheiden sich die beiden entstehenden Matchings nicht. Dies entspricht einem Faktor  $\phi^2$  bei den beiden nicht-diagonalen Matchingkanten und einem Faktor 1 bei den diagonalen Matchingkanten für das jeweilige Produkt  $P_M, M \in \mathcal{M}$ . Folglich verändert das Entkreuzen eines  $X$ -Kreises des Typs 3, 8 oder 10 das zugehörige Matchingprodukt um den Faktor  $\frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{1+\phi}$ .

Angewandt auf obige Definition von  $C(\cdot)$  folgt, dass

$$P_{M(C(x))} = \left( \frac{1}{1+\phi} \right)^{|x|} P_{M(C)}, \forall x \in \mathcal{P}(\{1, \dots, r\})$$

gilt.

Zusammengefasst erhalten wir für die Summe  $\sum_{D \in [C]} \text{sign}(M(D))P_{M(D)}$  mithilfe des binomischen Lehrsatzes den Wert:

$$\begin{aligned} \sum_{x \subseteq \{1, \dots, r\}} \text{sign}(M(C(x)))P_{M(C(x))} &= \text{sign}(M_1)P_{M(C)} \sum_{x \subseteq \{1, \dots, r\}} (-1)^{|x|} \left( \frac{1}{1+\phi} \right)^{|x|} \\ &= \text{sign}(M_1)P_{M(C)} \sum_{s=0}^r \sum_{\substack{x \subseteq \{1, \dots, r\}, \\ |x|=s}} \left( -\frac{1}{1+\phi} \right)^{|x|} = \text{sign}(M_1)P_{M(C)} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left( -\frac{1}{1+\phi} \right)^s \\ &= \text{sign}(M_1)P_{M(C)} \left( \frac{\phi}{1+\phi} \right)^r. \end{aligned}$$

Laut Definition der Produkte  $P_M, M \in \mathcal{M}$  gilt  $P_{M(C)} > 0$ . Wir nutzen die anfangs hergeleitete Beziehung  $\det(\hat{A}_F) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \text{sign}(M)P_M = \sum_{C \in \mathcal{C}} \text{sign}(M(C))P_{M(C)}$ . Da die Äquivalenzklassen in  $\tilde{\mathcal{C}}$  disjunkt zerlegen, erhält man mit eben hergeleiteter Beziehung:

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}_F) &= \sum_{A \in \tilde{\mathcal{C}}} \sum_{C \in A} \text{sign}(M(C))P_{M(C)} \\ &= \text{sign}(M_1) \sum_{A \in \tilde{\mathcal{C}}} P_{M(A)} \left( \frac{\phi}{1+\phi} \right)^{N(A)}. \end{aligned}$$

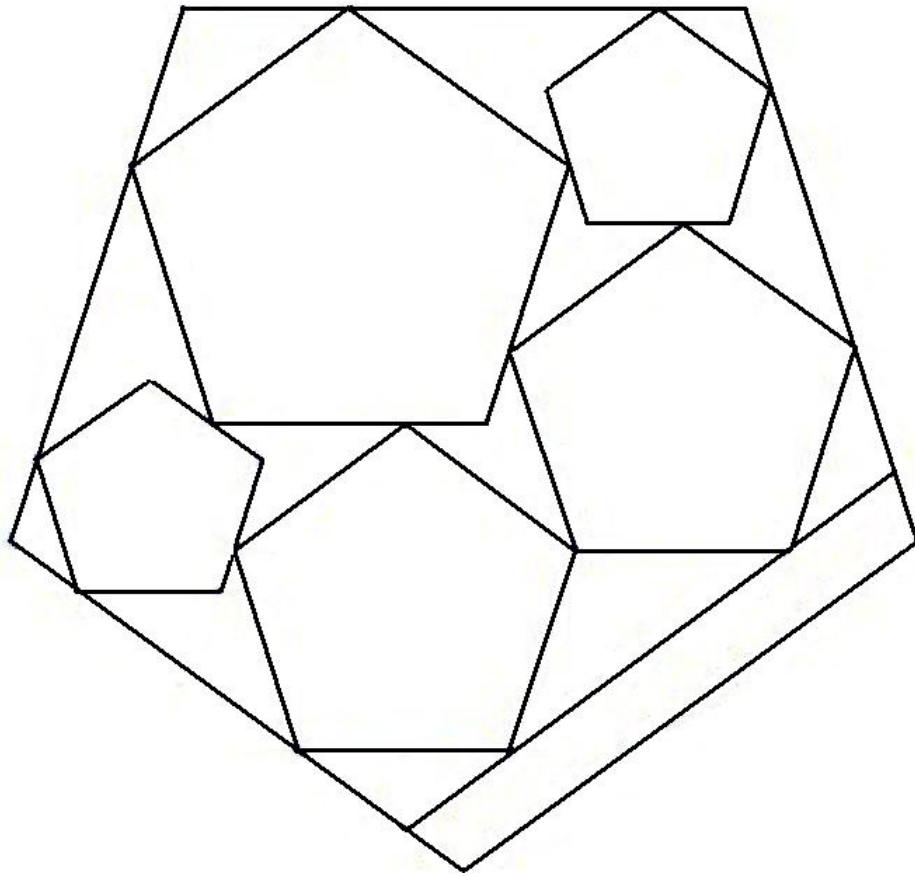
Dabei bezeichnet  $M(A)$  das durch Invertieren des eindeutigen kreuzungsfreien Kreises in  $A$  aus  $M_1$  entstehende Matching und  $N(A)$  die Zahl an von Kreismengen in  $A$  teilweise durchlaufenen X-Kreise der Form 3, 8 oder 10. Im Betrag gilt damit, da  $\mathcal{M} \neq \emptyset$  und somit  $\tilde{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ :

