FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachbereich Mathematik

Untersuchungen zur 'Sticky-Vermutung'

Diplomarbeit

von

Michael Wilhelmi

betreut von

Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Berlin, den 11. November 2016

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Winfried Hochstättler für die Auswahl des sehr spannenden und vielschichtigen Themas dieser Arbeit. Vielen Dank für die vielen hilfreichen Anregungen, vor allen Dingen, für die exzellente Betreuung.

Ein herzliches Dankeschön geht an alle, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben. Besonders möchte ich mich bei Claudia bedanken, denn ohne Deine moralische Unterstützung wäre ich niemals fertig geworden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die **Sticky-Vermutung** wurde 1982 von S. Poljak und D. Turzik in [20] aufgestellt und seitdem nicht bewiesen. Sie lautet:

Ein Matroid, welches 'sticky' ist, ist auch modular.

Ein Matroid M ist **'sticky'**, wenn zu jedem Paar von Erweiterungen von M ein Matroid existiert, **Amalgam** genannt, welches beide Erweiterungen als Restriktion beinhaltet. Die Umkehrung der Sticky-Vermutung wurde in der selben Arbeit von Poljak und Turzik bereits bewiesen. Modulare Matroide sind sticky. Wir beweisen in dieser Arbeit folgende Aussage, die wir **Satz (ST2)** nennen:

Ein Rang-4-Matroid ist sticky, wenn jeder modulare Filter dieses Matroids ein Hauptfilter ist.

Aus diesem Satz folgern wir, dass die Sticky-Vermutung äquivalent ist mit einer Vermutung, die William Kantor 1974 in [12] aufgestellt hat, und die bis heute auch nicht bewiesen ist. Die **Kantor-Vermutung** (in unserer Formulierung) lautet folgendermassen:

Jedes endliche Matroid, in dem jeder modulare Filter ein Hauptfilter ist, ist modular.

Da die Kantor-Vermutung für Matroide mit unendlichen Grundmengen nicht gilt, folgt daraus, dass die Sticky-Vermutung im Fall unendlicher Matroide nicht stimmt. Um zum Ziel dieser Arbeit zu gelangen, sind aber zunächst einige vorbereitende Abschnitte nötig, die die Voraussetzungen dieser umfangreichen Theorie bereitstellen.

Zunächst stellen wir die benötigten grundlegenden Sätze und Definitionen zusammen. Neben Grundtatsachen aus der Matroid- und Verbandstheorie sowie der projektiven Geometrie diskutieren wir hier auch einige speziellere Definitionen: Ein Paar von Flächen (X, Y) eines Matroids lässt sich **zum Schnitt bringen**, wenn es eine Punkterweiterung des Matroids gibt, in der der modulare Defekt des Paares kleiner wird. Wir zeigen, dass dies gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass es in dem Matroid einen modularen Filter gibt, der X und Y enthält, nicht jedoch $X \cap Y$. Ein Matroid hat die **allgemeine Intersection-Property**, wenn jedes nicht-modulare Flächenpaar des Matroids zum Schnitt gebracht werden kann. Wir definieren hier noch zwei weitere Intersection-Properties. Alle drei dieser Eigenschaften sind in Rang-4-Matroiden äquivalent und auch zu der Tatsache, dass in dem Matroid die Bundle-Condition gilt. In einem Matroid ist die **Bundle-Condition** erfüllt, wenn es nicht das Vámos-Matroid als Restriktion hat.

In einem kleinen Exkurs besprechen wir noch **freie Ebenenerweiterungen** und zeigen, dass sie bis auf triviale Ausnahmen unendlich und nicht-desarguessch sind.

Im dritten Abschnitt betrachten wir Matroide, bei denen sich jedes Hyperebenenpaar in einer Hypergeraden schneidet, wir nennen solche Matroide **hypermodulare Matroide**. Sie werden bei der Kantor-Vermutung eine wichtige Rolle spielen. Neben allgemeinen Tatsachen über solche Matroide betrachten wir den Fall der hypermodularen Rang-4-Matroide genauer. Zu einem Paar von disjunkt coplanaren Linien l_1 und l_2, welches nicht zum Schnitt gebracht werden kann, gibt es in solchen Matroiden immer zwei weitere Linien, die mit l_1 und l_2 ein Vámos-Matroid bilden. Diese Tatsache wird bei dem Beweis von Satz (ST2) sehr wichtig werden.

Punkterweiterungen solcher Matroide, in denen disjunkt coplanare Linien zum Schnitt gebracht werden, enthalten keine neuen Linien oder Ebenen. Zudem entsprechen sich in solchen Matroiden die Linien einer Ebene e und die Linien einer Kontraktion durch einen Punkt, der nicht in e liegt, eineindeutig.

Im vierten Abschnitt betrachten wir Matroide, bei denen jeder nicht-leere modulare Filter ein Hauptfilter ist. Wir nennen solche Matroide **Hauptfilter-Matroide**. Es gibt in diesen Matroiden keine Flächenpaare, die zum Schnitt gebracht werden können, zudem sind sie immer auch hypermodulare Matroide. Kontraktionen von Hauptfilter-Matroiden sind wieder Hauptfilter-Matroide und Rang-4-Hauptfilter-Matroide, in denen die Bundle-Condition gilt, sind modular.

Im fünften Abschnitt kommen wir auf lokale Projektivität zu sprechen. Ein Rang-4-Matroid heisst **lokal projektiv**, wenn jede Punktkontraktion des Matroids eine projektive Ebene ist. Wir zeigen, dass hypermodulare Rang-4-Matroide lokal projektiv sind oder sich aus modularen Matroiden kleineren Ranges zusammensetzen. Wenn sie lokal projektiv und endlich sind, dann sind alle Punktkontraktionen projektive Ebenen der gleichen Ordnung. Wir sprechen dann von einem **hypermodularen Matroid der Ordnung q**. Es gibt auch lokal-projektive Rang-4-Matroide, die keine hypermodularen Matroide sind, weil sie disjunkte Ebenen haben. Wir stellen das wichtigste Beispiel, den Witt-Raum, der in [24] genauer beschrieben ist, kurz vor.

Im sechsten Abschnitt kommen wir zu unserem ersten Hauptergebnis. Wir beweisen drei Einbettungssätze: Der **erste Einbettungssatz** sagt, dass sich jedes hypermodulare Rang-4-Matroid M mit höchstens abzählbar unendlicher Grundmenge in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid M' einbetten lässt, welches keine neuen Linien hat. Wenn in M zusätzlich die Bundle-Condition gilt, dann ist M' ein modulares Matroid. Der **zweite Einbettungssatz** sagt, dass sich jedes endliche Rang-4-Matroid in ein hypermodulares Rang-4-Matroid einbetten lässt. Für den Beweis dieses Satzes verallgemeinern wir die Technik der freien Ebenenerweiterung. Die Einbettungen, die wir im allgemeinen dabei erhalten, sind unendlich, lokal projektiv und besitzen nur nicht-desarguessche projektive Ebenen als Punktkontraktionen. Als Folgerung dieser beiden Sätze erhalten wir den **dritten Einbettungssatz**: Jedes endliche Rang-4-Matroid lässt sich in ein Hauptfilter-Matroid einbetten.

Nach all dieser Vorarbeit kommen wir endlich zu der oben erwähnten Kantor-Vermutung. Wir beginnen zunächst mit einem Satz, der für die Sticky- und die Kantor-Vermutung gleichermassen wichtig ist und der von Rudolf Wille in [23] und William Kantor in [12] zur selben Zeit unabhängig voneinander bewiesen wurde. Wir nennen ihn **Satz von Wille/Kantor**. Er besagt, dass ein Matroid von Rang $n \geq 4$ in ein modulares Matroid einbettbar ist, wenn alle Kontraktionen des Matroids durch eine Fläche von Rang $\leq n-4$ in ein modulares Matroid streng einbettbar sind. Wir skizzieren hier auch kurz Kantors Beweis, der mit Bündelraumtechniken arbeitet.

Für Flächen von Rang $n-3$, das heisst für lokal projektive Matoride und für hypermodulare Matroide, gilt der Satz nicht, der Witt-Raum ist das berühmteste Gegenbeispiel, er lässt sich nicht in ein modulares Matroid einbetten. Er hat jedoch disjunkte Hyperebenen. Für endliche hypermodulare Matroide ist kein Gegenbeispiel bekannt. Kantor vermutete, dass dies auch so sein muss, seine Vermutung lautet im Original:

Ein endliches hypermodulares Matroid lässt sich immer in ein modulares Matroid einbetten. (Formulierung von W. Kantor in [12])

Wir zeigen, dass diese Formulierung äquivalent zu zwei anderen Formulierungen der Vermutung ist: **Für endliche hypermodulare Rang-4-Matroide gilt die Bundle Condition.** (Formulierung von A. Bachem/W. Kern in [3]) sowie: **Jedes endliche Hauptfilter-Matroid ist modular.** (Formulierung von W. Hochstättler 2016) Für den Beweis der letzen Äquivalenz benötigen wir wieder den Satz von Wille/Kantor.

Weiterhin zeigen wir, dass die Kantor-Vermutung in zwei Teilvermutungen zerfällt: **Es gibt kein endliches lokal projektives hypermodulares Rang-4-Matroid, welches eine Punktkontraktion besitzt, die eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist,** sowie: **Ein endliches hypermodulares Rang-4-Matroid, in dem jede Punktkontraktion eine desarguessche projektive Ebene ist, erfüllt die Bundle-Condition.**

Im unendlichen Fall können wir Gegenbeispiele zur Kantor-Vermutung konstruieren. Dazu gehen wir wie folgt vor: Wir gehen von einem endlichen Rang-4-Matroid M aus, welches nicht hypermodular ist. Wir konstruieren mit dem zweiten Einbettungssatz ein hypermodulares Rang-4-Matroid M' welches M erweitert. Dieses hat eine unendliche Grundmenge, ist lokal projektiv und hat als Punktkontraktionen nur nicht-desarguessche projektive Ebenen. Es lässt sich nicht in ein modulares Matroid einbetten. Wir erhalten auf diese Art und Weise viele Gegenbeispiele mit unendlicher Grundmenge für die Kantor-Vermutung. Alle sind Gegenbeispiele für die erste Kantorsche Teilvermutung, für die zweite ist auch im Unendlichen kein Gegenbeispiel bekannt.

Fast schon am Ende dieser Arbeit können wir endlich zur Sticky-Vermutung kommen. Wie oben schon gesagt, geht es darum, zu zeigen, dass Matroide, die sticky sind, modular sein müssen. Die Umkehrung, dass modulare Matroide sticky sind, bewiesen S. Poljak und D. Turzik in [20], sowie, dass die Sticky-Vermutung für alle Matroide bis Rang 3 gilt.

Joe Bonin konnte 2011 in [8] zeigen, dass Matroide nicht sticky sind, wenn sie ein disjunktes Geraden-Hyperbenenpaar besitzen, welches zum Schnitt gebracht werden kann. Daraus können wir direkt folgern, dass die Sticky-Vermutung für alle Matroide gilt, die eine der Intersection-Properties haben, diese Tatsache haben schon Bachem und Kern bewiesen, allerdings lückenhaft, erst von Bonin in [8] korrigiert. Bonin zeigte in [8] ausserdem, dass ein Matroid nicht sticky ist, wenn es zwei disjunkte Hyperebenen hat, zusammen mit der von Bachem und Kern in [3] bewiesenen Tatsache, dass jede Kontraktion eines sticky Matroids auch sticky ist, ergibt sich daraus, dass die Sticky-Vermutung auch für Matroide gilt, die nicht hypermodular sind. Ausserdem konnten Bachem und Kern in [3] zeigen, dass die Sticky-Vermutung allgemein gilt, wenn sie für Rang-4-Matroide gilt. Diesen Beweis skizzieren wir hier noch einmal, er benutzt wieder den Satz von Wille/Kantor.

Mit all diesen Ergebnissen können wir ohne grosse Probleme folgendes Resultat folgern: Ein Rang-4-Matroid ist nicht sticky, wenn es kein Hauptfilter-Matroid ist. Die Umkehrung dieser Aussage, also dass jedes Rang-4-Hauptfilter-Matroid sticky ist, ist gerade der Satz (ST2). Der Beweis dieses Satzes ist nicht trivial, mit ihm beschäftigt sich der ganze Rest dieser Arbeit. Er verallgemeinert den Beweis von A.W. Ingleton in [17], dass modulare Matroide sticky sind. Das eigentliche Amalgam zweier beliebiger Erweiterungen eines Hauptfilter-Matroids wird konstruiert und gezeigt, dass es auch in den Spezialfällen, die zusätzlich auftreten können, submodular ist.

Damit sind wir am Ziel unserer Arbeit angelangt und können nun endlich Gegenbeispiele für die Sticky-Vermutung im unendlichen Fall, sowie die Äquivalenz der Sticky- und der Kantor-Vermutung zeigen.

Wir nehmen ein Rang-4-Matroid, welches nicht in ein modulares Matroid einbettbar ist, z.B. das Vámos-Matroid. Mit dem dritten Einbettungssatz lässt sich dieses in ein Hauptfilter-Matroid einbetten. Ein solches Matroid ist dann nach Satz (ST2) sticky, kann aber nicht modular sein, es ist also ein Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung. Wir zeigen noch, dass es in jedem Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung eine Rang-4-Kontraktion geben muss, die auch schon ein Gegenbeispiel für die Vermutung ist.

Die Äquivalenz der Sticky- mit der Kantor-Vermutung zeigen wir nun wie folgt: Zunächst lassen sich beide Vermutungen auf den Fall von Rang-4-Matroiden reduzieren. Angenommen die Kantor-Vermutung wäre gültig, dann betrachten wir ein endliches Rang-4-Matroid, welches sticky ist, wegen der Umkehrung von Satz (ST2) muss dieses ein Hauptfilter-Matroid sein, welches dann modular wäre, die Sticky-Vermutung wäre also auch gültig. Angenommen die Kantor-Vermutung gälte nicht, dann gäbe es ein endliches nicht-modulares Rang-4-Hauptfilter-Matroid, dieses wäre dann wegen dem Satz (ST2) sticky, die Sticky-Vermutung würde also auch nicht gelten.

Wir beschliessen diese Arbeit mit einem umfangreichen Katalog offener Fragen. Wir zeigen die Probleme des Verhältnisses der Bundle-Condition zu den Intersection-Properties auf, und fragen nach Verallgemeinerungen der Einbettungssätze. Wir diskutieren andere Erweiterungsketten, die möglicherweise zu einem Gegenbeispiel der zweiten Kantorschen Teilvermutung im Unendlichen führen könnten. Ausserdem zeigen wir, was wir bezüglich einer Verallgemeinerung von Satz (ST2) oder seiner Umkehrung für höhere Ränge wissen und die Probleme, die dafür gelöst werden müssten. Die Existenz von Gegenbeispielen der Sticky-Vermutung höheren Ranges werden diskutiert, es sind keine bekannt, wir zeigen die vielen Teilprobleme, die sich hier auftun. Schlussendlich führen wir den Begriff 'eigentlich sticky' ein und formulieren eine Vermutung hierfür.

Mit diesem Fragenkatalog wollen wir aufzeigen, dass die Theorie der Sticky-Vermutung in vielen Teilen unerforschtes Gebiet ist, die Kantor-Vermutung hingegen wurde viel umfangreicher erforscht, trotzdem nicht bewiesen. Es ist uns gelungen die Kantor-Vermutung für hypermodulare Rang-4-Matroide bis Ordnung 6 zu beweisen, die Fragen, unsere Beweisansätze sowie die Resultate aus der Literatur hierzu sprengen aber den Rahmen dieser Arbeit vollständig. Ihnen wird eine weitere Arbeit gewidmet werden müssen.

2 Grundlegende Sätze und Definitionen

Hier sind die wichtigsten Definitionen, die benötigt werden, zusammengefasst. Orientiert haben wir uns dabei hauptsächlich an [17], aber in einigen Fällen auch an [22], [1] und [2]. Bei der Übersetzung der Begriffe ins Deutsche haben wir uns an [2] orientiert.

2.1 mathematische Notationen

$\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und $\mathbb{N}_0$ mit Null. Es sei $\mathbb{N}^n = \{1, 2, ..., n\}$ und $\mathbb{N}_0^n = \{0, 1, 2, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wenn E eine Menge ist, so schreiben wir für die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ auch 2^E. Ausserdem schreiben wir $E \times E$ für die Menge $\{(x, y)|x, y \in E\}$.

Es sei $X \subseteq 2^E$. Wir sagen, dass X die Menge E **partitioniert**, falls $x \cap y = \emptyset$ für alle $x \neq y$ aus X gilt, und $\bigcup_{x \in X} x = E$ ist.

2.2 Matroide

2.1 Definition:
Ein Matroid ist ein geordnetes Paar (E, I), das aus einer höchstens abzählbar unendlichen Menge E besteht, sowie aus einer Menge $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ von Teilmengen von E, für die folgende vier Bedingungen (auch **Unabhängigkeitsaxiome** genannt) gelten:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(I2) Es seien $I, I' \subseteq E$. Wenn $I \in \mathcal{I}$ und $I' \subseteq I$, dann ist $I' \in \mathcal{I}$.
(I3) Wenn I_1 und I_2 in $\mathcal{I}$ sind und $|I_1| <| I_2|$, dann gibt es ein Element $\{e\}$ aus $I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.
(I4) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|I| \leq n$ für alle $I \in \mathcal{I}$.

Wenn M das Matroid $(E, \mathcal{I})$ ist, so heisst M auch ein Matroid auf E. Die Mengen aus $\mathcal{I}$ heissen **unabhängige Mengen von M**. E wird auch die **Grundmenge** von M genannt. Für ein Matroid M bezeichnen wir die Grundmenge auch mit $\boldsymbol{E(M)}$, sowie die Menge der unabhängigen Mengen mit $\boldsymbol{\mathcal{I}(M)}$.

Die Grundmenge eines Matroids wird in der Literatur meistens als endlich vorausgesetzt, wir sprechen dann von **endlichen Matroiden**. Diese werden ohne das Axiom (I4) definiert. Wir erlauben in dieser Arbeit aber auch abzählbar unendliche Grundmengen. Überabzählbar unendliche Grundmengen lassen wir aus pragmatischen Gründen nicht zu, da viele Teile der in dieser Arbeit verwendeten Theorie in diesem Fall nicht mehr funktionieren würden.

Eine maximal unabhängige Menge eines Matroids M heisst **Basis von M**. Aus den Unabhängigkeitsaxiomen folgt, dass alle Basen von M die gleiche Mächtigkeit haben und dass jede unabhängige Menge in einer Basis enthalten ist. Alle Teilmengen von $E(M)$, die nicht in $\mathcal{I}(M)$ liegen, heissen **abhängige Mengen von M**. Eine minimal abhängige Teilmenge von $E(M)$ heisst ein **Kreis** in M. Zwei Mengen $X, Y \subseteq E(M)$ heissen **voneinander (un-)abhängig**, wenn $X \cup Y$ eine (un-)abhängige Menge von M ist.

Ein Element $x \in E(M)$ eines Matroids M heisst **Schleife** oder **loop** von M, wenn $\{x\}$ ein Kreis in M ist. Wenn umgekehrt x von allen anderen Mengen aus $\mathcal{I}(M)$ unabhängig ist, heisst x ein **Coloop** von M.

2.2.1 Rang

Sei M ein Matroid mit Grundmenge E und es sei $A \subseteq E$. Aus den Unabhängigkeitsaxiomen folgt, dass die Mächtigkeit jeder maximal unabhängigen Teilmenge von A immer gleich ist. Wir nennen diese Mächtigkeit den **Rang** von A in M. Die Abbildung $r\colon 2^E \to \mathbb{N}_0$, die jeder Teilmenge von E ihren Rang in M zuordnet, heisst die **Rangfunktion** von M. Der Rang $\boldsymbol{r(M)}$ des Matroids M ist der Rang der Grundmenge E von M, das heisst die Mächtigkeit einer Basis von M. Es gilt:

2.2 Satz:
Die Rangfunktion eines Matroids M auf E erfüllt folgende Bedingungen (auch Rangaxiome genannt):
(R1) Es gilt $0 \leq r(X) \leq |X|$ für alle $X \subseteq E$.
(R1a) Für alle $X \subseteq E$ existiert ein $X' \subseteq X, |X'| < \infty$, mit $r(X) = r(X')$.
(R2) Wenn $X \subseteq Y \subseteq E$, dann ist $r(X) \leq r(Y)$.
(R3) Seien X und Y Teilmengen von E, dann gilt: $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Die Bedingung (R2) heisst die **Monotonie** und die Bedingung (R3) heisst die **Submodularität** der Rangfunktion. Es gilt folgender Satz (siehe [17], Theorem 1.3.2):

2.3 Satz:
Sei E eine Menge und r eine Funktion von 2^E nach $\mathbb{N}_0$ für die die Rangaxiome gelten. Sei $\mathcal{I}$ die Menge von Teilmengen X von E für die gilt: $r(X) = |X|$. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r.

Bei der Definition von endlichen Matroiden mit Hilfe der Rangfunktion braucht man die Bedingung (R1a) nicht. Aus dieser Bedingung und der Bedingung (R2) folgt, dass die Rangfunktion eines Matroids immer eine endliche obere Schranke hat. Es lassen sich auch Matroide definieren, bei denen das nicht gilt, mit solchen Matroiden beschäftigen wir uns aber nicht, aus den selben Gründen, wegen denen wir Matroide mit überabzählbar unendlichen Grundmengen ausser acht lassen. Wir beschränken uns hier also auf **Matroide endlichen Ranges** mit einer höchstens abzählbar unendlichen Grundmenge.

2.2.2 der Abschlussoperator cl_M

Eine Funktion $cl_M\colon 2^E \to 2^E$ heisst **Abschlussoperator** eines Matroides M auf E, wenn für alle $X \subseteq E$ gilt, dass $cl_M(X) = \{x \in E : r(X \cup \{x\}) = r(X)\}$. Es gilt:

2.4 Satz:
Der Abschlussoperator cl_M eines Matroides $M = (E, \mathcal{I})$ hat folgende Eigenschaften:
(CL1) Wenn $X \subseteq E$, dann gilt $X \subseteq cl_M(X)$.
(CL2) Wenn $X \subseteq Y \subseteq E$, dann ist $cl_M(X) \subseteq cl_M(Y)$.
(CL3) Wenn $X \subseteq E$, dann gilt $cl_M(cl_M(X)) = cl_M(X)$.
(CL4) Wenn $X \subseteq E, x \in E$ und $y \in cl_M(X \cup \{x\}) \setminus cl_M(X)$, dann ist $x \in cl(X \cup \{y\})$.
(CL5) Wenn $X \subseteq E$, dann gibt es ein $B \subseteq X$ mit $|B| < \infty$ und $cl_M(B) = cl_M(X)$.

Die Eigenschaft (CL2) heisst die **Monotonie** des Abschlussoperators, die Eigenschaft (CL4) nennen wir auch das **Austauschaxiom**. Bei endlichen Matroiden kann auf die Bedingung (CL5) verzichtet werden. Wenn klar ist, welches Matroid gemeint ist, schreiben wir statt cl_M manchmal nur cl. Umgekehrt gilt:

2.5 Satz:
Sei E eine Menge und $cl : 2^E \to 2^E$ eine Funktion, welche die Bedingungen (CL1 - CL5) erfüllt. Sei $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : x \notin cl(X \setminus \{x\})$ für alle $x \in X\}$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit dem Abschlussoperator cl.

Die unter cl_M invarianten Mengen heissen auch **abgeschlossene Mengen**, **Flächen** oder **Unterräume** des Matroids M. Flächen von Rang 1 heissen **Punkte**, von Rang 2 **Linien** oder **Geraden** und von Rang 3 **Ebenen**. Sei der Rang eines Matroides $n > 1$ bzw. $n > 2$, dann heisst eine Fläche von Rang $n-1$ bzw. $n-2$ **Hyperebene** bzw. **Hypergerade**.

Linien oder Punkte, die auf gemeinsamen Ebene liegen, heissen **coplanar**, Punkte, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, heissen **kollinear**. Ist ein Punkt p in mehreren Geraden enthalten, so sagen wir auch, die Geraden **schneiden sich in dem Punkt *p***. Analog dazu können sich auch Ebenen in einer Linie oder in einem Punkt schneiden.

Sei $\{e\}$ ein Punkt und X eine andere Fläche eines Matroids M, dann schreiben wir statt $\{e\}$ manchmal abkürzend nur e und statt $X \cup \{e\}$ auch $X \cup e$. Wir zeigen als Anwendung des Abschlussoperators einen Satz, der in dieser Arbeit des öfteren verwendet wird.

2.6 Satz:
Angenommen in einem Matroid M gibt es zwei disjunkt coplanare Geraden l_1 und l_2. Dann gibt es in M eine Hyperebene H die l_1 enthält und zu l_2 disjunkt ist.

Beweis. Es sei $p \in l_2$. Dann ist $e_1 = cl(l_1, l_2) = cl(l_1, p)$ eine Ebene in M. Wir nehmen zwei voneinander unabhängige Punkte p_1 und p_2 aus l_1 und den Punkt p. Diese drei Punkte sind voneinander unabhängig. Wir erweitern sie zu einer Basis B des Matroids M. Dann ist $H = cl(B \setminus p)$ eine Hyperebene in M und wegen der Monotonie von cl gilt $l_1 = cl(p_1, p_2) \subseteq H$. Da B eine Basis ist, gilt $r(B) = |B| > |B \setminus p| = r(B \setminus p)$. Daraus folgt, dass $p \notin cl(B \setminus p) = H$ und somit, dass $l_2 \notin H$. Es gilt ausserdem, dass $l_1 \subseteq e_1 \cap H$.

Angenommen für einen Punkt p' gälte $p' \in e_1 \cap H$ und $p' \notin l_1 = cl(l_1)$. Dann würde aus $p' \in e_1 = cl(l_1, p)$ nach Satz 2.4 (CL4) folgen, dass $p \in cl(l_1, p') \subseteq H$, was nicht sein darf. Daraus folgt, dass $e1 \cap H = l_1$. Angenommen l_2 würde nun die Hyperebene H in einem Punkt q schneiden. Dann wäre $q \in l_2 \cap H \subseteq (cl(l_1 \cup l_2)) \cap H = e_1 \cap H = l_1$, also wäre $q \in l_1 \cap l_2$,was nicht sein darf. Es gilt also, dass $l_1 \subseteq H$ und $H \cap l_2 = \emptyset$, was zu zeigen war. $\square$

2.2.3 Isomorphie

2.7 Definition:
Zwei Matroide $M = (E(M), \mathcal{I})$ und $M' = (E(M'), \mathcal{I}')$ mit Rangfunktionen r_M bzw. $r_{M'}$ heissen **zueinander isomorph** (wir schreiben auch $\mathbf{M} \cong \mathbf{M'}$), wenn es eine bijektive Abbildung $\psi \colon E(M) \to E(M')$ gibt, für die gilt:

$$\forall X \subseteq E(M) \text{ gilt} : X \in \mathcal{I} \text{ gdw. } \psi(X) \in \mathcal{I}', \text{ wobei } \psi(X) = \{\psi(x) | x \in X\},$$

oder (äquivalent dazu):

$$\forall X \subseteq E(M) \text{ gilt} : r_M(X) = r_{M'}(\psi(X)).$$

2.2.4 direkte Summe

2.8 Definition:
Seien M_1 und M_2 Matroide mit disjunkten Grundmengen E_1 und E_2. Es sei $E = E_1 \cup E_2$ und $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2$, wobei gilt: $I_1 \in \mathcal{I}(M_1)$ und $I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, die **direkte Summe von $\boldsymbol{M_1}$ und $\boldsymbol{M_2}$**. Man schreibt auch: $\boldsymbol{M = M_1 \oplus M_2}$.

Für die Rangfunktion der direkten Summe zweier Matroide gilt (siehe [17], 4.2.17):

2.9 Proposition:
Es seien M_1 und M_2 Matroide mit disjunkten Grundmengen $E(M_1)$ bzw. $E(M_2)$ und Rangfunktionen r_{M_1} bzw. r_{M_2}. Dann gilt für alle $X \subseteq E(M_1 \oplus M_2)$:

$$r_{M_1 \oplus M_2}(X) = r_{M_1}(X \cap E(M_1)) + r_{M_2}(X \cap E(M_2)).$$

Für den Rang der Matroide folgt daraus direkt:

$$r_{M_1 \oplus M_2}(M_1 \oplus M_2) = r_{M_1}(M_1) + r_{M_2}(M_2).$$

2.2.5 uniforme und freie Matroide

Es sei $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Ein Matroid heisst ein **uniformes Matroid $\boldsymbol{U_{m,n}}$**, wenn seine Grundmenge n Elemente hat und alle Teilmengen der Grundmenge, die höchstens m Elemente haben, die unabhängigen Mengen des Matroids sind. $U_{m,n}$ hat also Rang m. Zwei uniforme Matroide $U_{n,m}$ und $U_{m',n'}$, bei denen $m = m'$ und $n = n'$ ist, sind isomorph, daher können wir von **dem** uniformen Matroid $U_{m,n}$ sprechen.

Ein Matroid M heisst **freies Matroid** wenn alle Teilmengen der Grundmenge $E(M)$ des Matroids unabhängige Mengen sind. Wenn die Grundmenge $E(M)$ unendlich ist und M ein Matroid von endlichem Rang ist, dann kann M nicht frei sein. Freie Matroide bei denen die Grundmenge gleichviele Elemente hat, sind zueinander isomorph, wir können also von **dem** freien Matroid mit n Elementen sprechen. Es ist dies gerade das uniforme Matroid $U_{n,n}$.

Für die direkte Summe zweier endlicher freier Matroide gilt:

$$U_{m,m} \oplus U_{n,n} = U_{m+n,m+n}.$$

Die freien Matroide bis Rang 4 sind: Ein Punkt, eine Gerade mit zwei Punkten, die direkte Summe einer zweipunktigen Geraden mit einem Punkt, sowie die direkte Summe zweier zweipunktiger Geraden. Es sind also alles direkte Summen von Punkten und zweipunktigen Geraden.

2.2.6 einfache Matroide

Zwei verschiedene Elemente x, y der Grundmenge $E(M)$ eines Matroids M heissen **parallel**, wenn $\{x, y\}$ ein Kreis ist. Eine **parallele Klasse von M** ist eine maximale Teilmenge X von $E(M)$, so dass je zwei verschiedene Elemente aus X parallel in M sind und kein Element aus X eine Schleife ist. Eine parallele Klasse heisst **trivial**, wenn sie nur aus einem Element besteht. Die parallelen Klassen und die Schleifen von M partitionieren die Menge $E(M)$.

2.10 Definition:
Ein Matroid M heisst **einfach**, wenn es keine Schleifen und nur triviale parallele Klassen besitzt.

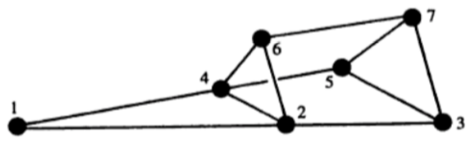
Zu jedem Matroid M lässt sich das **zu M assoziierte einfache Matroid M'** folgendermassen bilden: Die Grundmenge von M' sei die Menge aller parallelen Klassen von M. Eine endliche Teilmenge $\{X_1, \ldots X_k\}$ dieser parallelen Klassen liegt in $\mathcal{I}(M')$, genau dann, wenn $r_M(X_1 \cup \ldots \cup X_k) = k$. Im folgenden werden wir, wenn nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, immer von einfachen Matroiden ausgehen, alle Ergebnisse dieser Arbeit lassen sich leicht verallgemeinern.

2.2.7 Geometrie von Matroiden niedrigen Ranges

Gelegentlich werden wir (einfache) Matroide bis Rang 4 geometrisch im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ darstellen. Punkte der Matroide stellen wir als voneinander verschiedene Punkte dar, die wir mit Linien verbinden. Drei oder mehr kollineare Punkte des Matroids verbinden wir mit einer Linie, vier oder mehr coplanare Punkte des Matroids zeichnen wir in einer Ebene, Linien mit zwei bzw. Ebenen mit drei Punkten zeichnen wir der Anschaulichkeit halber meistens nicht. Linien oder Ebenen können gekrümmt sein. Für eine präzisere Erklärung dieser Darstellungsform verweisen wir auf [17], Chapter 1.5. Nicht alle geometrischen Konfigurationen stellen jedoch Matroide dar. Folgende Axiome müssen dazu gelten:

(A1) je zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam,
(A2) je zwei verschiedene Ebenen, die sich in mehr als einem Punkt schneiden, schneiden sich in genau einer Geraden,
(A3) je zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben, liegen in einer Ebene,
(A4) jede Gerade, die eine Ebene in mehr als einem Punkt schneidet, ist in dieser Ebene enthalten.

Man betrachte z.B. die Konfiguration von Punkten, Geraden und Ebenen, die der folgenden Abbildung entspricht:



Diese Abbildung (aus [17], Beispiel 1.5.5, Fig. 1.9) stellt kein Matroid dar, denn das Axiom (A2) ist hier verletzt. Diese Konstellation kommt in dieser Arbeit öfter vor, sie wird eine **Escher-'Matroid'-Konstellation** genannt. Wir verwenden diese geometrische Darstellungsform von Matroiden nur zur Veranschaulichung, keinesfalls wird sie in unserer Arbeit Beweise ersetzen. Wir liefern daher an dieser Stelle noch eine kleine Proposition (mit Beweis), aus der hervorgeht, dass das Escher-'Matroid' kein Matroid sein kann.

2.11 Proposition:
Seien l_1, l_2, l_3 drei Linien in einem Matroid, welche paarweise coplanar sind, aber nicht alle in einer Ebene liegen. Wenn sich l_1 und l_2 in einem Punkt p schneiden, dann muss die Linie l_3 auch den Punkt p enthalten.

Beweis. Wegen der Submodularität der Rangfunktion gilt:

$$r((l_1 \vee l_3) \wedge (l_2 \vee l_3)) \leq r(l_1 \vee l_3) + r(l_2 \vee l_3) - r(l_1 \vee l_2 \vee l_3) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Es gilt aber $l_3 \vee p \leq (l_1 \vee l_3) \wedge (l_2 \vee l_3)$ und somit muss p auch in l_3 liegen. □

2.3 Verbände

Wir definieren hier alle Begriffe aus der Verbandstheorie, die wir für diese Arbeit benötigen. Wir haben uns dabei hauptsächlich an [1] und an manchen Stellen an [17] orientiert.

2.12 Definition:
Eine **(partiell) geordnete Menge** oder **Poset** $P = (P, \leq)$ ist eine Menge P, versehen mit einer binären Relation $\leq\ \subseteq P \times P$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\forall x \in P \colon x \leq x$
(ii) $\forall x, y \in P : x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
(iii) $\forall x, y, z \in P \colon x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Wir bezeichnen die Relation $\leq$ manchmal auch mit $\boldsymbol{\leq_P}$. Eine Teilmenge Q einer Poset ist wieder eine Poset bzgl. der auf Q durch $\leq$ induzierten Relation. $(Q, \leq)$ heisst dann auch **Unterposet** oder **Teilordnung** von $(P, \leq)$. Insbesondere ist für $x, y \in P$ mit $x \leq y$ auch das **Intervall** $[x, y] := \{z \in P | x \leq z \leq y\}$ eine Poset. Ist $x \leq y$ für $x, y \in P$ mit $x \neq y$ so, dass $[x, y] = \{x, y\}$, so sagt man auch, dass $\boldsymbol{x}$ **von** $\boldsymbol{y}$ **bedeckt** wird (oder: $\boldsymbol{y}$ **bedeckt** $\boldsymbol{x}$), wir notieren diese Relation durch $\boldsymbol{y \to x}$.

Es seien P und Q zwei Posets, dann ist $P \times Q = (P \times Q, \leq_{P \times Q})$ mit $(a, b) \leq_{P \times Q} (c, d)$ genau dann, wenn $a \leq_P c$ und $b \leq_Q d$ ist, auch eine Poset, das **direkte Produkt** der beiden Posets P und Q. Diese Definition lässt sich auf endlich viele Posets verallgemeinern.

Ein Element $x \in P$ heisst **obere (untere) Schranke** einer Teilmenge $A \subseteq P$, wenn $x \geq a (x \leq a)$ für alle $a \in A$. Existiert eine kleinste (grösste) obere (untere) Schranke b von A, so heisst b das **Supremum (Infimum)** von A, wir schreiben $\boldsymbol{b = \sup A}$ bzw. $\boldsymbol{b = \inf A}$.

Zwei Elemente x und y aus P heissen **vergleichbar**, wenn entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Eine Poset heisst **Kette**, wenn je zwei ihrer Elemente vergleichbar sind. Ausserdem heisst eine Teilmenge K einer Poset P eine **Kette von $\boldsymbol{P}$** , wenn K als Unterposet von P eine Kette ist. Die **Länge $\boldsymbol{l(K)}$** einer Kette K ist $|K| - 1$ oder ∞ falls $|K| = \infty$. Eine Kette $K \subseteq P$ heisst **maximal**, wenn $\{x\} \cup K$ für alle $x \in P \setminus K$ keine Kette mehr ist.