$$|\det(A_F)| = |\det(\hat{A}_F)| = \sum_{A \in \tilde{\mathcal{C}}} \underbrace{P_{M(A)}}_{>0} \underbrace{\left( \frac{\phi}{1+\phi} \right)^{N(A)}}_{>0} > 0,$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die folgende Abbildung zeigt eine mithilfe des gemäß dem eben bewiesenen Satz eindeutig lösbaren Gleichungssystems berechnete regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung eines planaren Graphen. Es ist zu erkennen, dass das Rahmenfünfeck bei regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen im Gegensatz zu dem bei gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen i.A. nicht regelmäßig ist.

A.4. EINDEUTIGE LÖSBARKEIT DES GLEICHUNGSSYSTEMS



## A.5 Weitere Überlegungen zu regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellungen und Ausblick

Nachdem wir in den vorigen Abschnitten gezeigt haben, dass wir bei Vorgabe eines Fünffarbenwaldes  $F$  auf einem 5-triangulierten planar eingebetteten Graphen ein Gleichungssystem  $A_F x = e_1$  mit eindeutigem Lösungsvektor  $x_F$  konstruieren können, aus dem sich bei Nichtnegativität von  $x_F$  eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung des Graphen ergibt. Nun stellt sich analog wie bei den Dreieckskontaktdarstellungen die Frage, welche Fünffarbenwälder nicht-negative Lösungsvektoren besitzen und wie diese gefunden werden können. Zudem wäre es möglich, dass mehrere verschiedene regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellungen desselben Graphen existieren könnten, während bei den gleichseitigen Dreieckskontaktdarstellungen ja vermutet wird, dass diese eindeutig sind, siehe Abschnitt 7.1. Bisher sind hierzu allerdings wenige theoretische Erkenntnisse vorhanden. Fakt ist aber, dass aufgrund der variableren Definition der Fünffarbenwälder wesentlich mehr Übergangsmöglichkeiten zwischen Fünffarbenwäldern bestehen. Hierzu zählen neben speziellen triangular flips auch das Umdrehen und/oder Umfärben geeigneter Kanten im Fünffarbenwald, das weiter unten erläutert wird.

Deshalb wäre es für zukünftige Forschungen interessant, evtl. analog zu den Schnyder woods geeignete Flip-Aktionen auf Fünffarbenwäldern und ein entsprechendes Verfahren zu entwickeln, das dann auf Durchführbarkeit und Endlichkeit untersucht wird. Hierfür wollen wir im Folgenden einen ersten Ansatz angeben.

Ein Beispiel für eine Flip-Aktionen besteht in dem bereits oben angesprochenen "Verschieben von Kontakten" in einer allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung, übertragen auf den Fünffarbenwald.