Eine Poset P erfüllt die **Jordan-Dedekindsche-Kettenbedingung**, wenn für jedes Intervall $[a, b]$ aus P alle maximalen Ketten von $[a, b]$ die gleiche Länge haben. Besitzt P ausserdem ein kleinstes Element (oder **Nullelement**) 0_P , dann besitzt P auch eine **Rangfunktion** $r_P \colon P \to \mathbb{N}_0$, die jedes $x \in P$ auf die Länge einer (und damit jeder) maximalen Kette aus $[0_P, x]$, den **Rang von $\boldsymbol{x}$**, abbildet. Den Rang eines Elements $x \in P$ abzüglich 1 nennen wir dann auch die **Dimension** von x.

Ist P eine Poset mit 0_P, so heisst ein Element von P, das 0_P bedeckt, **Atom** oder **Punkt** von P. Falls P eine Rangfunktion besitzt, so heissen die Elemente von Rang 1 **Punkte** oder **Atome**, die von Rang 2 heissen **Linien** und die von Rang 3 **Ebenen**. Besitzt P ein grösstes Element (oder **Einselement**) 1_P, dann heisst ein Element von P, welches von 1_P bedeckt wird, eine **Hyperebene** von P. Für alle $x \in P$ bezeichnen wir das Intervall $[x, 1_P]$ als $\boldsymbol{P^x}$. Falls P eine Rangfunktion und ein Einselement besitzt, dann bezeichnen wir den Rang (oder die Dimension) von 1_P auch als **Rang (Dimension) von $\boldsymbol{P}$**.

2.13 Definition:
Ein Verband L ist eine Poset mit der Eigenschaft, dass je zwei Elemente $a, b \in L$ in L ein Infimum (den **meet**) und ein Supremum (den **join**) besitzen. Wir setzen $\boldsymbol{a \wedge b} = \inf \{a, b\}$ und $\boldsymbol{a \vee b} = \sup\{a, b\}$.

Ein Verband L heisst **vollständig**, falls $\sup A$ und $\inf A$ für beliebige Untermengen $A \subseteq L$ existieren, wir schreiben dann auch $\boldsymbol{\bigvee A}$ bzw. $\boldsymbol{\bigwedge A}$. Ein Verband L heisst **kettenendlich**, wenn jede Kette von L eine endliche Länge hat. Ein Verband L heisst **halbmodular** (siehe [2], Definition VI.1.25), falls L eine Rangfunktion r_L besitzt, die submodular ist, das heisst, dass $\forall a, b \in L$ gilt: $r_L(a \vee b) + r_L(a \wedge b) \leq r_L(a) + r_L(b)$. Wenn hier $\forall a, b \in L$ immer das Gleichheitszeichen steht, dann heisst der Verband L **modular**. Es folgt die wichtigste Definition dieses Abschnitts:

2.14 Definition:
Ein Verband L heisst **geometrisch**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) L ist **kettenendlich**.
(ii) L ist **atomar**, das heisst es gilt $\forall a \in L$, dass $a = \bigvee_{0 \leftarrow p \leq a} p$.
(iii) L ist **halbmodular**.

Aus der Bedingung (i) folgt, dass geometrische Verbände immer vollständig sind, und damit immer ein Null- und ein Einselement haben. Daraus sowie wiederum aus Bedingung (i) folgt weiter, dass geometrische Verbände eine endliche Dimension haben. Bei der nächsten Definition orientieren wir uns an [12]:

2.15 Definition:
Es seien G_1 und G_2 geometrische Verbände mit Rangfunktionen r_{G_1} bzw. r_{G_2}. Eine **Isometrie** von G_1 nach G_2 ist eine injektive Abbildung $\theta\colon G_1 \to G_2$, für die gilt:

$$\forall U \in G_1 \text{ gilt } r_{G_1}(U) = r_{G_2}(\theta(U)) \text{ und}$$
$$\forall U, V \in G_1 \text{ gilt } \theta(U \vee V) = \theta(U) \vee \theta(V).$$

Ist θ sogar bijektiv und gilt zudem

$$\forall U, V \in G_1 \text{ gilt } \theta(U \wedge V) = \theta(U) \wedge \theta(V),$$

dann heisst θ ein **Isomorphismus** von G_1 nach G_2, die Verbände G_1 und G_2 heissen **zueinander isomorph** und wir schreiben $\boldsymbol{G_1 \cong G_2}$.

Die Eigenschaft, dass bei einer Isometrie (einem Isomorphismus) der join (und der meet) erhalten bleibt, lässt sich von zwei auf eine endliche Anzahl von Elementen erweitern, es gilt, wie man direkt sieht:

2.16 Proposition:
Es seien G_1 und G_2 zwei geometrische Verbände und es sei θ eine Isometrie von G_1 nach G_2. Es sei X eine endliche Teilmenge von G_1. Dann gilt: $\theta(\bigvee_{F \in X} F) = \bigvee_{F \in X} \theta(F)$. Ist θ sogar ein Isomorphismus, dann gilt zusätzlich: $\theta(\bigwedge_{F \in X} F) = \bigwedge_{F \in X} \theta(F)$.

Nun folgt der wichtigste Satz dieses Abschnitts (für den Beweis siehe [17], Lemma 1.7.3 und Theorem 1.7.5 und [2], Satz (VI.1.28)), in dem Matroide mit geometrischen Verbänden in Beziehung gebracht werden:

2.17 Satz:
Die Menge der Flächen eines Matroides M, geordnet durch die Inklusion $\subseteq$, bildet einen geometrischen Verband, den **Flächenverband $\boldsymbol{\mathcal{L}(M)}$** von M. join $\vee$ und meet $\wedge$ für $a, b \in \mathcal{L}(M)$ sind gegeben durch:

$$a \vee b = cl_M(a \cup b) \text{ und } a \wedge b = a \cap b = cl_M(a \cap b).$$

Sei umgekehrt L ein geometrischer Verband und $E \subseteq L$ die Menge der Punkte von L, dann ist die Funktion $cl\colon 2^E \to 2^E$, $cl(X) = \{p \in E\colon p \leq_{\mathcal{L}(M)} \sup X\}$ der Abschlussoperator eines einfachen Matroids M mit Grundmenge E. Der Fächenverband $\mathcal{L}(M)$ dieses Matroids M ist wiederum isomorph zu dem Verband L. Jeder geometrische Verband kann als Flächenverband eines einfachen Matroids angesehen werden. Für die Rangfunktionen r_M und $r_{\mathcal{L}(M)}$ gilt:

$$r_M(F) = r_{\mathcal{L}(M)}(cl_M(F)) \text{ für alle } F \subseteq E(M).$$

Geometrische Verbände und einfache Matroide entsprechen sich eineindeutig.

2.18 Korollar:
Sei M ein einfaches Matroid und $\mathcal{L}(M)$ sein zugehöriger Flächenverband. Es sei F eine endliche Teilmenge aus $E(M)$. Dann kann F als eine endliche Menge von Punkten aus $\mathcal{L}(M)$ betrachtet werden und es gilt:

$$cl_M(F) = \bigvee_{x \in F} x.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 2.17 und mit vollständiger Induktion nach der Mächtigkeit der Menge F. $\square$

Wegen Satz 2.17 schreiben wir in einem Matroid M manchmal auch $X \vee Y$ für $cl_M(X \cup Y)$ oder $X \wedge Y$ für $cl_M(X \cap Y) = X \cap Y$ oder auch $X \leq Y$ für $X \subseteq Y$, wenn X, Y Flächen in M sind. Ausserdem schreiben wir manchmal auch 0 für die leere Menge und 1 für die Grundmenge $E(M)$ des Matroids M.

Für eine endliche Menge R mit $|R| = n$ bezeichnet $\boldsymbol{\mathcal{B}(R)}$ den Verband aller Teilmengen von R, geordnet durch Inklusion. Es sei S eine andere Menge mit $|S| = n$, dann gilt $\mathcal{B}(R) \cong \mathcal{B}(S)$, wir können also ohne Mehrdeutigkeit die Bezeichnung $\boldsymbol{\mathcal{B}(n)}$ für den Verband aller Untermengen einer n-elemetigen Menge einführen, wobei $n < \infty$ ist. $\mathcal{B}(n)$ heisst auch die **Boolesche Algebra des Ranges $\boldsymbol{n}$** und ist ein geometrischer Verband, siehe [1], Satz (II.3.37). Da in einem freien Matroid jede Teilmenge der Grundmenge eine Fläche ist, ist die Boolesche Algebra $\mathcal{B}(n)$ der Flächenverband des freien Matroids mit n Elementen.

Das direkte Produkt der Posets zweier Verbände ist wieder ein Verband, wenn wir join und meet komponentenweise definieren, daher sprechen wir auch von dem **direkten Produkt zweier Verbände**. Es ist geometrisch bzw. modular, wenn die zugrundeliegenden Verbände (siehe [2], Folgerung (VI.1.32) und [1], nach Definition (II.2.1)), diese Eigenschaften besitzen. Das direkte Produkt zweier geometrischer Verbände ist der Flächenverband der direkten Summe der beiden Matroide (siehe [2], Satz (VI.3.16)), die nach Satz 2.17 den zugrundeliegenden Verbänden entsprechen. Die Definition des direkten Produkts zweier Verbände und alle diese Aussagen lassen sich auf das direkte Produkt endlich vieler Verbände verallgemeinern.

2.4 projektive Geometrie

In diesem Abschnitt definieren und beschreiben wir einige Grundtatsachen aus der projektiven Geometrie, jedoch nur soweit sie für diese Arbeit benötigt werden und aus einer 'Matroid-Perspektive' heraus. Einige Definitionen werden hier daher etwas anders als üblich vorgenommen, wir orientieren uns hierbei an Welsh, [22]. Für einen wirklichen Überblick über die Grundlagen der projektiven Geometrie verweisen wir auf die einschlägige Literatur (z.B. Beutelsbacher [6], projektive Geometrie). Zunächst definieren wir zwei einfache, aber wichtige Begriffe:

2.19 Definition:
Ein **Dreieck** in einem Matroid sind drei nicht kollineare Punkte, ein **Viereck** in einem Matroid sind vier coplanare Punkte, von denen keine drei kollinear sind.

Wir zeigen eine kleine Proposition dazu:

2.20 Proposition:
Angenommen ein Matroid M besitzt ein Dreieck und zwei der drei Linien des Dreiecks enthalten mindestens drei verschiedene Punkte, dann besitzt M ein Viereck.

Beweis. Man betrachte aus den beiden dreipunktigen Linien jeweils zwei voneinander und vom Schnittpunkt der beiden Linien verschiedene Punkte. Diese bilden ein Viereck. $\square$

2.4.1 projektive Räume

Der Begriff des projektiven Raums ist sehr wichtig in der projektiven Geometrie. Wir definieren projektive Räume hier etwas anders als üblich als Matroide und auch mit anderen Axiomen als üblich (siehe Welsh [22], Chapter 12.1, Theorem 3).

2.21 Definition:
Ein Matroid M ist ein **projektiver Raum**, wenn folgende Axiome gelten:

(A1) Jede Gerade von M hat mindestens drei Punkte.
(A2) Jede Hyperebene H und jede Gerade in M, die nicht in H enthalten ist, schneiden sich in einem Punkt.

Matroide, die nur aus einem Punkt oder einer Geraden mit mehr als zwei Punkten bestehen, sind nach dieser Definition auch projektive Räume. Die Flächenverbände von projektiven Räumen (wenn sie einfach sind) nennen wir auch **lineare Verbände**. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass diese Definition zu der Definition der linearen Verbände in [1], vor (II.3.12), äquivalent ist. Um Verwechslungen zu vermeiden, merken wir hier noch an, dass die linearen Verbände den linearen Matroiden, wie sie z.B. in [2], Definition (VI.2.2) definiert sind, **nicht** eineindeutig entsprechen.

Aus der Definition des projektiven Raumes folgt eine Proposition:

2.22 Proposition:
Zwei coplanare Linien schneiden sich in einer Ebene eines projektiven Raumes M immer in einem Punkt. Jede Ebene von M besitzt ein Viereck.

Beweis. Angenommen es gäbe zwei disjunkt coplanare Linien in M. Dann gäbe es in M nach Satz 2.6 auch ein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar, was nach Voraussetzung nicht sein darf. Jede Ebene von M besitzt ein Dreieck. Jede Verbindungslinie der Punkte dieses Dreiecks hat mindestens drei Punkte. Nach Proposition 2.20 besitzt die Ebene dann auch ein Viereck. □

2.4.2 die projektive Geometrie $PG(n, q)$

Die Begriffe **Schiefkörper**, **Vektorraum** und **Untervektorraum**, **lineare (Un-)abhängigkeit** aus der linearen Algebra setzen wir als bekannt voraus. Ein **Schiefkörper** mit einer kommutativen Multiplikation ist ein **Körper**. Die **Dimension** eines Vektorraums U ist die Mächtigkeit einer maximal linear unabhängigen Menge von Vektoren aus U. Für die Dimensionen zweier Unterräume U und V eines Vektorraums W gilt (siehe jedes Standardwerk über lineare Algebra, z.B. [14], Satz 3.6):

$$dim_W U + dim_W V = dim_W(U + V) + dim_W(U \cap V),$$

wobei $U + V$ der kleinste Vektorraum ist, der U und V enthält. Wir definieren nun:

2.23 Definition:
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und es sei $V = V(n+1, K)$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über einem (Schief-)Körper K. Man bilde die Funktion

$$cl\colon 2^V \to 2^V, cl(A) = \{v \in V | v \text{ ist linear abhängig von } A\}.$$

Dann erfüllt cl die Bedingungen (CL1) - (CL5) von Satz 2.4, ist also der Abschlussoperator eines (evt. unendlichen) Matroids M (von endlichem Rang), welches die Grundmenge V hat (siehe [2], erstes Beispiel nach Definition (VI.1.1)). Die einzige Schleife dieses Matroids M ist der Nullvektor, die parallelen Klassen dieses Matroids sind die eindimensionalen Untervektorräume von V. Das zu M assoziierte einfache Matroid hat als Grundmenge die eindimensionalen Unterräume von V, heisst die **projektive Geometrie** $\boldsymbol{PG(n,K)}$ und hat Rang $n+1$. Wenn K ein endlicher Körper mit q Elementen ist, schreibt man auch $\boldsymbol{PG(n,q)}$. Die Zahl q heisst auch die **Ordnung** der projektiven Geometrie.

Hier folgt sofort eine Proposition dazu:

2.24 Proposition:
Seien F, G Flächen aus einer projektiven Geometrie $PG(n,K)$. Dann gilt:

$$r(F) + r(G) = r(F \cup G) + r(F \cap G).$$

Beweis. Die Flächen aus $PG(n,K)$ sind immer Unterräume des Vektorraums V. Der Rang einer Fläche F in $PG(n,K)$ ist immer gleich ihrer Dimension in dem Vektorraum V. Die Proposition ergibt sich dann direkt aus der Dimensionsformel für Vektorräume und aus $r(F \cup G) = r(cl(F \cup G)) = dim_V(F+G)$. □

Für eine projektive Geometrie gilt folgender Satz:

2.25 Satz:
Eine projektive Geometrie $PG(n,K)$ ist ein projektiver Raum.

Beweis. Der Beweis für Axiom 1 in [6], Satz 2.1.1, kann wörtlich als Beweis für das Axiom (A1) aus Definition 2.21 übertragen werden. Es sei H eine Hyperebene und l eine Linie aus $PG(n,K)$, die nicht in H enthalten ist, dann ergibt sich das fehlende Axiom (A2) aus Proposition 2.24 wie folgt:

$$r(H \cap l) = r(H) + r(l) - r(H \cup l) = n + 2 - (n+1) = 1.$$ □

Dass für Matroide von Rang > 3 auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, sehen wir im nächsten Abschnitt. Wir erwähnen noch ein weiteres kurzes Lemma (siehe [6], Satz 2.1.5), für weitere Anzahlsätze verweisen wir auf [17], Proposition 6.1.4:

2.26 Lemma:
Auf einer Gerade einer projektiven Geometrie der Ordnung q liegen $q+1$ Punkte.

2.4.3 projektive Ebenen

Projektive Ebenen werden normalerweise in der projektiven Geometrie als Inzidenzstrukturen definiert, wir brauchen diese Definition aber in unserer Arbeit nicht und definieren eine projektive Ebene wieder als Matroid (siehe wieder Welsh [22], Chapter 12).

2.27 Definition:
Ein Matroid ist eine **projektive Ebene**, wenn es Rang 3 hat und folgende Axiome gelten:

(P1) Zwei Geraden des Matroids schneiden sich in einem Punkt.
(P2) Das Matroid enthält ein Viereck.

Zunächst erwähnen wir einen Satz zur Charakterisierung der projektiven Ebenen:

2.28 Satz:
Enthält eine Gerade einer projektiven Ebene $q + 1$ Punkte, so enthalten alle Geraden der Ebene $q + 1$ Punkte und durch jeden Punkt gehen $q + 1$ Geraden, es gibt insgesamt $q^2 + q + 1$ Geraden und $q^2 + q + 1$ Punkte. Im endlichen Fall heisst q die Ordnung der projektiven Ebene. q ist immer ≥ 2. Falls die projektive Ebene unendlich viele Punkte hat, sind alle diese Anzahlen unendlich.

Beweis. Da die projektive Ebene ein Viereck hat, und die Linien des Vierecks sich in einem Punkt schneiden müssen, gibt es Linien, die mindestens 3 Punkte haben. Es ist also $q \geq 2$. Der Beweis der anderen Aussagen lässt sich jedem Standardwerk über projektive Ebenen z.B. [9], Chapter III. 2, Theorem 3.5, nachlesen. □

Es folgt direkt:

2.29 Satz:
Jede projektive Ebene ist ein projektiver Raum von Rang 3 und umgekehrt.

Beweis. Sei M eine projektive Ebene, dann hat nach Satz 2.28 jede Gerade mindestens drei Punkte (Axiom (A1) aus Definition 2.21), und da Hyperebenen in Rang-3-Matroiden Geraden sind, gilt Axiom (A2). Sei umgekehrt M ein projektiver Raum von Rang 3, dann ist M wegen Proposition 2.22 eine projektive Ebene. □

Es gilt noch, wie man sofort mit Proposition 2.22, Satz 2.28 und Lemma 2.26 sieht:

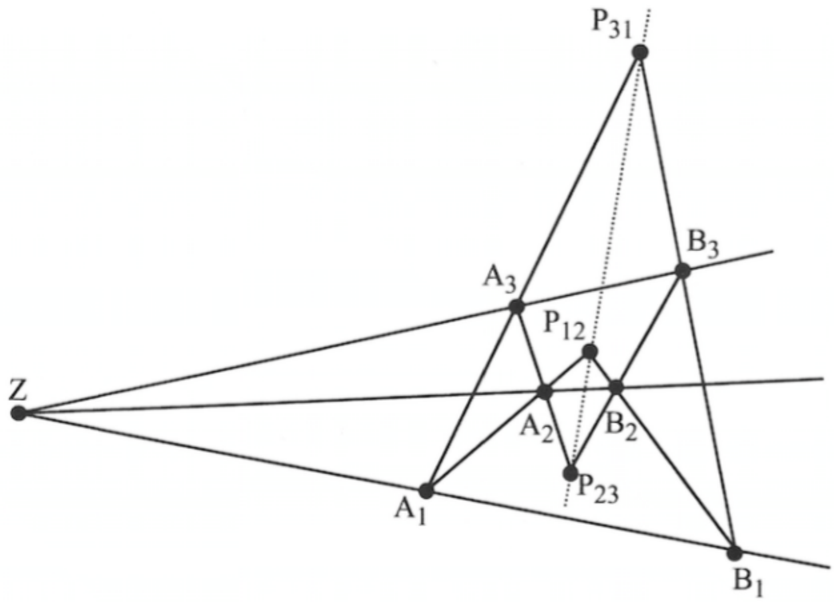
2.30 Satz:
Jede Ebene eines projektiven Raumes ist eine projektive Ebene. Eine Ebene der projektiven Geometrie $PG(n, q)$ für $n \geq 2$ ist eine projektive Ebene der Ordnung q.

2.4.4 der Satz von Desargues

Dieser Satz, benannt nach Gérard Desargues, einem Pionier der projektiven Geometrie im 17. Jahrhundert, gehört zu den wichtigsten Sätzen der projektiven Geometrie, er ist das Bindeglied zwischen synthetischer und analytischer projektiver Geometrie. Hierauf gehen wir in dieser Arbeit jedoch nicht ein und verweisen den interessierten Leser wieder auf [6].

Wir beginnen mit seiner Definition zitiert aus [6], Abschnitt 2.2 (verallgemeinert auf Matroide):

2.31 Definition:
Sei M ein Matroid. Man betrachte folgende Skizze:



Der Satz des Desargues, aus [6], Bild 2.1

Wir sagen, dass in M der **Satz von Desargues im Raum** gilt, falls folgendes richtig ist: Für jede Auswahl $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ von Punkten mit folgenden Eigenschaften

(i) A_i, B_i sind kollinear mit einem Punkt $Z, Z \neq A_i \neq B_i \neq Z (i = 1, 2, 3)$,
(ii) keine drei Punkte aus $\{Z, A_1, A_2, A_3\}$ und aus $\{Z, B_1, B_2, B_3\}$ sind kollinear,
(iii) Z, A_1, A_2 und A_3 liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene,

gilt, dass die Punkte

$$P_{12} := (A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2), P_{23} := (A_2 \vee A_3) \wedge (B_2 \vee B_3), P_{31} := (A_3 \vee A_1) \wedge (B_3 \vee B_1)$$

(wenn es sie gibt) auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Wenn statt der Bedingung (iii) gelten soll, dass alle Punkte der Auswahl in einer Ebene liegen sollen, sprechen wir von dem **Satz von Desargues in der Ebene**.

Wir nennen das Rang-3-Matroid, dessen Grundmenge nur aus den Punkten $Z, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, P_{31}, P_{12}$ und P_{23} besteht, die alle in einer Ebene liegen und die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllen, das **(Non-)Desargues-Matroid**, wenn die Punkte P_{31}, P_{12} und P_{23} (nicht) auf einer Linie liegen. Beide Matroide existieren (siehe [17], Chapter 1.5, Example 1.5.15 und Chapter 6.1, Fig.6.6).

Die folgende Definition gibt es nicht in der Literatur. Wir übertragen hier den Begriff der 'confined configuration' (siehe [9], Chapter XI.2) auf Matroide, so wie wir ihn benötigen. Wir übersetzen dabei 'confined' mit 'begrenzt' und nicht mit 'abgeschlossen', wie es manchmal in der deutschen Literatur verwirrenderweise übersetzt wird.

2.32 Definition:
Wir nennen ein Rang-3-Matroid M eine **begrenzte Konfiguration**, falls jeder Punkt von M mindestens auf drei Linien liegt, die mindestens drei Punkte haben.

Es folgt direkt:

2.33 Proposition:
Das Desargues-Matroid ist eine begrenzte Konfiguration, das Non-Desargues-Matroid nicht.

Hier folgt noch eine weitere Anwendung der begrenzten Konfigurationen:

2.34 Proposition:
Eine projektive Ebene ist eine begrenzte Konfiguration.

Beweis. Nach Satz 2.28 liegen auf jeder Linie einer projektiven Ebene mindestens drei Punkte und von einem Punkt gehen mindestens drei Linien aus. □

An dieser Stelle folgt ein wichtiger Satz:

2.35 Satz:
Der Satz von Desargues im Raum gilt für alle Matroide.

Beweis. Wir nehmen eine Auswahl von Punkten wie in Definition 2.31, für die die Bedingungen (i) bis (iii) gelten. Da die Punkte Z, A_1, A_2 und A_3 nicht in einer Ebene liegen dürfen, darf die Ebene $e_1 = cl_M(A_1, A_2, A_3)$ keinen Punkt aus $\{B_1, B_2, B_3\}$ enthalten. Die beiden Ebenen e_1 und $e_2 = cl_M(B_1, B_2, B_3)$ sind also verschieden und schneiden sich in den drei Punkten P_1, P_2 und P_3. Da sich zwei Ebenen in einem Matroid aber nur in höchstens einer Geraden schneiden dürfen (siehe Axiom (A2) aus Abschnitt 2.2.7), müssen die Punkte P_1, P_2 und P_3 auf einer Linie liegen. □

Der Satz von Desargues in der Ebene muss jedoch nicht für alle Matroide gelten, das Non-Desargues-Matroid ist ein Gegenbeispiel. Für projektive Ebenen definieren wir:

2.36 Definition:
Eine projektive Ebene, in denen der Satz von Desargues in der Ebene (nicht) gilt, heisst **(nicht-)desarguessch**.

Zu der Existenz nicht-desarguesscher projektiver Ebenen gibt es folgenden Satz:

2.37 Satz:
Es gibt nicht-desarguessche projektive Ebenen. Endliche nicht-desarguessche projektive Ebenen haben mindestens die Ordnung 9.

Ein Beweis dieses Satzes, sowie eine Klassifizierung der nicht-desarguesschen projektiven Ebenen befindet sich z.B. in dem Standardwerk 'Projektive Ebenen' von Günter Pickert (siehe [19], Kapitel 12.4 nach 14). Für projektive Räume gilt jedoch:

2.38 Satz:
In einem projektiven Raum von Rang > 3 gilt der Satz von Desargues auch in der Ebene.

Ein Beweis dafür darf in jedem Standardwerk über projektive Geometrie nicht fehlen, siehe z.B. [6], Satz 2.7.1. Hier kommt nun ein wichtiger Satz:

2.39 Satz:
Alle projektiven Räume, in denen der Satz von Desargues in der Ebene gilt, d.h. alle desarguesschen projektiven Ebenen, sowie alle projektiven Räume von Rang > 3, sind isomorph zu $PG(n, K)$, wobei n die Dimension von P ist, und K ein Schiefkörper.

Man sieht hier die Verbindung zwischen synthetischer und analytischer Geometrie. Die projektiven Räume waren durch einfache geometrische Gesetzmässigkeiten definiert, während die projektiven Geometrien aus Vektoräumen über Schiefkörpern entstehen. Man sagt auch, dass sich die projektiven Räume von Rang > 3 sowie die desarguesschen projektiven Ebenen **koordinatisieren** lassen. Es handelt sich um einen der berühmtesten Sätze der projektiven Geometrie, den **ersten Struktursatz der projektiven Geometrie**. Ein Beweis findet sich wieder z.B. in [6], Satz 3.4.2. Die nicht-desarguesschen projektiven Ebenen lassen sich auch 'koordinatisieren', dann kann K allerdings kein (Schief-)Körper mehr sein, sondern hat schwächere oder andere algebraische Eigenschaften. Wir verweisen hier wieder auf [19].

2.5 Modularität

2.40 Definition:
Seien X und Y Teilmengen der Grundmenge eines Matroids M mit Rangfunktion r. Die Zahl $\boldsymbol{\delta(X, Y)} = r(X)+r(Y)-r(X\cup Y)-r(X\cap Y)$ heisst **modularer Defekt des Paares** $\boldsymbol{(X, Y)}$. Aufgrund der Submodularität der Rangfunktion gilt immer, dass $\delta(X, Y) \geq 0$. Ist $\delta(X, Y) = 0$, dann heisst (X, Y) ein **modulares Paar** in M. Eine Fläche Z eines Matroids M heisst **modular**, wenn (Z, Y) ein modulares Paar für alle Flächen Y aus M ist. Ein Matroid heisst **modular**, wenn alle seine Flächen modular sind.

Die leere Menge, Punkte und die Grundmenge eines Matroids sind immer modulare Flächen. Der Flächenverband eines modularen Matroids ist auch modular. Wir benötigen in dieser Arbeit an einigen Stellen folgendes Lemma, es handelt sich um Folgerung (II.3.22) in [1], der Beweis befindet sich dort auch:

2.41 Lemma:
M ist genau dann ein nicht-modulares Matroid, wenn es in M eine Hyperebene und eine dazu disjunkte Gerade gibt.

Es folgen einige kleine Sätze, welche Matroide modular sind:

2.42 Proposition:
Matroide von Rang < 3 sind modular.

Beweis. Die leere Menge, Punkte und die Grundmenge eines Matroids sind modulare Flächen. Matroide von Rang < 3 haben keine anderen Flächen. □

2.43 Satz:
Projektive Räume und daher alle projektiven Geometrien und projektiven Ebenen sind modular.

Beweis. Dies folgt sofort aus Axiom (A2) von Definition 2.21 und Lemma 2.41. □

2.44 Satz:
Freie Matroide (und damit die Booleschen Algebren) sind modular.

Beweis. Bei einem freien Matroid M gilt für alle $X \subseteq E(M)$, dass X eine Fläche von M ist, und dass $r(X) = |X|$ gilt. Also gilt für alle $X, Y \subseteq E(M)$, dass $r(X) + r(Y) = |X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$. □

Ausserdem gilt, wie sich mit Proposition 2.9 leicht nachprüfen lässt:

2.45 Proposition:
Die direkte Summe von endlich vielen modularen Matroiden ist wieder modular.

Das bedeutet, dass direkte Summen von endlich vielen freien Matroiden und projektiven Räumen modular sind. Dass hier auch die Umkehrung gilt, folgt aus einem wichtigen Resultat, welches auf Garrett Birkhoff zurückgeht (siehe [7], Theorem 3) und welches wir in einer Formulierung aus [1], Satz (II.3.41), für geometrische Verbände zitieren:

2.46 Satz:
Die modularen geometrischen Verbände sind genau die direkten Produkte einer Booleschen Algebra und endlich vielen linearen Verbänden.

Aus Satz 2.17, den Resultaten von Abschnitt 2.3, sowie der Definition der linearen Verbände folgt, dass sich modulare geometrische Verbände und einfache modulare Matroide eineindeutig entsprechen, sowie Boolesche Algebren und freie Matroide und zudem lineare Verbände und projektive Räume. Direkte Summen von Flächenverbänden korrespondieren mit den direkten Summen der entsprechenden einfachen Matroide. Damit können wir dieses Resultat in Matroidschreibweise umformulieren und erhalten:

2.47 Satz:
Ein einfaches modulares Matroid M ist die direkte Summe von endlich vielen Matroiden $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$, wobei die N_i freie Matroide oder projektive Räume sind.

2.5.1 (nicht-)modulare Paare eines Matroides bis Rang 4

Wir geben hier eine Liste aller möglichen Flächenpaare eines Matroides M bis Rang 4: Zunächst gilt für alle Matroide egal welchen Ranges:

- Punkte, $\emptyset$, sowie $E(M)$ sind modulare Flächen aus M,
- für zwei Flächen $F_1 \subseteq F_2$ aus M sind (F_1, F_2) und (F_2, F_1) modulare Paare.

Es folgen die möglichen modularen Paare eines Rang-4-Matroids (dies sind auch modulare Paare in Matroiden höheren Ranges):

- zwei Linien, die sich in einem Punkt schneiden,
- zwei zueinander disjunkte Linien, aber nicht coplanare (windschiefe) Linien,
- eine Linie, die eine Ebene in einem Punkt schneidet und
- zwei Ebenen, die sich in einer Linie schneiden.

Nun folgen alle möglichen nicht-modularen Paare von Rang-4-Matroiden mit dem zugehörigen modularen Defekt δ:

- zwei disjunkt coplanare Linien ($\delta = 1$),
- ein disjunktes Linien-Ebenenpaar($\delta = 1$),
- zwei Ebenen, die sich in nur einem Punkt schneiden ($\delta = 1$) sowie
- zwei disjunkte Ebenen ($\delta = 2$).

Die letzten drei Paare können in Matroiden höheren Ranges auch modular sein.

2.5.2 modulare Matroide bis Rang 4

Wir listen nun alle modularen Matroide bis Rang 4 auf. In Abschnitt 2.2.5 haben wir bei den freien Matroiden bis Rang 4 festgestellt, dass sie alle direkte Summen von Punkten und zweipunktigen Geraden sind. Geraden mit mehr als zwei Punkten sind aber projektive Räume. Es reicht also nach Satz 2.47 alle in Frage kommenden direkten Summen von Kombinationen von Punkten, Geraden und projektiven Räumen von Rang > 2 zu betrachten, um alle modularen Matroide zu erhalten. Zunächst sind nach Proposition 2.42 alle Matroide von Rang < 3 modular. Bei den modularen Matroiden von Rang 3 gibt es zwei Möglichkeiten:

2.48 Satz:
Sei M ein modulares Matroid von Rang 3. Dann gilt:

(i) Falls es in M kein Viereck gibt, ist M die direkte Summe einer Linie mit einem Punkt, ein **pencil**.
(ii) Falls es in M ein Viereck gibt, ist M eine projektive Ebene.

Beweis. Nach den obigen Überlegungen besteht die Liste der modularen Rang-3-Matroide aus (i) der Summe einer Geraden mit einem Punkt (der pencil), diese enthält kein Viereck, oder (ii) den projektiven Ebenen, diese enthalten Vierecke. □

Nun kommen wir zu den modularen Matroiden von Rang 4. Wir zeigen zunächst eine Proposition:

2.49 Proposition:
Ein Matroid, welches die direkte Summe zweier Geraden ist, besitzt in keiner Ebene ein Viereck.

Beweis. Sei M die direkte Summe zweier Linien l_1 und l_2. Eine Ebene e aus M enthält immer eine der beiden Linien, sei dies o.B.d.A. die Linie l_1, und einen Punkt p aus der anderen Linie l_2. Angenommen e würde nun noch einen weiteren Punkt aus der Linie l_2 enthalten, dann wären beide Linien in der Ebene e enthalten, sie hätte also Rang 4, was nicht sein darf. So ist die Ebene die Summe der Linie l_1 mit dem Punkt p und enthält demzufolge kein Viereck. Also enthält keine Ebene aus M ein Viereck. □

2.50 Satz:
Sei M ein modulares Matroid von Rang 4. Dann gilt:

(i) Falls keine Ebene in M ein Viereck besitzt, ist M die direkte Summe zweier Linien (ein Tetraeder).
(ii) Falls eine Ebene in M ein Viereck besitzt, ist M die direkte Summe einer projektiven Ebene mit einem Punkt.
(iii) Falls mindestens zwei Ebenen in M ein Viereck besitzen, ist M eine projektive Geometrie $PG(3, K)$, wobei K ein beliebiger (Schief-)körper ist.

Beweis. Nach den Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts besteht die Liste der modularen Rang-4-Matroide aus

(i) der direkten Summe zweier Geraden,
(i)' der direkten Summe eines pencils mit einem Punkt, was aber ein Spezialfall von (i) ist. In beiden Fällen besitzt das Matroid nach Proposition 2.49 in keiner Ebene ein Viereck.
(ii) der direkten Summe einer projektiven Ebene mit einem Punkt, dann besitzt nur eine Ebene in M ein Viereck, alle anderen Ebenen sind pencils.
(iii) den dreidimensionalen projektiven Geometrien. Sie besitzen als Rang-4-Matroide mindestens zwei verschiedene Ebenen und jede der beiden Ebenen ist nach Satz 2.30 eine projektive Ebene und enthält also ein Viereck. □

2.6 Erweiterungen von Matroiden

2.6.1 Restriktion und Kontraktion

2.51 Definition:
Sei $N = (E, I)$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Es sei $\mathcal{I} \setminus T = \{I \setminus T$, für alle $I \in \mathcal{I}\}$. Dann ist $M = (E \setminus T, \mathcal{I} \setminus T)$ ein Matroid. Das Matroid M heisst **Untermatroid von N** oder auch **Restriktion von N auf $(E \setminus T)$**. Wir schreiben auch $\boldsymbol{M = N \setminus T}$ oder $\boldsymbol{M = N|(E \setminus T)}$ und sagen, dass M **zu N erweiterbar** bzw. **in N einbettbar** ist. Umgekehrt heisst N eine **Erweiterung von M**. Wenn $|T| = 1$ ist, so heisst N eine **Erweiterung von M mit einem Punkt** oder eine **Punkterweiterung von M**.

2.52 Definition:
Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit dem Abschlussoperator cl_M und es sei $A \subseteq E$. Dann bildet die Menge $E \setminus A$ zusammen mit dem Operator

$$cl_{M \setminus A} : E \setminus A \to E \setminus A, cl_{M \setminus A}(X) = cl_M(X \cup A) \setminus A$$

ein Matroid $\boldsymbol{M/A}$. Wir nennen M/A die **Kontraktion von M durch A**. Wenn $|A| = 1$ ist, dann heisst M/A eine **Punktkontraktion von M**. Die Restriktion einer Kontraktion eines Matroids M heisst ein **Minor von M**.

In einer Kontraktion M' von einem Matroid M ergeben sich oft parallele Punkte, wir gehen deshalb manchmal zu dem jeweiligen assoziierten einfachen Matroid M'' über und nennen dieses dann vereinfacht die Kontraktion von M, wenn sich im Kontext klar ergibt, was gemeint ist. Für die Rangfunktionen der Restriktion/Kontraktion gilt (siehe [2], Folgerung (VI.3.3) und Folgerung (VI.3.5 d)):

2.53 Lemma:
Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Es seien $T \subseteq E, X \subseteq T$ und $Y \subseteq (E \setminus T)$. Dann gilt:

$$r_{M\setminus T}(X) = r_M(X) \text{ sowie } r_{M/T}(Y) = r_M(Y \cup T) - r_M(T).$$

Wir zitieren nun einen wichtigen Satz (siehe [2], Satz VI.3.4). Der Flächenverband der Kontraktion eines Matroids ist immer isomorph zu einem oberen Intervall des Flächenverbands des Matroids selbst. Es handelt sich hier um einen Spezialfall des sogenannten **Scum-Theorems**, (siehe [17], Theorem 3.3.7).