Man betrachte zur Veranschaulichung eine allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung eines 5-triangulierten planar eingebetteten Graphen  $G$ , deren Kontakte durch einen Fünffarbenwald  $F$  beschrieben werden, und einen Pfeil in ihr. Wir nehmen an, der Pfeil besitze bei den beiden Kontakten des Fünfecks, welches beim Pfeil keine auslaufende Kante besitzt, mindestens einen Kontakt, der zu diesem Fünfeck hin zeigt (in der folgenden Abbildung tun das beide Kontakte). Dann können wir solch einen Kontakt ändern, indem wir die Spitze des Fünfecks, welche in den Pfeil "hinein zeigt" in Richtung des jeweiligen Kontakts über die Ecke des anderen am Kontakt beteiligten Fünfecks schieben. Dies ist zwar bei einer allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung i.A. nicht ohne Veränderung der restlichen Fünfecke durchführbar, es illustriert (wie in den folgenden Abbildungen) aber gut die entsprechende Änderung des Fünffarbenwalds: Man überlegt sich, dass sich die Änderung beim zugehörigen Fünffarbenwald im Umdrehen und einer entsprechenden Farbänderung der zum Kontakt gehörigen Kante äußert. Anhand von (FF 1) sieht man sofort ein, dass diese Flip-Aktion die Eigenschaften eines Fünffarbenwaldes erhält.

A.5. WEITERE ÜBERLEGUNGEN ZU REGELMÄSSIGEN  
FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN UND AUSBLICK

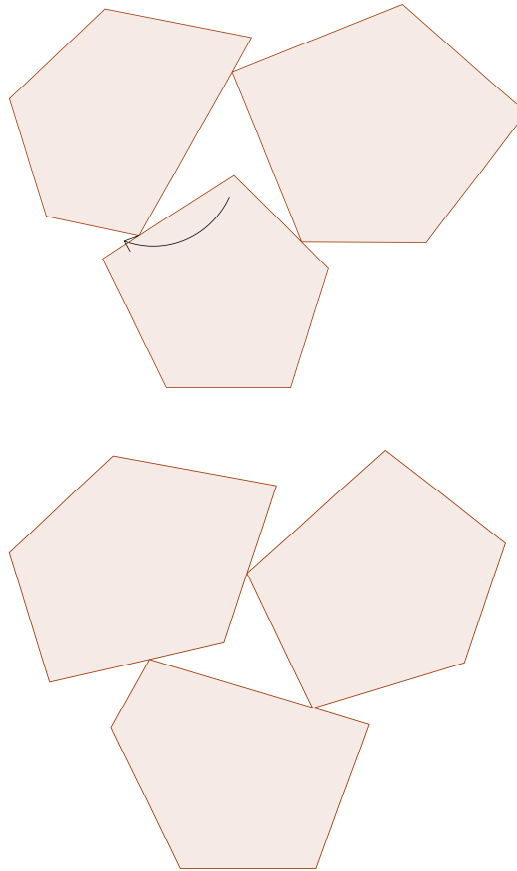


Abbildung A.19: Verschieben eines Kontaktes in einer allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung

Diese Flip-Aktion werden wir im Zusammenhang mit den nun folgenden Satz zur Konstruktion eines ersten Verfahrens zur Konstruktion einer regelmäßigen Fünfeckskontaktdarstellung verwenden.

Der Satz gibt eine zur Nichtnegativität eines Fünffarbenwaldes äquivalente und evtl. einfacher zu behandelnde Bedingung an. Der Beweis orientiert sich hierbei etwas an Teilen des Beweises, dass negative Regionen in Schnyder woods durch gerichtete Kreise berandet werden.

**Satz A.5.1.** *Gegeben sei ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph  $G$  und ein Fünffarbenwald  $F$  auf ihm, der der Bedingung (A) (siehe Abschnitt A.2.2) genügt. Dann gilt für den (eindeutigen, siehe Abschnitt A.4) Lösungsvektor  $x_F$  des Gleichungssystems:*

$$x_F \geq 0 \iff \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} : ((x_F)_{f,1} \geq 0 \iff (x_F)_{f,2} \geq 0).$$

*Dabei bezeichnen wieder  $\mathcal{F}$  die Menge der beschränkten Gebiete von  $G$  und  $f_1, \dots, f_5$  die an die äußeren Kanten von  $G$  grenzenden Gebiete.*



*Beweis.* Die Hinrichtung ist offensichtlich. Sei also nun die rechte Bedingung erfüllt. Nehmen wir die Variablen  $(x_F)_{f,l} := \phi(x_F)_{f,1} + (x_F)_{f,2}, (x_F)_{f,r} := (x_F)_{f,1} + \phi(x_F)_{f,2}, \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_1, \dots, f_5\}$ , die wir bei der Konstruktion des LGS zur Verkleinerung dessen gestrichen hatten, hinzu, so folgt aus der Bedingung, dass für jedes Gebiet  $f \in \mathcal{F} \setminus \{f_1, \dots, f_5\}$  entweder alle der 4 zugehörigen Variablen negativ oder alle nichtnegativ sind.

Angenommen nun, es gäbe einen negativen Eintrag im Lösungsvektor. Handelt es sich dabei um die Variable, die zu einem der Gebiete  $f_1, \dots, f_5$  gehört, so folgt aus dem LGS, dass insbesondere die Knotenvariable des in diesem enthaltenen inneren Knoten negativ ist. Ist eine beliebige Variable zu einem inneren Knoten negativ, so gilt dies auch für mindestens eine der vier Variablen eines Gebiets  $f \in \mathcal{F} \setminus \{f_1, \dots, f_5\}$ , da laut LGS jede Knotenvariable Summe solcher Variablen ist. In jedem Fall folgt also die Existenz einer negativen Gebietsvariable. Gleichzeitig existiert aufgrund der ersten Gleichung des LGS mindestens eine positive solche Variable.

Wir betrachten nun zur anschaulicheren Argumentation eine zum Fünffarbenwald  $F$  gehörige gemäß Korollar A.2.6 existente allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$  mit Kontakten gemäß  $F$ . Wir betrachten obige Variablen nun als in dieser Kontaktdarstellung durch die entsprechenden Seiten(abschnitte) repräsentiert. Insbesondere erzeugt ein negativer Seitenabschnitt bereits einen ganzen Pfeil mit negativen Seitenabschnitten und selbiges gilt für die nichtnegativen Seitenabschnitte, s.o. Insbesondere kann man also von einem negativen Gebiet sprechen, wenn alle zugehörigen Variablen negativ sind und von einem nichtnegativen, wenn alle nichtnegativ sind. Da sowohl negative als auch nichtnegative Gebiete existieren (s.o.), existiert insbesondere eine unregelmäßige Kante  $e$  im Fünffarbenwald, die also zwischen einem negativen und einem nichtnegativen Gebiet verläuft. Übertragen auf die allgemeine Fünfeckskontaktdarstellung hat man einen komplett negativen Pfeil und einen komplett nichtnegativen, die beide an den zur Kante gehörigen Kontaktpunkt grenzen, siehe folgende Abbildung.