2.54 Satz:
Für den zugehörigen Flächenverband der Kontraktion M/A ein Matroides M durch A gilt:

$$\mathcal{L}(M/A) \cong [cl_M(A), 1_M] \subseteq \mathcal{L}(M).$$

An dieser Stelle erwähnen wir noch eine Notationskonvention: Es sei M' eine Erweiterung eines Matroids M und F sei eine Fläche in M. Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, was gemeint ist, schreiben wir manchmal abkürzend für $cl'_M(F)$ auch die **Fläche $\boldsymbol{F}$ in $\boldsymbol{M'}$**. Hierzu zeigen wir noch eine kleine Proposition:

2.55 Proposition:
Es sei M ein Matroid mit Grundmenge $E(M)$ und es sei M' eine Erweiterung von M. Wenn F' eine Fläche in M' ist dann ist $F = F' \cap E(M)$ eine Fläche in M. Wir nennen F auch die **Restriktion der Fläche $\boldsymbol{F'}$ auf $\boldsymbol{M}$**.

Beweis. Sei $p \in E(M)$ mit $p \in cl_M(X \cap E(M))$. Dann gilt auch $p \in cl_{M'}(X \cap E(M)) \subseteq cl_{M'}(X)$. Da X eine Fläche in M' ist, gilt daher, dass $p \in X$. Da auch $p \in E(M)$ ist, gilt $p \in X \cap E(M)$. □

2.6.2 Punkterweiterungen und modulare Filter

Für eine genauere Analyse der Punkterweiterungen benötigen wir eine wichtige Definition:

2.56 Definition:
Eine beliebige Menge $\mathcal{M}$ von Flächen eines Matroides M heisst **modularer Filter von $\boldsymbol{M}$**, wenn gilt:

(i) Wenn $F \in \mathcal{M}$ und F' eine Fläche in M ist, die F enthält, dann ist auch F' in $\mathcal{M}$.
(ii) Wenn $F_1, F_2 \in \mathcal{M}$ und (F_1, F_2) ein modulares Paar ist, dann gilt auch $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{M}$.

Es gilt nun folgender wichtiger Satz, der auf Henry Crapo (1965) zurückgeht (siehe [17], Theorem 7.2.2 und Lemma 7.2.1):

2.57 Satz:
Sei $\mathcal{M}$ ein modularer Filter eines Matroids M. Dann gibt es eine eindeutige Erweiterung N von M mit einem Punkt p, so dass $\mathcal{M}$ genau die Flächen F aus M enthält, für die $r_N(F \cup p) = r_M(F)$ gilt. Wir schreiben für N auch $\boldsymbol{M +_{\mathcal{M}} p}$. Sei umgekehrt N eine Erweiterung von M mit einem Punkt p, dann ist die Menge aller Flächen F aus M, für die $r_N(F \cup p) = r_M(F)$ gilt, ein modularer Filter.

Punkterweiterungen und modulare Filter von Matroiden entsprechen sich also eineindeutig, wir geben nun eine Liste dieser Entsprechungen:

Die Menge aller Flächen des Matroides M bildet einen modularen Filter, den **trivialen modularen Filter von $\boldsymbol{M}$**. Ihm entspricht die **Erweiterung von $\boldsymbol{M}$ mit einer Schleife**. $\mathcal{M} = \emptyset$ ist auch ein modularer Filter, die zugehörige Erweiterung erhöht als einzige Punkterweiterung den Rang des Matroids um 1 und heisst die **Erweiterung eines Matroids mit einem Coloop**.

Sei F eine Fläche eines Matroids M, dann ist $\mathcal{M}_F = \{G | G \text{ ist Fläche in } M \text{ und } G \supseteq F\}$ ein modularer Filter von M. $\mathcal{M}_F$ heisst ein **Hauptfilter von $\boldsymbol{M}$**. Man sagt, dass in der zugehörigen Erweiterung ein Punkt zu der Fläche F **frei hinzugefügt** wird und nennt die zugehörige Erweiterung eine **Erweiterung in allgemeiner Lage in $\boldsymbol{F}$**. Falls $F = E(M)$ ist, sagt man auch, dass in der zugehörigen Erweiterung ein Punkt zu dem Matroid M **frei hinzugefügt** wird und spricht von einer **freien Punkterweiterung von $\boldsymbol{M}$**.

Alle anderen Punkterweiterungen eines Matroids M nennen wir **nicht-triviale Erweiterungen des Matroids $\boldsymbol{M}$**. Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Flächen eines Matroids M, und es sei $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ der kleinste modulare Filter, der alle Flächen aus der Menge $\mathcal{A}$ enthält, so heisst $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ der **von $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ erzeugte modulare Filter von $\boldsymbol{M}$**.

2.6.3 Paare von Mengen zum Schnitt bringen

In diesem Abschnitt definieren wir, was es bedeutet, dass ein Paar von Flächen in einem Matroid 'zum Schnitt gebracht werden kann'. Dazu benötigen wir zunächst eine kleine Proposition:

2.58 Proposition:
Sei M ein Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r. Es seien $X, Y \subseteq T$. Sei $\delta(A, B)$ der modulare Defekt zweier Mengen $A, B \subseteq T$. Dann gilt:

$$\delta(cl(X), cl(Y)) \leq \delta(X, Y) \text{ und ausserdem}$$

$$\delta(cl(X), cl(Y)) = \delta(X, Y) \Longleftrightarrow cl(X \cap Y) = cl(X) \cap cl(Y).$$

Beweis. Alle folgenden Gleichungen ergeben sich aus der Monotonie von r und cl, sowie aus der Tatsache, dass $r(A) = r(cl(A))$ für alle $A \subseteq T$ ist. Es gilt:

$$r(X \cup Y) \leq r(cl(X) \cup cl(Y)) \leq r(cl(X \cup Y) \cup cl(X \cup Y)) = r(cl(X \cup Y)) = r(X \cup Y)$$

Daraus folgt, dass $r(X \cup Y) = r(cl(X) \cup cl(Y))$ und somit:

$$\begin{aligned}\delta(cl(X), cl(Y)) &= r(cl(X)) + r(cl(Y)) - r(cl(X) \cup cl(Y)) - r(cl(X) \cap cl(Y)) \\ &= r(X) + r(Y) - r(X \cup Y) - r(cl(X) \cap cl(Y)) \\ &= \delta(X, Y) + r(X \cap Y) - r(cl(X) \cap cl(Y)) \\ &= \delta(X, Y) + r(cl(X \cap Y)) - r(cl(X) \cap cl(Y)).\end{aligned}$$

Es gilt immer $cl(X \cap Y) \subseteq cl(X) \cap cl(Y)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Aus $cl(X \cap Y) = cl(X) \cap cl(Y)$ folgt, dass $\delta(cl(X), cl(Y)) = \delta(X, Y)$.

Aus $cl(X \cap Y) \subset cl(X) \cap cl(Y)$ folgt $r(cl(X \cap Y)) < r(cl(X) \cap cl(Y))$, da $cl(X \cap Y)$ eine Fläche ist. Daraus folgt, dass $\delta(cl(X), cl(Y)) < \delta(X, Y)$. □

Hieraus ergibt sich direkt folgende Proposition:

2.59 Proposition:
Sei M ein Matroid und M' eine Erweiterung von M. Dann ist für jedes modulare Paar (X, Y) von Flächen aus M auch $(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y))$ ein modulares Paar von Flächen aus M' und es gilt: $cl_{M'}(X) \cap cl_{M'}(Y) = cl_{M'}(X \cap Y)$.

Beweis. Wegen Proposition 2.58 und und da der modulare Defekt eines Paares von Flächen aus M immer ≥ 0 ist, muss gelten: $0 \leq \delta(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y)) \leq \delta(X, Y) = 0$. Damit ist alles gezeigt. □

Wir bilden nun folgende

2.60 Definition:
Sei M ein Matroid und M' eine Punkterweiterung von M. Ein Paar (X, Y) von Flächen aus M wird in M' **zum Schnitt gebracht**, wenn der modulare Defekt von $(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y))$ kleiner als der von (X, Y) ist.

Wir zeigen ein wichtiges Lemma:

2.61 Lemma:
Sei M ein Matroid. (X, Y) sei ein Paar von Flächen aus M und M' eine Erweiterung von M mit einem Punkt p. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

(1) (X, Y) wird in M' zum Schnitt gebracht.

(2) Der modulare Filter $\mathcal{M}$, der der Punkterweitung M' entspricht, enthält X und Y, jedoch nicht $X \cap Y$.

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{M}$ enthält X und Y aber nicht $X \cap Y$. Dann gilt nach Satz 2.57:

$$p \in cl_N(X) \cap cl_N(Y), \text{ aber } p \notin cl_N(X \cap Y).$$

Aus Proposition 2.58 folgt, dass dann der modulare Defekt von $(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y))$ kleiner ist als der modulare Defekt von (X, Y). Das Paar (X, Y) wird in M' zum Schnitt gebracht.

(1) $\Rightarrow$ (2): Angenommen (2) gilt nicht. Dann enthält $\mathcal{M}$ entweder höchstens eine der beiden Flächen X und Y oder M enthält $X \cap Y$.

Angenommen M enthielte $X \cap Y$. Dann würde M auch X und Y enthalten. Dann würde gelten, dass $cl_{M'}(X \cap Y) = (X \cap Y) \cup \{p\} = cl_{M'}(X) \cap cl_{M'}(Y)$, und für die modularen Defekte δ würde nach Proposition 2.58 dann $\delta(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y)) = \delta(X, Y)$ gelten.

Angenommen $\mathcal{M}$ enthielte nur eine oder keine der Flächen X, Y. In M' würde dann $cl_{M'}(X \cap Y) = X \cap Y = cl_{M'}(X) \cap cl_{M'}(Y)$ gelten. Die modularen Defekte würden sich hier nach Proposition 2.58 also auch nicht ändern.

In beiden Fällen wird also das Paar (X, Y) in M' nicht zum Schnitt gebracht, (1) gilt also nicht. □

Als Korollar ergibt sich hierzu:

2.62 Korollar:
Sei M ein Matroid und M' eine Punkterweiterung einer Fläche von M in allgemeiner Lage. Dann wird in M' kein Flächenpaar aus M zum Schnitt gebracht.

Beweis. Der Punkterweiterung M' entspricht ein modularer Filter von M, der ein Hauptfilter ist. Sei (X, Y) ein Flächenpaar in M. Jeder Hauptfilter, der die Flächen X und Y enthält, muss auch $X \cap Y$ enthalten, das bedeutet, dass (X, Y) in M' nicht zum Schnitt gebracht wird. □

Ausserdem gilt noch:

2.63 Korollar:
Sei M ein Matroid und M' eine Erweiterung von M mit einem Coloop. Dann wird in M' kein Flächenpaar aus M zum Schnitt gebracht.

Beweis. Der Erweiterung M' entspricht der leere modulare Filter, er enthält kein Flächenpaar aus M, die Aussage folgt aus Lemma 2.61. □

Wir beweisen noch folgendes Lemma:

2.64 Lemma:
Sei M ein Matroid. (X, Y) sei ein Paar von Flächen aus M . Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

(1) (X, Y) kann zum Schnitt gebracht werden.

(2) Der von X und Y erzeugte modulare Filter enthält nicht $X \cap Y$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Wenn (X, Y) zum Schnitt gebracht werden kann, dann gibt es eine Punkterweiterung von M, der ein modularer Filter $\mathcal{M}$ entspricht, der X und Y enthält, aber nicht $X \cap Y$. Der von X und Y erzeugte modulare Filter ist immer in $\mathcal{M}$ enthalten, also kann er nicht $X \cap Y$ enthalten.
(2) $\Rightarrow$ (1) Das Paar (X, Y) wird nach Lemma 2.61 in der Punkterweiterung von M zum Schnitt gebracht, die dem von X und Y erzeugten modularen Filter entspricht. □

Aus Lemma 2.64 und der Definition des modularen Filters ergibt sich hier folgendes kleines

2.65 Korollar:
Ein modulares Paar von Flächen eines Matroids kann nicht zum Schnitt gebracht werden.

Ausserdem gilt noch folgendes Lemma:

2.66 Lemma:
Ein nicht-modulares Hyperebenen-Paar eines Matroids kann immer zum Schnitt gebracht werden.

Beweis. Der von den beiden Hyperebenen erzeugte modulare Filter besteht nur aus diesen Hyperebenen und dem maximalen Element. □

2.6.4 Die Intersection-Properties und die Bundle Condition

Um den Begriff der Intersection-Property (Schnittbedingung) zu definieren, halten wir uns an eine Arbeit von A. Bachem und A. Wanka, [4], in der dieser Begriff genauer untersucht wurde. Hier werden drei verschiedene Intersection-Properties definiert:

2.67 Definition:
Ein Matroid M hat die **euklidische Intersection-Property $\boldsymbol{IP_3}$**, wenn jedes disjunkte Hyperebenen-Geraden-Paar zum Schnitt gebracht werden kann.

2.68 Definition:
Ein Matroid M hat die **verallgemeinerte euklidische Intersection-Property $\boldsymbol{IP_2}$**, wenn jedes nicht-modulare Paar (X, Y) von Flächen aus M zum Schnitt gebracht werden kann.

2.69 Definition:
Ein Matroid M von Rang r hat **Levy's Intersection-Property $\boldsymbol{IP_1}$**, wenn für jede $r-1$ Hyperebenen H_i mit $\bigcup_{i=1}^{r-1} H_i = \emptyset$ eine nicht-triviale Erweiterung M' von M mit einem Punkt p existiert, so dass der Schnitt aller $H_i (i = 1, \ldots, r-1)$ in M' den Punkt p enthält.

Sei nun $\mathcal{M}_i$ die Menge aller Matroide, die die jeweilige Intersection-Property IP_i erfüllen. Dann gilt (siehe [4], Proposition 2):

2.70 Satz:

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$$

Beschränkt man sich nur auf Matroide bis Rang 4, so gilt (siehe [4], Proposition 4):

2.71 Satz:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3$$

Ausserdem gilt, wie man sofort sieht:

2.72 Lemma:
Modulare Matroide und Matroide von Rang < 4 haben alle drei Intersection-Properties.

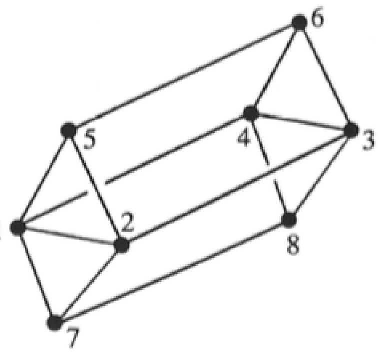
Bei Bachem und Wanka in [4] gibt es noch einen wichtigen Satz, (Theorem 3), den wir hier ohne Beweis zitieren, der Beweis funktioniert auch für Matroide endlichen Ranges mit abzählbar unendlicher Grundmenge.

2.73 Satz:
Die Klassen der Matroide, die die Intersection-Properties IP_1, IP_2 oder IP_3 haben, sind alle abgeschlossen unter Bildung von Minoren.

Die Bundle-Condition (in der Literatur manchmal auch Bundle Theorem oder in deutsch Bündelsatz genannt) lautet folgendermassen, wir halten uns wieder an die Definition von Bachem und Wanka in [4] (vor Theorem 1):

2.74 Definition:
Ein Matroid M von mindestens Rang 4 erfüllt die **Bundle-Condition**, wenn für 4 disjunkte Geraden $l_1, \dots, l_4$ aus M, von denen keine drei in einer Ebene liegen, folgendes gilt: **Wenn fünf der sechs Paare (l_i, l_j) (mit $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$) zweier dieser Geraden coplanar sind, so ist es auch das sechste Paar.**

Umformuliert bedeutet das: Ist bei einem Matroid die Bundle Condition nicht erfüllt, so besitzt es das Vámos-Matroid V_8 als Untermatroid.



Das **Vámos-Matroid** V_8, aus [17], Fig. 6.3

Die Linien $l_1 = \{1, 4\}, l_2 = \{2, 3\}, l_3 = \{5, 6\}$ und $l_4 = \{7, 8\}$ sind paarweise disjunkt coplanar bis auf die beiden Linien l_3 und l_4, welche nicht zueinander coplanar sind.

2.75 Proposition:
Keines der Linienpaare (l_i, l_j) für $i \neq j$ mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ des Vámos-Matroids V_8 (siehe Zeichnung) lässt sich zum Schnitt bringen.

Beweis. Die beiden Linien l_3 und l_4 bilden ein modulares Paar. Jeder modulare Filter, der die beiden Linien enthält, enthält daher auch $l_3 \cap l_4 = \emptyset$. Die beiden Linien lassen sich also nach Lemma 2.64 nicht zum Schnitt bringen. Man betrachte nun den von den beiden Linien l_1 und l_2 erzeugten modularen Filter $\mathcal{M}$. Er enthält die beiden Ebenen $l_1 \vee l_3$ und $l_2 \vee l_3$, diese beiden Ebenen schneiden sich in der Linie l_3, bilden also ein modulares Paar.

Das bedeutet, dass $\mathcal{M}$ auch die Linie l_3 enthält. Analog dazu lässt sich zeigen, dass auch l_4 in $\mathcal{M}$ liegen muss, das bedeutet aber, dass $\mathcal{M}$ auch die leere Menge $\emptyset = l_1 \cap l_2$ enthält. Die beiden Linien l_1 und l_2 lassen sich also nach Lemma 2.64 auch nicht zum Schnitt bringen. Für alle anderen Linienpaare läuft die Argumentation analog. □

Für modulare Matroide gilt folgendes

2.76 Lemma:
Alle modularen Matroide erfüllen die Bundle-Condition.

Beweis. Angenommen ein Matroid M erfüllt die Bundle-Condition nicht, dann gibt es in M zwei coplanare Linien, die sich nicht schneiden. M ist also nicht modular. □

Als Korollar ergibt sich:

2.77 Korollar:
Sei M ein Matroid, welches zu einem modularen Matroid erweiterbar ist (in ein modulares Matroid einbettbar ist). Dann erfüllt M die Bundle-Condition.

Beweis. Angenommen M würde die Bundle-Condition nicht erfüllen. Dann hätte M das Vámos-Matroid als Untermatroid. Dann hätte aber auch jede Erweiterung von M das Vámos-Matroid als Untermatroid, die Bundle-Condition wäre also auch in keiner Erweiterung von M erfüllt, was nicht sein kann. □

Ausserdem gilt, wie man sofort sieht:

2.78 Lemma:
Ein Matroid M habe die Intersection-Property IP_2, dann gilt in M die Bundle-Condition.

Die Frage nach der Umkehrung dieser Proposition, sowie nach dem Verhältnis der Bundle Condition zu der Intersection-Property IP_3 bleibt offen. Für Matroide vom Rang 4 ist die Sache einfacher. Es gilt folgender wichtiger Satz (bewiesen in [3], Theorem 9, sowie in [8] Theorem 3.5):

2.79 Satz:
Ein Matroid M von Rang 4 hat die (drei äquivalenten) Intersection-Properties genau dann, wenn die Bundle-Condition erfüllt ist.

2.6.5 modulare Filter in Erweiterungen

Zu dem Verhalten von modularen Filtern in Erweiterungen zeigen wir zwei Lemmata:

2.80 Lemma:
Sei M ein Matroid und M' eine Erweiterung von M.

$\mathcal{M}$ sei der von einer Menge A von Flächen aus M erzeugte modulare Filter in M.
$\mathcal{M}'$ sei der von der Menge $A' = \{cl_{M'}(X)|X \in A\}$ erzeugte modulare Filter in M'.

Dann gilt: $\{cl_{M'}(X)|X \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{M}'$.

Beweis. Sei zunächst X in $\mathcal{M}$ und $cl_{M'}(X)$ in $\mathcal{M}'$ und es sei $Y \in \mathcal{M}$ mit $Y \supseteq X$. Dann ist auch $cl_{M'}(Y) \supseteq cl_{M'}(X)$, das heisst $cl_{M'}(Y)$ ist in $\mathcal{M}'$. Seien (X, Y) ein modulares Paar von Flächen in $\mathcal{M}$, mit $cl_{M'}(X)$ und $cl_{M'}(Y)$ in $\mathcal{M}'$, dann ist nach Proposition 2.59 auch $(cl_{M'}(X), cl_{M'}(Y))$ ein modulares Paar von Flächen in M'. Damit liegt $cl_{M'}(X) \cap cl_{M'}(Y)$ auch in $\mathcal{M}'$ und ist nach Proposition 2.59 gleich $cl_{M'}(X \cap Y)$. Damit ist alles gezeigt. □

Wir zeigen nun ein spezielleres Lemma in einer anderen Formulierung:

2.81 Lemma:
Sei M ein Matroid. (h_1, h_2) und (h_3, h_4) seien zwei verschiedene nicht-modulare Paare von Hyperebenen in M und M' sei die Punkterweiterung von M, die dem von (h_1, h_2) erzeugten modularen Filter $\mathcal{M}$ entspricht. Dann gilt:

$$\delta(cl_{M'}(h_3), cl_{M'}(h_4)) = \delta(h_3, h_4).$$

Beweis. $\mathcal{M}$ enthält ausser h_1 und h_2 keine weitere Hyperebene. Es gibt daher in dem Hyperebenen-Paar (h_3, h_4) mindestens eine Hyperebene (sei dies o.B.d.A h_3), die nicht in $\mathcal{M}$ liegt, für die also gilt: $cl_{M'}(h_3) = h_3$. Dann gilt:

$$cl_{M'}(h_3 \cap h_4) \subseteq cl_{M'}(h_3) \cap cl_{M'}(h_4) = h_3 \cap cl_{M'}(h_4) = h_3 \cap h_4 \subseteq cl_{M'}(h_3 \cap h_4)$$

Nach Proposition 2.58 gilt dann $\delta(cl_{M'}(h_3), cl_{M'}(h_4)) = \delta(h_3, h_4)$. □

2.6.6 die Vereinigung einer Erweiterungskette

Hier beschreiben wir eine Konstruktion, die wir bei der Einbettung von Matroiden in Matroide mit einer unendlichen Grundmenge brauchen werden:

2.82 Lemma:
Sei M_0 ein Matroid von endlichem Rang n. Sei $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ eine Kette von Erweiterungen von M_0, die alle den Rang von M_0 nicht erhöhen. Seien $E(M_0), E(M_1) \ldots$ die zugehörigen Grundmengen der Matroide in der Kette. Wir definieren die Menge $E(M^*) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E(M_i)$ (bzw. $\bigcup_{i=0}^{m} E(M_i)$ falls die Kette die endliche Länge m hat) und eine Menge von Mengen $\mathcal{I}^* \subseteq \mathcal{P}(E(M^*))$, wobei gilt: $X \in \mathcal{I}^*$ gdw. X eine unabhängige Menge in einem Matroid M_i ist.

Dann ist $M^* = (E(M^*), \mathcal{I}^*)$ ein Matroid von Rang n und eine Erweiterung von allen M_i. Wir schreiben auch $M^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ (bzw. $\bigcup_{i=0}^{m} M_i$) und nennen dieses Matroid die **Vereinigung der Erweiterungskette** $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$

Beweis. Die leere Menge ist eine unabhängige Menge in M^*, da sie schon eine unabhängige Menge in M_0 ist. Seien X und Y zwei unabhängige Mengen in M^*, dann gibt es ein Matroid M_i, in welchem X und Y unabhängige Mengen sind. Damit sieht man sofort, dass in M^* alle Unabhängigkeitsaxiome gelten. M^* ist ein Matroid.

Es gibt unabhängige Mengen in M^*, die n Elemente haben, aber keine unabhängige Menge in M^* hat mehr als n Elemente, M^* ist also von Rang n. Dass M^* eine Erweiterung von allen M_i ist, sieht man direkt. □

2.6.7 die (hyper-)freie Ebenenerweiterung

Wir zeigen nun, dass sich jedes Rang-3-Matroid in eine projektive Ebene einbetten lässt, diese Einbettung wird auch freie Ebenenerweiterung des Matroids genannt. Wir halten uns hier an die Konstruktion von Pickert in [19], Abschnitt 1.3., formulieren die Konstruktion jedoch mit unseren Begriffen:

2.83 Definition:
Sei M_0 ein endliches Matroid von Rang 3. Es sei P die Menge aller disjunkten Linienpaare in M_0. Da M_0 endlich ist, ist auch P endlich, es sei $|P| = n$. Da bei Rang-3-Matroiden Linien und Hyperebenen das selbe sind, können alle diese Linienpaare wegen Lemma 2.66 in M_0 zum Schnitt gebracht werden.

Wir nehmen ein disjunktes Linienpaar (l_1, l_2) aus P und bilden die Punkterweiterung M_1 von M_0, die dem von dem Linienpaar erzeugten modularen Filter entspricht. Nach Lemma 2.81 bleiben alle anderen Linienpaare aus P in M_1 disjunkt, können also in M_1 auch zum Schnitt gebracht werden. Wir bilden nun das Matroid M_2, in dem wieder ein Linienpaar aus $P \backslash (l_1, l_2)$ zum Schnitt gebracht wird usw. Es entsteht eine Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n$ von Punkterweiterungen, in denen alle disjunkten Linienpaare aus P nacheinander zum Schnitt gebracht werden.

Durch die zusätzlichen Punkte ergeben sich aber in M_n evtl. wieder m neue disjunkte Linienpaare, wir verfahren mit diesen wie vorher, die Kette verlängert sich weiter und wir erhalten wiederum als letztes Glied der Kette das Matroid M_{n+m}. Mit diesem Matroid verfahren wir ebenso und so weiter. Wir erhalten insgesamt eine Erweiterungskette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ von Rang-3-Matroiden. Wir bilden nun die Vereinigung der Erweiterungskette $M^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. Sie ist nach Lemma 2.82 ein Rang-3-Matroid und eine Erweiterung aller M_i. Das Matroid M^* heisst die **freie Ebenenerweiterung von M_0**.

Wir beweisen zunächst einen einfachen aber wichtigen Satz dazu (siehe z.B. auch Pickert in [19], 1.3.12.).

2.84 Satz:
Eine freie Ebenenerweiterung M' eines endlichen Rang-3-Matroids M hat keine endlichen begrenzten Konfigurationen als Untermatroide, die Punkte enthalten, die aus $E(M') \setminus E(M)$ stammen.

Beweis. Angenommen es gibt eine endliche begrenzte Konfiguration in M' mit Punkten aus $M' \setminus M$. Alle diese Punkte sind irgendwann in der Erweiterungskette hinzugefügt worden. Es sei p der Punkt aus der begrenzten Konfiguration, der als letztes in der Kette hinzugefügt wurde, das Matroid M_n sei das erste Matroid in der Kette, welches p enthält. Durch den Punkt p gehen in der begrenzten Konfiguration drei Linien, die jeweils mindestens drei Punkte haben, von denen jeweils zwei Punkte schon in M_{n-1} existieren. Das bedeutet, dass auch die drei Linien schon in M_{n-1} existieren müssen, p kann aber nur Schnittpunkt zweier dieser Linien sein. □

Wenn ein Matroid in der Erweiterungskette modular ist, bricht die Kette ab, da es keine weiteren disjunkten Linienpaare mehr gibt, die zum Schnitt gebracht werden können. Wir folgern hieraus und aus dem letzten Satz:

2.85 Satz:
Eine freie Ebenenerweiterung M^* eines endlichen nicht-modularen Rang-3-Matroids M ist eine projektive Ebene und hat eine abzählbar unendliche Grundmenge.

Beweis. Das Matroid M ist nicht modular, hat also zwei disjunkte Linien, also ein Viereck. Man sieht sofort, dass sich zwei Linien in M^* immer schneiden müssen, M^* ist also eine projektive Ebene. Die Kette der Punkterweiterungen von M kann nur abbrechen, wenn es in der Kette irgendwann ein modulares Matroid gibt, es sei dies das Matroid M_n. Das Matroid M_n muss dann eine endliche projektive Ebene sein, also nach Proposition 2.34 eine endliche begrenzte Konfiguration mit Punkten, die nicht schon in M vorhanden sind. Das kann jedoch nach Satz 2.84 nicht sein, die Kette bricht also nicht ab und alles ist gezeigt. □

Daraus folgt als Korollar:

2.86 Korollar:
Eine freie Ebenenerweiterung M' eines endlichen nicht-modularen Rang-3-Matroids M ist nicht-desarguessch.

Beweis. Da M' eine abzählbar unendliche Grundmenge hat, und eine projektive Ebene ist, hat jede Linie nach Satz 2.28 in M' abzählbar unendlich viele Punkte. Ausserdem gehen durch jeden Punkt abzählbar unendlich viele Linien. Damit lässt sich leicht zeigen, dass M' (Non-)Desargues-Matroide als Untermatroide haben muss mit Punkten, die nicht aus $E(M)$ stammen. Da diese Untermatroide aber keine begrenzten Konfigurationen sein dürfen, müssen es Non-Desargues-Matroide sein. □

Wir betrachten nun aber noch eine etwas allgemeinere Konstruktion, bei dem hier verwendeten Begriff der hyper-freien Ebenenerweiterung beziehen wir uns auf [21]:

2.87 Definition:
Sei M_0 ein endliches Matroid von Rang 3. Wir erweitern M_0 genau wie bei der freien Ebenenerweiterung. Nachdem wir alle disjunkten Linienpaare aus M_0 zum Schnitt gebracht haben, erhalten wir wie oben das Matroid M_n. Diesmal dürfen in dieser Kette zwischen M_0 und M_n (egal wo) aber noch endlich viele andere Erweiterungen hinzukommen, die entweder freie Punkterweiterungen sind, oder in denen einer Linie ein Punkt frei hinzugefügt wird. Nach Korollar 2.62 bleibt auch bei solchen Erweiterungen jedes der noch nicht zum Schnitt gebrachten disjunkten Linienpaare disjunkt. Mit dem Matroid M_n verfahren wir nun wie mit M_0 und so weiter.

Dann ist $M^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ wiederum ein Rang-3-Matroid, welches alle M_i erweitert und heisst eine **hyper-freie Ebenenerweiterung von M_0**.

2.88 Satz:
Falls M_0 nicht-modular ist, ist das so erhaltene Matroid eine nicht-desarguessche projektive Ebene und hat eine abzählbar unendliche Grundmenge.

Beweis. Die Beweise der vorigen Sätze funktionieren für diesen Fall völlig analog. □

Schlussendlich zeigen wir noch den anfangs erwähnten Satz:

2.89 Satz:
Jedes endliche Rang-3-Matroid lässt sich in eine projektive Ebene einbetten.

Beweis. Entweder das Matroid M ist nicht modular, dann bilde man eine freie Ebenenerweiterung. Oder es ist modular, dann ist es entweder schon eine projektive Ebene, wenn nicht, dann füge man zu M einen Punkt frei hinzu und bilde dann wieder eine freie Ebenenerweiterung. □

Die Frage, ob sich jedes endliche Rang-3-Matroid in eine endliche projektive Ebene einbetten lässt, ist bis heute ungelöst und eine der wichtigsten Fragen der projektiven Geometrie.

3 hypermodulare Matroide

3.1 hypermodulare Matroide von allgemeinem Rang

Wir liefern zunächst die Definition eines hypermodularen Matroids:

3.1 Definition:
Ein Matroid M ist **hypermodular**, wenn sich in M jedes Paar von Hyperebenen in einer Hypergeraden schneidet.

Im folgenden wird die Struktur von hypermodularen Matroiden untersucht. Hier erwähnen wir zunächst einige triviale Tatsachen:

3.2 Lemma:
Jedes modulare Matroid ist hypermodular.

Für Matroide von Rang < 4 gilt auch die Umkehrung, wie man sofort sieht:

3.3 Lemma:
Jedes hypermodulare Matroid von Rang < 4 ist modular.

Es folgt eine wichtige Eigenschaft von hypermodularen Matroiden:

3.4 Lemma:
Bei jedem hypermodularen Matroid M von Rang n, ergeben die Kontraktionen von M mit einer Fläche von Rang $n-3$ modulare Matroide von Rang 3.

Beweis. Sei $\mathcal{L}(M)$ der Flächenverband des Matroides M. Jede Kontraktion M/F von M mit einer Fläche F von Rang $n-3$ ergibt nach Satz 2.54 ein Matroid, dessen zugehöriger Flächenverband isomorph zu dem Intervall $[F, 1_M] \subseteq \mathcal{L}(M)$ ist. Da sich jede Hyperebene in einer Hypergeraden schneidet ist dieses Intervall modular von Rang 3. □

Restriktionen von hypermodularen Matroiden können hypermodular bleiben:

3.5 Lemma:
In jedem hypermodularen Matroid H ist ein hypermodulares Matroid H' enthalten, welches folgende Eigenschaft besitzt: Jeder Punkt aus H' liegt auf mindestens einer Linie, die nur aus zwei Punkten besteht. H' ist nicht eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei p ein Punkt aus H, für den diese Bedingung nicht gilt. Wir betrachten eine Fläche F von Rang ≥ 2, die den Punkt p enthält. Es sei $q \in F$ mit $q \neq p$. Dann enthält die Linie $l = cl(p, q)$ noch einen dritten Punkt q' und es gilt: $p \in cl(l \setminus p) \subseteq cl(F \setminus p)$. Es gilt also $r(F \setminus p) = r(F)$. Also ist $F \setminus p$ in der Restriktion $H \setminus p$ nach Proposition 2.55 eine Fläche vom selben Rang wie F in H. Das bedeutet, dass alle Flächen von Rang ≥ 2 in $H \setminus p$ erhalten bleiben und darum bleibt $H \setminus p$ ein hypermodulares Matroid. □

Wir stellen die wichtigsten hypermodularen Matroide vor:

3.6 Korollar:
Jede projektive Geometrie $P(n, q)$ ist ein hypermodulares Matroid und bleibt das auch, wenn man von $P(n, q)$ bis zu $q - 3$ Punkte abzieht.

Beweis. Jede Linie in P hat nach Lemma 2.26 $q + 1$ Punkte und bleibt eine Linie, wenn man $q - 3$ Punkte von ihr entfernt. □

Es folgt eine Charakterisierung des modularen Defekts in hypermodularen Matroiden:

3.7 Proposition:
Sei M ein hypermodulares Matroid von Rang n. Dann ist der modulare Defekt zweier Flächen aus M immer $\leq n - 3$.

Beweis. Den grössten modularen Defekt in einem Matroid haben zwei disjunkte Hyperebenen, es ist dies der modulare Defekt $n - 2$. Alle anderen nicht-modularen Paare eines Matroids haben einen kleineren modularen Defekt. Disjunkte Hyperebenen kommen aber in hypermodularen Matroiden nicht vor. □

3.2 hypermodulare Matroide von Rang 4

Wir beschäftigen uns nun mit dem spezielleren Fall der hypermodularen Matroide von Rang 4. Die erste Proposition folgt direkt aus Satz 2.6.

3.8 Proposition:
Sei M ein Matroid. Angenommen M besitzt zwei disjunkt coplanare Geraden, (welche sich zum Schnitt bringen lassen) dann besitzt M auch ein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar (welches sich zum Schnitt bringen lässt). Dieselbe Aussage gilt auch für einen beliebigen modularen Filter $\mathcal{M}$ in M.

Beweis. Angenommen das Matroid M enthält zwei disjunkt coplanare Linien l_1 und l_2. Dann gibt es nach Satz 2.6 in M eine Hyperebene $h_1 \supseteq l_1$, mit $h_1 \cap l_2 = \emptyset$. In jedem modularen Filter $\mathcal{M}$, der l_1 und l_2 enthält, ist immer der von h_1 und l_2 erzeugte modulare Filter $\mathcal{M}'$ enthalten. Enthält nun $\mathcal{M}$ nicht $\emptyset = l_1 \cap l_2$, dann enthält auch $\mathcal{M}'$ nicht $\emptyset = h_1 \cap l_2$. Nach Lemma 2.61 ist damit alles gezeigt. □

Für hypermodulare Rang-4-Matroide gilt auch die Umkehrung:

3.9 Proposition:
Sei M ein hypermodulares Rang-4-Matroid. Angenommen M besitzt ein disjunktes Geraden-Ebenenpaar. Dann besitzt M auch zwei disjunkt coplanare Geraden. Dieselbe Aussage gilt auch für einen beliebigen modularen Filter $\mathcal{M}$ in M.

Beweis. Sei (l_1, e_1) das disjunkte Geraden-Ebenenpaar in M. Man nehme einen Punkt p aus e_1 und betrachte die Ebene $l_1 \vee p$. Diese Ebene schneidet die Ebene e_1 nach Voraussetzung in einer Linie l_2 in M. Die beiden Linien l_1 und l_2 sind zueinander disjunkt coplanar. Enthält nun ein modularer Filter $\mathcal{M}$ in M das Paar (l_1, e_1) so enthält $\mathcal{M}$ auch die Linie l_2 als Schnittlinie zweier Ebenen aus M. □

Aus diesen beiden Propositionen und aus Proposition 3.7 folgt insgesamt:

3.10 Korollar:
Sei M ein hypermodulares Rang-4-Matroid. Dann ist der modulare Defekt zweier Flächen aus M immer ≤ 1. Wenn M nicht modular ist, so enthält es mindestens ein disjunktes Geraden-Ebenenpaar sowie zwei disjunkt coplanare Linien. Ein modularer Filter in M enthält genau dann ein disjunktes Geraden-Ebenenpaar, wenn er zwei disjunkt coplanare Linien enthält.