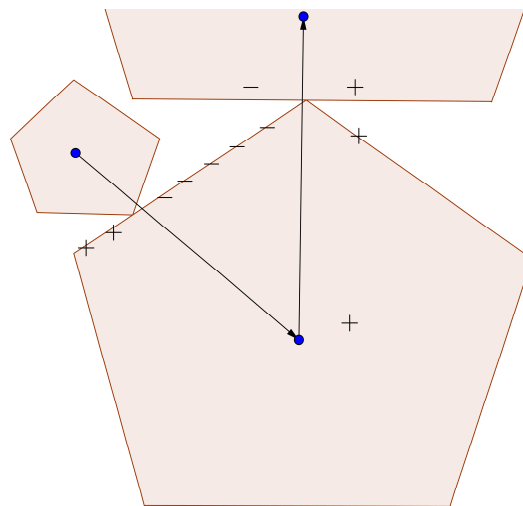


Abbildung A.20: Illustration des zentralen Beweisargumentes

### A.5. WEITERE ÜBERLEGUNGEN ZU REGELMÄSSIGEN FÜNFECKSKONTAKTDARSTELLUNGEN UND AUSBLICK

Wir betrachten nun das der beiden Fünfecke, das zum Startknoten  $v$  der betrachteten Kante gehört. Dieser hat (durch die beiden anliegenden Pfeile) neben dem Kontaktpunkt sowohl einen negativen als auch einen nichtnegativen Seitenabschnitt. Im Falle  $x_v \geq 0$  laufen wir nun in Richtung des negativen bzw. im Falle  $x_v < 0$  in Richtung des nichtnegativen Seitenabschnitts das Fünfeck entlang, bis wir auf einen nichtnegativen Seitenabschnitt im ersten bzw. einen negativen Seitenabschnitt im zweiten Fall stoßen. Dies muss jeweils noch innerhalb der jeweiligen Fünfecksseite geschehen, da man sonst eine komplett negative Seite im ersten Fall bzw. eine komplett nichtnegative Seite im zweiten Fall erhielte, was  $x_v \geq 0$  bzw.  $x_v < 0$  widerspräche. Somit erhält man auf der jeweiligen Fünfecksseite einen negativen und einen nichtnegativen Seitenabschnitt, die aneinandergrenzen und einen negativen sowie einen nichtnegativen Pfeil induzieren. Diese werden durch ein Fünfeck getrennt, das mit einer Ecke die jeweilige Fünfecksseite berührt. Somit haben wir in Abhängigkeit von  $e$  eine weitere unregelmäßige Kante  $\text{pred}(e)$  mit  $\text{head}(\text{pred}(e)) = \text{tail}(e)$  konstruiert. Da es sich jeweils um eine direkt an den Kontaktpunkt anliegende Fünfecksseite handelt, haben die Farben der Kanten  $e, \text{pred}(e)$  insbesondere einen Minimalabstand von zwei bzgl. der in (FF 1) definierten zyklischen Ordnung der Farben von Kanten im Fünffarbenwald. Nun können wir analog eine weitere unregelmäßige Kante mit demselben Verfahren ausgehend von  $\text{pred}(e)$  konstruieren. Da der Graph nur endlich viele Knoten enthält, muss dieses Verfahren irgendwann abbrechen, was nur dann möglich ist, wenn es in einen Zyklus gerät. Betrachten wir also die erste Kante, die bei diesem Verfahren zum zweiten Mal besucht wird, so haben wir aufgrund von  $\text{head}(\text{pred}(e)) = \text{tail}(e)$  einen gerichteten Kreis in  $F$  konstruiert, für den die Farben zweier benachbarter Kanten den Minimalabstand zwei bzgl. der zyklischen Ordnung aus (FF 1) besitzen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $F$  (A) genügt. Somit war die Annahme falsch, es gibt keine negativen Einträge in  $x_F$  und folglich gilt  $x_F \geq 0$ .  $\square$

Für das im Folgenden aufgezeigte Verfahren benötigen wir noch folgendes Korollar des eben bewiesenen Satzes:

**Korollar A.5.2.** *Sei  $G$  ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph und  $F$  ein Fünffarbenwald darauf, der (A) erfüllt. Ist dann  $x_F \not\geq 0$ , so gibt es ein Gebiet  $f$  mit mindestens einer zugehörigen negativen Variable, für welches die oben beschriebene Flip-Aktion anwendbar ist.*

*Beweis.* Aus  $x_F \not\geq 0$  folgt offensichtlich, dass es beschränkte Gebiete mit (zumindest einem) negativen Lösungsvektoreintrag gibt. Wäre für keines von diesen oben beschriebene Flip-Aktion anwendbar, so müsste, bezogen auf die zugehörigen Pfeile in einer zugehörigen allgemeinen Fünfeckskontaktdarstellung, das Fünfeck, dessen Spitze in den Pfeil "hinein zeigt", mit den beiden benachbarten Ecken die beiden anderen Fünfecke berühren. Bezeichnet  $v$  den zu diesem Fünfeck gehörigen Knoten und  $f$  das betrachtete beschränkte Gebiet, so gälte also  $(x_F)_{f,1} = x_v = (x_F)_{f,2}$ . Da  $f$  beliebig als beschränktes Gebiet mit mindestens einem negativen Lösungsvektoreintrag gewählt war, gilt also für alle solchen Gebiete  $(x_F)_{f,1} \geq 0 \Leftrightarrow (x_F)_{f,2} \geq 0$ . Für die restlichen beschränkten Gebiete folgt dies aus der Nichtnegativität beider Variablen. Folglich wäre die rechte Bedingung aus A.5.1 erfüllt, und damit  $x_F \geq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung im Satz. Folglich muss ein beschränktes Gebiet wie gefordert existieren.  $\square$

Hiermit haben wir alle Mittel zusammen, um den folgenden Algorithmus zum (evtl.) Finden eines nichtnegativen Fünffarbenwaldes, der sich an Algorithmus 6.3.6 orientiert, zu formulieren:

**Algorithmus A.5.3.** Gegeben sei ein 5-triangulierter planar eingebetteter Graph  $G$  mit Außengebiet  $a_1a_2a_3a_4a_5$ .