Beweis. Die einzigen nicht-modularen Paare von Flächen, die in einem hypermodularen Matroid von Rang 4 vorkommen können, sind disjunkte Geraden-Ebenenpaare oder Paare disjunkt coplanarer Geraden. Alle drei Aussagen ergeben sich hieraus sowie aus den vorherigen drei Propositionen. □

3.3 modulare Filter in hypermodularen Rang-4-Matroiden

Wir beweisen in diesem Kapitel einen wichtigen Satz, der in ähnlicher Form schon von Klaus Metsch in [15], Theorem 2.3, bewiesen wurde, und der zentral für den Beweis von Satz $(ST2)$ ist. Wir betrachten den speziellen Fall der hypermodularen Rang-4-Matroide und zeigen zunächst ein wichtiges Lemma:

3.11 Lemma:
Seien l_1, l_2 zwei disjunkt coplanare Linien in einem hypermodularen Rang-4-Matroid M. Dann kann die Grundmenge T des Matroids M in Linien partitioniert werden, von denen jede jeweils disjunkt coplanar zu l_1 und zu l_2 ist.

Beweis. Wir setzen $e = cl(\{l_1 \cup l_2\})$. Dann ist $l_p := (l_1 \vee p) \wedge (l_2 \vee p)$ eine Linie für jeden Punkt $p \in T \setminus e$ und coplanar zu l_1 und l_2. Wegen Proposition 2.11 muss l_p disjunkt zu l_1 und l_2 sein. Für $p \neq q \in T \setminus e$ folgt daraus und aus Proposition 2.11, dass entweder $l_p \wedge l_q = 0$ oder $l_p = l_q = p \vee q$ ist. Wir bezeichnen die auf diesem Weg konstruierte Linienmenge mit Δ.

Nun fixieren wir eine Linie l_{p^*} für ein $p^* \in T \setminus e$, und für alle $r \in e \setminus (l_1 \cup l_2)$ bezeichnen wir mit l_r die Linie $l_r = (l_{p^*} \vee r) \wedge (l_1 \vee l_2)$. Dann muss l_r disjunkt zu l_1 und l_{p^*} sein, da sonst die Linien l_1, l_r und l_{p^*} der Proposition 2.11 widersprechen würden. Analog dazu muss l_r zu l_2 disjunkt sein. Wenn nun $r, s \in e \setminus (l_1 \cup l_2)$ sind, dann zeigt Proposition 2.11, angewendet auf das Tripel l_r, l_s, l_{p^*}, dass $l_r \wedge l_s = 0$ oder $l_s = l_r$ ist. Wir bezeichnen die so konstruierte Linienmenge mit Σ.

Proposition 2.11, angewendet auf das Tripel l_1, l_r, l_q liefert schlussendlich, dass jede Linie $l_r \in \Sigma$ disjunkt zu jeder Linie $l_q \in \Delta$ ist. Insgesamt partitionieren die Linien aus $\Delta \cup \Sigma \cup l_1 \cup l_2$ die Grundmenge von M. Für jeden Punkt $r \in E(M)$ bezeichnen wir im folgenden mit l_r die Linie aus der Partition, die r enthält. □

3.12 Korollar:
Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11 enthält jeder modulare Filter, der zwei disjunkt coplanare Linien l_1 und l_2 enthält, eine Partition der Grundmenge M mit zu l_1 und l_2 jeweils disjunkt coplanaren Linien.

Beweis. Alle Linien in der Partition von Lemma 3.11 entstehen als Schnittlinien von Ebenen, die die beiden Linien l_1 und l_2 enthalten und befinden sich daher in dem von l_1 und l_2 erzeugten modularen Filter. □

Mit diesen Voraussetzungen können wir nun den eingangs erwähnten Satz zeigen:

3.13 Satz:
(i) Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11 existiert eine Punkterweiterung, in der l_1 und l_2 zum Schnitt gebracht werden, genau dann, wenn alle Linien in der Partition des Beweises von Lemma 3.11 paarweise coplanar sind.
(ii) Wenn eine Punkterweiterung M' wie in (i) existiert, dann bleibt die Restriktion einer Linie aus M' auf M eine Linie.
(iii) Ansonsten enthält M zwei nicht-coplanare Linien l_3, l_4, so dass l_i und l_j für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{3,4\}$ coplanar sind, und keine drei von ihnen in einer Ebene liegen, d.h. es enthält das Vámos-Matroid, in dem l_1 und l_2 als Restriktion enthalten ist.

Beweis. (i) Nach Korollar 3.12 enthält der von l_1 und l_2 erzeugte modulare Filter $\mathcal{M}_{l_{12}}$ auch die in Lemma 3.11 konstruierte Linienpartition der Grundmenge des Matroids. Wären zwei dieser Linien l_3 und l_4 nicht zueinander coplanar, dann würden sie ein modulares Paar bilden mit $l_3 \cap l_4 = \emptyset$. Dann würde $\mathcal{M}_{l_{12}}$ auch die leere Menge enthalten und l_1 und l_2 könnten in M nach Lemma 2.64 nicht zum Schnitt gebracht werden.

Wenn auf der anderen Seite alle Linien der Partition paarweise coplanar sind, zeigen wir nun, dass sie die minimalen Elemente eines modularen Filters sind. Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller Flächen, die Obermengen dieser Linien sind. Zunächst liegen mit $X \in \mathcal{M}$ auch alle Obermengen von X, die Flächen sind, in $\mathcal{M}$.

Jedes Paar von Linien aus $\mathcal{M}$ ist disjunkt coplanar, bildet also kein modulares Paar. Seien nun $h_1 \neq h_2$ zwei Ebenen aus $\mathcal{M}$. Es sei $l = h_1 \wedge h_2$ und $p \neq q$ seien zwei Punkte aus l. Für $i \in \{1,2\}$ ist die Ebene h_i dann direkt Obermenge der Linie l_p oder sie ist Obermenge einer anderen Linie l' und enthält den Punkt p. Da aber l' und l_p zueinander coplanar sein müssen, gilt dann $h_i = l' \vee p = l' \vee l_p$, also gilt in jedem Fall $l_p \leq h_i$ und analog dazu $l_q \leq h_i$. Das bedeutet, dass $l_p = l_q = p \vee q = l$. Die Linie l liegt also in $\mathcal{M}$.

Man betrachte am Schluss eine Ebene h und eine Linie l aus $\mathcal{M}$. Wenn diese ein modulares Paar bilden, dann müssen sie sich in einem Punkt r schneiden. Die Linie $l = l_r$ muss dann aus dem selben Grund wie oben in der Ebene h enthalten sein. Für alle modularen Paare (X, Y) aus $\mathcal{M}$ liegt also auch $X \cap Y$ in $\mathcal{M}$. Insgesamt ist $\mathcal{M}$ ein modularer Filter, der nicht $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ enthält, die beiden Linien können also nach Lemma 2.61 zum Schnitt gebracht werden.

(ii) Sei p der neue Punkt und l eine Linie, die p enthält. Sei q ein anderer Punkt auf l. Dann ist die Restriktion von l auf M die Linie l_q aus dem Beweis von Lemma 3.11.

(iii) Aus (i) folgt, dass es in der Partition des Beweises von Lemma 3.11 zwei Linien l_3 und l_4 gibt, die nicht coplanar sind, es bleibt zu zeigen, dass $\{l_3, l_4\} \subseteq \Delta$.

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $l_3 = l_r \in \Sigma$ und somit $l_4 = l_q \in \Delta$. Da l_{p^*} und l_3 coplanar sind schliessen wir, dass $l_{p^*} \neq l_4$. Wenn l_{p^*} und l_4 nicht coplanar sind, ersetzen wir l_3 durch l_{p^*} und sind fertig, somit können wir annehmen, dass sie coplanar sind. Die Ebenen $l_4 \vee r, l_{p^*} \vee r$ schneiden sich in der Linie $l'_3 = (l_4 \vee r) \wedge (l_{p^*} \vee r)$. Aus $l'_3 \leq e$ würde folgen, dass $l'_3 \leq (l_{p^*} \vee r) \wedge (l_1 \vee l_2) = l_r = l_3$, also $l_3 = l'_3 \leq l_4 \vee r$ im Widerspruch dazu, dass l_3 und l_4 nicht coplanar sind. Somit schneidet l'_3 die Ebene e nur in r. Darüberhinaus muss wegen Proposition 2.11 die Linie l'_3 disjunkt zu l_{p^*} und l_4 sein. Wir wählen ein p' auf l'_3, welches nicht auf e liegt, und bilden $l''_3 := l_{p'} \in \Delta$. Wir behaupten, dass $l_{p'}$ zu mindestens einer der Linien l_{p^*} und l_4 nicht coplanar sein kann. Sonst erhielten wir:

$$l''_3 = (l_{p^*} \vee l_{p'}) \wedge (l_4 \vee l_{p'}) = (l_{p^*} \vee p') \wedge (l_4 \vee p') = (l_{p^*} \vee l'_3) \wedge (l_4 \vee l'_3) = l'_3$$

was unmöglich ist, da $l''_3 \in \Delta$ disjunkt zu e sein muss. □

Als nächstes zeigen wir zwei kleine allgemeine Propositionen über Hauptfilter:

3.14 Proposition:
Es sei M ein Matroid und es sei $\mathcal{M}$ ein modularer Filter in M, der einen Punkt p enthält. Dann ist $\mathcal{M}$ ein Hauptfilter.

Beweis. Entweder $\mathcal{M}$ ist der von p erzeugte Hauptfilter oder $\mathcal{M}$ enthält mindestens ein Element x, welches p nicht enthält. Dann ist (x, p) ein modulares Paar und $\mathcal{M}$ enthält $\emptyset$ ist also der von $\emptyset$ erzeugte Hauptfilter. □

3.15 Proposition:
Es sei M ein Matroid, $\mathcal{M}$ ein modularer Filter in M, der kein Hauptfilter ist, und es seien l_1 und l_2 zwei verschiedene Linien aus $\mathcal{M}$. Dann sind l_1 und l_2 zueinander disjunkt coplanar.

Beweis. Würden sich die beiden Linien in einem Punkt p schneiden, dann enthielte $\mathcal{M}$ den Punkt p, wäre also nach Proposition 3.14 ein Hauptfilter. Wären die beiden Linien nicht zueinander coplanar, dann enthielte M die leere Menge und wäre auch ein Hauptfilter. □

Abschliessend zeigen wir noch ein Lemma, welches die modularen Filter in hypermodularen Rang-4-Matroiden charakterisiert:

3.16 Lemma:
Es sei $\mathcal{M}$ ein modularer Filter in einem hypermodularen Rang-4 Matroid M. Dann ist $\mathcal{M}$ entweder ein Hauptfilter, oder er enthält zwei disjunkt coplanare Linien.

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ kein Hauptfilter. Dann enthält $\mathcal{M}$ nach Proposition 3.14 keine Punkte und auch nicht die leere Menge.

Angenommen $\mathcal{M}$ enthielte keine Linien, dann müsste $\mathcal{M}$ zwei verschiedene Ebenen e_1 und e_2 enthalten. Diese beiden Ebenen schneiden sich aber in einer Linie, die dann auch in $\mathcal{M}$ liegen müsste, was nicht sein darf.

Angenommen $\mathcal{M}$ enthielte nur eine Linie l. Dann müsste $\mathcal{M}$ eine Ebene e enthalten, die die Linie l nicht enthält. e müsste zu l disjunkt sein, da sonst der Schnittpunkt von e und l in $\mathcal{M}$ läge, was nicht sein darf. Nach Proposition 3.9 enthielte dann $\mathcal{M}$ aber auch zwei disjunkt coplanare Linien, was nicht sein darf.

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{M}$ zwei verschiedene Linien enthalten muss, nach Proposition 3.15 sind diese beiden Linien zueinander disjunkt coplanar. □

3.4 Punktkontraktionen und Ebenen von Rang-4-Matroiden

Aus den folgenden Lemmata lassen sich viele strukturelle Eigenschaften von hypermodularen Rang-4-Matroiden herleiten. Zunächst zeigen wir ein Lemma über die Kontraktion von Rang-4-Matroiden allgemein:

3.17 Lemma:
Es sei H sei ein Matroid von Rang 4. Sei e eine Ebene von H und $E = H|e$ die Restriktion von H auf e. Sei p ein Punkt aus $H \setminus e$ und $E_p = H/p$ die Kontraktion von H durch den Punkt p, ein Rang-3-Matroid. Dann ist E eine Restriktion von E_p.

Beweis. Da E_p die Grundmenge $H \setminus \{p\}$ hat, liegen alle Punkte aus E auch in E_p. Sei $X \subseteq e$, dann gilt $r_H(X \cup \{p\}) = r_H(X) + 1$, da p nicht in $cl_H(X) \subseteq e$ liegt. Dann gilt nach Lemma 2.53: $r_{E_p}(X) = r_H(X \cup \{p\}) - r_H(p) = r_H(X)$. Damit ist alles gezeigt. □

Nun folgt ein spezielleres Lemma für hypermodulare Matroide:

3.18 Lemma:
Es gelten die selben Voraussetzungen wie in Lemma 3.17. Zudem sei H ein hypermodulares Matroid. Dann ist die Restriktion einer Linie aus E_p in E auch schon eine Linie. Jeder Punkt aus E ist in E in genauso vielen Linien enthalten, wie in E_p.

Beweis. Sei l_1 eine Linie in E_p, dann ist $2 = r_{E_p}(l_1) = r_H(l_1 \cup p) - r_H(p) = r_H(l_1 \cup p) - 1$, also ist $cl_H(l_1 \cup p)$ eine Ebene in H, die sich mit der Ebene e in einer Linie l_2 schneidet. Dann gilt auch, da $p \notin e$, dass $cl_{E_p}(l_2) = cl_H(l_2 \cup p) \setminus p = cl_H(l_1 \cup p) \setminus p = cl_{E_p}(l_1) = l_1$, das heisst dass l_2 in l_1 liegt, was zu zeigen war. Die anderen Aussagen folgen direkt. □

Wir folgern hier noch eine bekannte Aussage für projektive Geometrien:

3.19 Lemma:
Es gelten die selben Voraussetzungen wie in Lemma 3.17. Zudem sei H eine projektive Geometrie $P(3, K)$. Dann gibt es zu jedem Punkt $q \in E_p$ einen Punkt $q' \in E$ mit $cl_{E_p}(q') = cl_{E_p}(q)$. Für jeden Punkt q aus E_p gibt es also schon einen Punkt aus E, der in E_p zu q parallel ist.

Beweis. Da $P(3, K)$ ein modulares Matroid ist, schneidet sich jede Linie, die den Punkt p enthält, mit der Ebene e in einem Punkt. Der Rest folgt völlig analog zu dem Beweis von Lemma 3.18. □

Es ergibt sich als Korollar:

3.20 Korollar:
Alle Punktkontraktionen einer projektiven Geometrie P(3,K) sind desarguessche projektive Ebenen.

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass alle Ebenen von $P(3, K)$ desarguessche projektive Ebenen sind. Da es zu jedem Punkt p in $P(3, K)$ eine Ebene E gibt, die p nicht enthält, sind auch die Punktkontraktionen $P(3, K)/p$ desarguessche projektive Ebenen, da sie nach Lemma 3.17 Erweiterungen der Ebenen E sind und nach Lemma 3.19 keine neuen Punkte haben (abgesehen von parallelen Punkten). □

4 Hauptfilter-Matroide

4.1 der allgemeine Fall

Wir definieren zunächst:

4.1 Definition:
Ein Hauptfilter-Matroid ist ein Matroid, in dem jeder modulare Filter (bis auf den leeren modularen Filter) ein Hauptfilter ist.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Hauptfilter-Matroide genau die Matroide sind, in denen kein Paar von Flächen zum Schnitt gebracht werden kann. Wir beginnen mit einer kleinen Proposition:

4.2 Proposition:
Sei M ein Matroid. Seien X, Y Flächen aus M. Der von X und Y erzeugte modulare Filter $\mathcal{M}$ sei ein Hauptfilter. Dann ist M der von $X \cap Y$ erzeugte modulare Filter.

Beweis. Sei $\mathcal{M}'$ der von $X \cap Y$ erzeugte modulare Filter. Zunächst enthält $\mathcal{M}'$ die Flächen X und Y, also auch den von X und Y erzeugten modularen Filter $\mathcal{M}$. Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$. $\mathcal{M}$ sei nach Voraussetzung ein Hauptfilter. Das heisst, es gibt ein Element $X' \in \mathcal{M}$, für das $X' \subseteq X$ und $X' \subseteq Y$ gilt. Also gilt auch $X' \subseteq X \cap Y$, also liegt $X \ \cap Y$ auch in $\mathcal{M}$. Der von $X \cap Y$ erzeugte modulare Filter $\mathcal{M}'$ ist also auch in $\mathcal{M}$ enthalten. Es gilt: $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$. Die beiden modularen Filter sind identisch. □

Wir formulieren nun die wichtigste Aussage dieses Abschnitts:

4.3 Lemma:
Sei M ein Matroid. Folgende zwei Aussagen sind äquivalent:

(1) M ist ein Hauptfilter-Matroid.
(2) Kein Paar von Flächen in M kann zum Schnitt gebracht werden.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es sei M' eine beliebige Punkterweiterung M. Wenn (1) gilt, ist M' die Punkterweiterung einer Fläche von M in allgemeiner Lage oder die Erweiterung von M mit einem Coloop. Nach Korollar 2.62 und Korollar 2.63 wird dann in M' kein Flächenpaar aus M zum Schnitt gebracht. Es gilt (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiger modularer Filter von Flächen aus M, der kein Hauptfilter ist. Sei X eine Fläche minimalen Ranges aus $\mathcal{M}$. So eine Fläche lässt sich aufgrund der Endlichkeit der Rangfunktion von M immer finden. Keine echte Teilmenge von X liegt in $\mathcal{M}$.

Sei $\mathcal{M}_1$ der von X erzeugte Hauptfilter in M. Er ist in $\mathcal{M}$ enthalten. Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}_1$. Sie ist nach Voraussetzung nicht leer. Aus dieser Menge wählen wir wieder ein Y, welches minimalen Rang in $\mathcal{M}_2$ hat. Es gilt, dass $X \nsubseteq Y$. Daraus folgt, dass $X \cap Y$ eine echte Teilmenge von X sein muss und deshalb nicht in $\mathcal{M}$ liegt.