- Konstruiere mit dem in Abschnitt A.2 einen Fünffarbenwald  $F$  auf  $G$ .
- Berechne die (eindeutige, siehe A.4) Lösung  $x_F$  des Gleichungssystems  $A_F x = e_1$ .
- Wenn  $x_F \not\geq 0$ : Wähle ein gemäß Korollar A.5.2 existentes beschränktes Gebiet  $f$ , das mindestens einen negativen Lösungsvektoreintrag besitzt und für das obige Flip-Aktion anwendbar ist.
- Wende die Flip-Aktion auf  $f$  an und datiere  $F$  entsprechend auf. Gehe zu Schritt 2.
- Konstruiere aus den Einträgen von  $x_F \geq 0$  und  $F$  eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$ , Abbruch.

**Ausgabe:** Eine regelmäßige Fünfeckskontaktdarstellung von  $G$ .

Bei den (wenigen und kleinen) bisher betrachteten Beispielen von Graphen hat sich herausgestellt, dass obiges Verfahren in kurzer Zeit zu einem nichtnegativen Fünffarbenwald gelangt. Dabei wurde jeweils durch die Anwendung der Flip-Aktion auf ein entsprechendes Gebiet die komplette Nichtnegativität dessen erreicht. Daher besteht die Hoffnung, dass dasselbe für beliebige Graphen passiert. Wie bei den verschiedenen Verfahren für die Schnyder woods liegt hier allerdings noch kein konkreter Endlichkeitsbeweis vor, sodass theoretisch die immer selben Fünffarbenwälder zyklisch durchlaufen werden könnten. Weitere Forschungen könnten daher darin bestehen, den Einfluss oben beschriebener Flip-Aktion auf die Lösungsvektoreinträge zu beschreiben. Zudem bleibt zu klären, inwiefern die Bedingung (A) für alle im Algorithmus durchlaufenen Fünffarbenwälder korrekt ist. Der Autor vermutet allerdings wie gesagt, dass diese für beliebige Fünffarbenwälder korrekt ist. Dies zu beweisen könnte ein weiteres zukünftiges Forschungsziel sein.

Zudem ist hier aufgrund von Satz A.5.1 ist eine einfache zur Nichtnegativität äquivalente Bedingung vorhanden, mit der evtl. sogar direkt Fünffarbenwälder konstruiert werden können, deren Nichtnegativität bewiesen werden kann.

Ein weiterer sehr interessanter Punkt ist der, dass sich in den Experimenten durchgehend herausgestellt hat, dass zwar evtl. Gebietsvariablen, nie aber Knotenvariablen in einem Lösungsvektor negativ waren. Eine plausible Begründung dessen liegt dem Autor allerdings noch nicht vor, evtl. ist dies auch nur durch die geringe Größe der betrachteten Beispiele bedingt. In jedem Fall wäre es interessant, ein Programm zur Hand zu haben, das obiges Verfahren auf beliebige Graphen anwendet, wie es bei den Dreieckskontaktdarstellungen von Frau Julia Rucker geschrieben wurde und mir freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde.

Zuletzt sei noch auf den Ansatz hingewiesen, das bekannte Farkassche Lemma zu verwenden, um einfachere Bedingungen für die Nichtnegativität von Fünffarbenwäldern oder Schnyder

woods zu erhalten. Hierbei müsste dann unter geeigneten Bedingungen die Unzulässigkeit eines linearen Ungleichungssystems gezeigt werden. Zudem könnte diese Methode für obige Frage nach der Nichtnegativität der Knotenvariablen zum Einsatz kommen.

## A.6 Auftreten von X-Kreisen in alternierenden Matchingkreisen

In diesem letzten Abschnitt wollen wir uns noch kurz überlegen, weshalb die in der Tabelle im Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des Fünfecks-Gleichungssystem angegebene Liste an von einem alternierenden Matchingkreis durchlaufenen X-Kreisen, wobei mindestens eine der durchlaufenen Kanten diagonal ist, tatsächlich vollständig ist. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1. Es wird exakt eine (diagonale) Kante des X-Kreises vom Matchingkreis durchlaufen. Hierbei kann dann nur einer der Fälle 1-3 aus der Tabelle auftreten, da der Fall zweier diagonalen Matchingkanten in  $M_1$  nicht auftreten kann.
2. Es werden exakt eine nicht-diagonale und eine diagonale Kante des Matchingkreises durchlaufen. Hier kommen (bis auf Symmetrie) nur die Fälle 6 und 7 in Frage.
3. Es werden exakt zwei nicht-diagonale und eine diagonale Kante des X-Kreises durchlaufen. Hier kommen bis auf Spiegelung nur die Fälle 4 und 5 aus der Tabelle in Frage.
4. Es werden die beiden diagonalen und eine nicht-diagonale Kante durchlaufen. Hier kommt bis auf Spiegelung nur Fall 8 aus der Tabelle in Frage.
5. Es werden beide diagonalen Matchingkanten durchlaufen. Hierbei kann sich der Kreis nur auf die beiden in den Fällen 9 und 10 in der Tabelle beschriebenen Fällen schließen. Dass die beiden Fälle (bis auf Symmetrie) hier die einzig möglichen sind, folgt aus der Bipartitheit des Graphen  $G_F$  und damit der geraden Länge von Kreisen im Graphen sowie der Nicht-Existenz von X-Kreisen mit zwei diagonalen Matchingkanten.

# Literaturverzeichnis

- [Bau12] Melanie Baur. *Combinatorial Concepts and Algorithms for Drawing Planar Graphs*. PhD thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion Fachbereich Informatik und Informationswissenschaft, Universität Konstanz, 2012.
- [BBG<sup>+</sup>07] M. Badent, C. Binucci, E. D. Giacomo, W. Didimo, S. Felsner, F. Giordano, J. Kratochvíl, P. Palladino, M. Patrignani, and F. Trotta. Homothetic triangle contact representations of planar graphs. 2007. in Proc. CCG 2007, Carlton Univ.
- [Bre00] Enno Brehm. 3-orientations and schnyder 3-decompositions, 2000. Diplomarbeit, FB Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin.
- [dFdM07] Hubert de Fraysseix and Patrice Ossona de Mendez. Barycentric systems and stretchability. *Discrete Applied Mathematics* 155, pages 1079–1095, 2007.
- [dFdMR94] Hubert de Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez, and Pierre Rosenstiehl. On triangle contact graphs. *Comb., Probab. and Comput.*, 3:233–246, 1994.
- [Fel04] Stefan Felsner. *Geometric graphs and arrangements: Some chapters from Combinatorial Geometry*. Vieweg, 2004.
- [Fel10a] Stefan Felsner. Crash course: Schnyder woods and applications, 2010. Vortrag im Rahmen des Dagstuhl Seminars 2010.
- [Fel10b] Stefan Felsner. Representing planar graphs with rectangles and triangles, 2010. Vortrag im Bernoulli Center, EPFL Lausanne.
- [Fel10c] Stefan Felsner. Triangle contact representations. KAM-DIMATIA. Midsummer Combinatorial Workshop 2009, 2010.
- [FZ08] Stefan Felsner and Florian Zickfeld. On the number of planar orientations with prescribed degrees. *Electron. J. Comb.*, 2008. Research paper R77, 41.
- [GLP10] Daniel Gonçalves, Benjamin Levêque, and Alexandre Pinlou. Triangle contact representation and duality. pages 262–273. Proceedings of the 18th international conference on graph drawing, 2010.
- [Hoc10] Winfried Hochstättler. *Algorithmische Mathematik*. Springer, 2010.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [Koe36] Paul Koebe. Kontaktprobleme der konformen abbildung. *Ber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.–Phys., Kl, 88*, pages 141–164, 1936.
- [Ruc11] Julia Rucker. Kontaktdarstellungen von planaren graphen, 2011. Diplomarbeit, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin.
- [Sch90] Oded Schramm. *Combinatorically prescribed packings and applications to conformal and quasiconformal maps*. PhD thesis, Princeton University, 1990.
- [tCLiL05] Yi ting Chiang, Cing Chi Lin, and Hsueh i Lu. Orderly spanning trees with applications. *SIAM journal on computing*, pages 34:924–945, 2005.