$\mathcal{M}$ enthält also X und Y jedoch nicht $X \cap Y$, das heisst, dass das Paar (X, Y) nach Lemma 2.61 zum Schnitt gebracht werden kann. □

Daraus folgt wegen Korollar 2.65 sofort ein Lemma:

4.4 Lemma:
Jedes modulare Matroid ist ein Hauptfilter-Matroid.

Für Matroide von Rang < 4 gilt auch die Umkehrung, wie man sofort sieht:

4.5 Lemma:
Jedes Hauptfilter-Matroid von Rang < 4 ist modular.

Ob und wann die Umkehrung dieses Lemmas für höhere Ränge gilt, ist eine Frage, mit der wir uns in dieser Arbeit noch ausgiebig beschäftigen werden. Ausserdem gilt noch folgendes Lemma:

4.6 Lemma:
Sei M ein Hauptfilter-Matroid. Dann ist M auch ein hypermodulares Matroid.

Beweis. Angenommen, es gäbe ein Hyperebenenpaar (h_1, h_2) aus M, welches sich nicht in einer Hypergeraden schneidet. Dann wäre (h_1, h_2) ein nicht-modulares Paar von Flächen und der von h_1 und h_2 erzeugte modulare Filter enthielte ausser diesen beiden Flächen nur noch die Grundmenge des Matroids, wäre also kein Hauptfilter. □

Für die Intersection-Properties bei Hauptfilter-Matroiden gilt:

4.7 Lemma:
Sei M ein Hauptfilter-Matroid. Wenn eine der Intersection-Properties in M gilt, dann gelten alle Intersection-Properties und M ist modular.

Beweis. Angenommen M sei modular, dann gelten alle Intersection-Properties trivialerweise. Angenommen M sei nicht modular, dann gibt es nach Lemma 2.41 in M ein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar. Wegen Lemma 4.3 kann dieses Paar nicht zum Schnitt gebracht werden, also gilt die IP_3 nicht, also auch keine der anderen Intersection Properties. □

Wie sich die Bundle-Condition an dieser Stelle verhält ist eine offene Frage.

4.2 Kontraktionen von Hauptfilter-Matroiden

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass die Kontraktion eines Hauptfilter-Matroids wieder ein Hauptfilter-Matroid ist. Zunächst brauchen wir einige Vorbereitungen.

4.8 Proposition:
Sei M ein Matroid und $\mathcal{A}$ eine Menge von Flächen aus M, die alle eine Fläche A enthalten. Dann enthalten alle Elemente des von $\mathcal{A}$ erzeugten modularen Filters die Fläche A.

Beweis. Obermengen von Mengen sowie Schnittmengen zweier Mengen, die die Fläche A enthalten, enthalten auch die Fläche A. □

4.9 Proposition:
Sei M ein Matroid und M/A die Kontraktion von M durch eine Fläche A aus M. Es sei $A \subseteq X \subseteq E(M)$. Dann ist $X \setminus A$ eine Fläche in der Kontraktion M/A genau dann, wenn X eine Fläche in M ist.

Beweis. Wenn X eine Fläche in M ist, die A enthält, dann ist $cl_{M/A}(X \setminus A) = cl_M((X \setminus A) \cup A) \setminus A = cl_M(X) \setminus A = X \setminus A$. Also ist $X \setminus A$ auch eine Fläche in M/A. Wenn umgekehrt X eine Fläche in M/A ist, so gilt $X \cup A = cl_{M/A}(X) \cup A = (cl_M(X \cup A) \setminus A) \cup A = cl_M(X \cup A)$, daraus folgt, dass $X \cup A$ dann auch eine Fläche in M sein muss. □

4.10 Proposition:
Sei M ein Matroid und M/A die Kontraktion von M durch eine Fläche A aus M. Es seien (X, Y) ein Paar von Mengen aus M, die beide die Fläche A enthalten, dann sind die modularen Defekte von (X, Y) in M und von $(X \setminus A, Y \setminus A)$ in M/A gleich.

Beweis. Es gilt nach Lemma 2.53, dass $r_{M/A}(X \setminus A) = r_M(X) - r_M(A)$ und analog für $Y, X \cup Y$ und $X \cap Y$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\delta_M(X, Y) = r_M(X) + r_M(Y) - r_M(X \cup Y) - r_M(X \cap Y) = \\
&r_{M/A}(X \setminus A) + r_M(A) + r_{M/A}(Y \setminus A) + r_M(A) - \\
&r_{M/A}((X \cup Y) \setminus A) - r_M(A) - r_{M/A}((X \cap Y) \setminus A) - r_M(A) = \\
&r_{M/A}(X \setminus A) + r_{M/A}(Y \setminus A) - r_{M/A}((X \cup Y) \setminus A) - r_{M/A}((X \cap Y) \setminus A) = \\
&\delta_{M/A}(X \setminus A, Y \setminus A).
\end{aligned}$$

□

Hieraus folgt:

4.11 Lemma:
Sei M ein Matroid und M/A die Kontraktion von M mit einer Fläche A aus M. Es sei $\mathcal{M}_1$ ein modularer Filter, der nur Flächen enthält, die A enthalten bzw. $\mathcal{M}_2$ sei ein modularer Filter von Flächen in M/A.

Dann sind $\mathcal{M}_1' = \{X \setminus A | X \in \mathcal{M}_1\}$ bzw. $\mathcal{M}_2' = \{X \cup A | X \in \mathcal{M}_2\}$ modulare Filter in M/A bzw. M.

Beweis. Es sei $X \in \mathcal{M}_1$, also $X \setminus A \in \mathcal{M}_1'$ und es sei $Y \supseteq X \setminus A$ eine weitere Fläche aus M/A. Dann ist $Y \cup A$ nach Proposition 4.9 eine Fläche in M und es gilt $Y \cup A \supseteq (X \setminus A) \cup A = X$. Also liegt $Y \cup A$ auch in $\mathcal{M}_1$ und somit $Y = (Y \cup A) \setminus A$ in $\mathcal{M}_1'$, was zu zeigen war.

Es seien nun (X, Y) ein Paar von Flächen in $\mathcal{M}_1$ und $(X \setminus A, Y \setminus A)$ ein modulares Paar von Flächen in $\mathcal{M}_1'$. Dann ist nach Proposition 4.10 (X, Y) auch ein modulares Paar von Flächen in $\mathcal{M}_1$, also liegt $X \cap Y$ auch in $\mathcal{M}_1$. Daraus folgt, dass auch $(X \cap Y) \setminus A = (X \setminus A) \cap (Y \setminus A)$ in $\mathcal{M}_1'$ liegt, insgesamt folgt, dass $\mathcal{M}_1'$ ein modularer Filter ist. Der zweite Fall folgt komplett analog. □

Und es folgt unser Endergebnis:

4.12 Satz:
Es sei M ein Hauptfilter-Matroid, dann ist jede Kontraktion von M auch ein Hauptfilter-Matroid.

Beweis. Man betrachte einen nicht-leeren modularen Filter $\mathcal{M}$ in einer Kontraktion M/A. Dann ist $\mathcal{M}' = \{X \cup A | X \in \mathcal{M}\}$ nach Lemma 4.11 ein modularer Filter in M und ein Hauptfilter. Er wird also von einem Element X' erzeugt, welches A enthält. Das Element $X' \setminus A$ liegt in $\mathcal{M}$.

Es sei nun Y ein beliebiges Element aus $\mathcal{M}$. Dann liegt $Y \cup A$ in $\mathcal{M}'$ und ist Obermenge von X'. Dann gilt aber auch $Y = (Y \cup A) \setminus A \supseteq X' \setminus A$. Alle Flächen in $\mathcal{M}$ sind also Obermengen von $X' \setminus A \in \mathcal{M}$, das bedeutet, dass $\mathcal{M}$ ein Hauptfilter ist. □

4.3 Hauptfilter-Matroide von Rang 4

Im speziellen Fall von Rang 4 lässt sich über Hauptfilter-Matroide schon einiges mehr sagen: Aus der Tatsache, dass solche Matroide immer hypermodular sind, folgt direkt folgender wichtiger Satz:

4.13 Satz:
Sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Seien l_1, l_2 zwei disjunkt coplanare Linien aus M. Denn enthält M zwei weitere nicht-coplanare Linien l_3, l_4, so dass l_i, l_j für alle $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{3, 4\}$ coplanar sind und keine von ihnen in einer Ebene liegen, d.h., es enthält das Vámos-Matroid, in dem l_1 und l_2 als Restriktion enthalten ist.

Beweis. Nach Lemma 4.6 ist M ein hypermodulares Rang-4-Matroid und die Behauptung folgt aus Satz 3.13 (iii), da l_1 und l_2 nach Lemma 4.3 nicht zum Schnitt gebracht werden können. □

Und sofort ergibt sich noch folgendes Korollar:

4.14 Korollar:
Sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Wenn in M die Bundle-Condition gilt, dann ist M ein modulares Matroid.

Beweis. M ist nach Lemma 4.6 ein hypermodulares Rang-4-Matroid. Angenommen M ist nicht modular. Dann enthält M nach Korollar 3.10 zwei disjunkt coplanare Linien, nach Satz 4.13 enthält dann M das Vámos-Matroid als Restriktion, die Bundle-Condition ist also verletzt. Dieses Korollar hätte man auch direkt aus Lemma 4.7 und aus der Äquivalenz der Gültigkeit der Bundle-Condition und aller Intersection-Properties bei Rang-4-Matroiden folgern können. □

5 Lokale Projektivität

Die Eigenschaft der lokalen Projektivität eines Rang-4-Matroids (dass alle Punktkontraktionen projektive Ebenen ergeben) wurde in der Literatur viel beachtet und analysiert. Die lokale Projektivität spielt auch in der Theorie der Möbiusebenen eine grosse Rolle. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass hypermodulare Matroide bis auf einige Ausnahmen lokal projektiv sind, ein Beweis für diese Tatsache in einem allgemeineren Fall findet sich in [5], allerdings mit etwas anderen Begrifflichkeiten, wir zeigen die Aussage hier für unseren speziellen Fall noch einmal mit einer anderen Argumentation.

5.1 lokale Projektivität und hypermodulare Matroide

Wir beginnen mit folgender Definition, welche in der Literatur z.B. in [16] benutzt wurde:

5.1 Definition:
Ein Matroid M von Rang 4 heisst **lokal projektiv**, wenn jede Punktkontraktion des Matroids eine projektive Ebene ist.

Dazu zeigen wir zuerst ein wichtiges Lemma:

5.2 Lemma:
In einem lokal projektiven Rang-4-Matroid M schneidet sich kein Ebenenpaar nur in einem Punkt.

Beweis. Angenommen, es gäbe ein solches Ebenenpaar, welches sich in nur einem Punkt p schneidet, dann betrachte man das Intervall $[p, 1]$ des Matroids. Hier gäbe es dann disjunkte Linien. Es wäre also keine projektive Ebene. □

Wir werden uns im folgenden mit der Frage beschäftigen, ob hypermodulare Rang-4-Matroide lokal projektiv sind. Dies stimmt nicht immer, man betrachte z.B. die direkte Summe eines modularen Rang-3-Matroids mit einem Punkt, sowie die direkte Summe zweier Linien (einen Tetraeder). Dies sind offensichtlich hypermodulare Rang-4-Matroide, da sie auch modulare Matroide sind, bei denen nicht alle Punktkontraktionen projektive Ebenen sind. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass dies die einzigen Ausnahmen sind. Zur Vorbereitung brauchen wir einige Propositionen und Lemmata.

5.3 Proposition:
Eine Linie in einem Matroid von Rang 4 ist Schnittlinie von mindestens zwei Ebenen.

Beweis. Sei l_1 die Linie und p_1 ein weiterer Punkt des Matroides, der nicht auf l_1 liegt und den es gibt, da das Matroid von Rang 4 ist. $l_1 \vee p_1$ ist eine Ebene. Sei p_2 ein weiterer Punkt des Matroides, der nicht auf $l_1 \vee p_1$ liegt. Auch einen solchen Punkt muss es geben, da das Matroid von Rang 4 ist. Dann schneiden sich die beiden Ebenen $l_1 \vee p_2$ und $l_1 \vee p_1$ in der Linie l_1. □

5.4 Lemma:
Sei e eine Ebene eines Matroids M, die ein Viereck besitzt, und sei l eine Linie aus e. Dann gibt es zwei Punkte auf l, die mit zwei anderen Punkten aus e ein Viereck bilden. Wenn l nur zwei Punkte hat, dann gibt es in e eine weitere Linie, die l nicht schneidet.

Beweis. Da e eine Ebene ist, gibt es noch einen weiteren Punkt p auf e, der nicht auf l liegt. Man nehme zwei beliebige Punkte p_1 und p_2 auf l. Es sei $l_1 = cl_M(p_1, p)$, sowie $l_2 = cl_M(p_2, p)$. Entweder es gibt einen weiteren Punkt q in e, der auf nicht auf einer der Linien l, l_1 oder l_2 liegt, dann bilden p_1, p_2, p und q das gewünschte Viereck. Oder aber alle anderen Punkte von e liegen auf den Linien l, l_1 oder l_2. Dann müssen mindestens zwei dieser drei Linien mindestens drei Punkte enthalten. Ansonsten hätte e nämlich kein Viereck.

Fall 1: l_1 enthält noch zusätzlich den Punkt p' und l_2 den Punkt p''. Dann bilden die Punkte p_1, p_2, p' und p'' das gewünschte Viereck.

Fall 2: l_1 enthält noch zusätzlich den Punkt p' und l den Punkt p''. Dann bilden die Punkte p_2, p', p, p'' das gewünschte Viereck. Der Fall, dass l und l_2 mindestens drei Punkte enthalten, läuft analog.

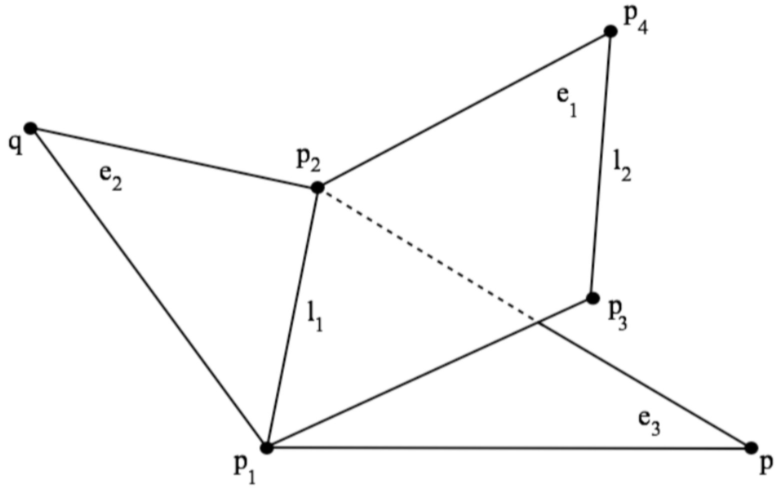
Die letzte Aussage des Lemmas folgt direkt. □

5.5 Lemma:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, welches keine Ebenen hat, in denen es ein Viereck gibt. Dann ist H modular und die Summe zweier Linien.

Beweis. Wenn es in H keine Ebenen gibt, in der es ein Viereck gibt, dann bedeutet das, dass sich in H alle coplanaren Linien schneiden. Dann gibt es nach Proposition 3.9 in H auch keine disjunkten Geraden-Ebenenpaare, H ist also ein modulares Matroid. Nach Satz 2.50 muss es die Summe zweier Linien sein. □

5.6 Lemma:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, welches nur eine Ebene e_1 hat, in der es ein Viereck gibt. Dann ist H die Summe dieser Ebene e_1 mit einem Punkt. Ausserdem ist H modular.

Beweis. Angenommen es gäbe zwei Punkte p und q in H ausserhalb von e_1. Dann wähle man eine Linie l_1 aus e_1 so dass $e_2 = l_1 \vee q \neq l_1 \vee p = e_3$ ist, eine solche Linie findet man immer, weil e_1 ein Viereck hat. Es seien p_1 und p_2 zwei Punkte aus der Linie l_1. Es gibt wegen Lemma 5.4 eine Linie l_2 aus e_1, mit zwei Punkten p_3 und p_4, so dass p_1, p_2, p_3 und p_4 ein Viereck bilden. Wir betrachten folgende Situation:



Fall 1: Die Linie l_1 hat nur zwei Punkte.

Die Linie l_2 spannt mit dem Punkt p eine Ebene e_4 auf, die sich mit e_3 in dem Punkt p schneidet. Sie muss sich aber auch mit e_3 in einer Linie l schneiden. Die Linie l muss noch mindestens einen zweiten Punkt p' haben. Dieser Punkt p' kann aber auch nicht auf einer der Linien $cl_H(p_1, p)$ oder $cl_H(p_2, p)$ liegen. Er kann auch nicht auf l_1 liegen, da l_1 nur zwei Punkte hat. Die Punkte p_1, p_2, p und p' bilden ein Viereck auf e_3.

Fall 2: Die Linie l_1 hat mindestens noch einen dritten Punkt p_2'.

Man betrachte die Ebenen $e_4 = cl_H(q, p_1, p_3)$ und $e_5 = cl_H(q, p_1, p_4)$. Beide Ebenen sind verschieden und schneiden die Ebene e_3 in dem Punkt p_1 also müssen sie diese auch in jeweils einer Linie schneiden. Diese beiden Linien müssen aber verschieden sein und können zudem nicht die Linie l_1 sein. Es gehen also in e_3 ausser der Linie l_1 noch zwei andere Linien durch den Punkt p_1. Man nehme die Punkte p_1, p_2 und p_2' von l_1 und von den anderen beiden Linien jeweils noch einen Punkt, der verschieden von p_1 ist. In diesen fünf Punkten ist immer ein Viereck enthalten.

Es gibt also eine weitere Ebene mit einem Viereck, was nicht sein darf. Insgesamt ergibt sich in jedem Fall, dass H die direkte Summe der Ebene e_1 mit einem Punkt p sein muss.

Angenommen die Restriktion von H auf e_1 wäre kein modulares Matroid, dann gäbe es zwei disjunkt coplanare Linien l_1 und l_2 in e_1. Die Ebenen $l_1 \vee p$ und $l_2 \vee p$ würden sich dann aber nur in dem Punkt p schneiden, was nicht sein darf. Also ist $H|e_1$ und damit auch H ein modulares Matroid. $\square$

5.7 Lemma:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, welches eine Ebene e_1 hat, in der es ein Viereck gibt. H sei nicht die Summe dieser Ebene e_1 mit einem Punkt. Dann existiert in jeder Ebene aus H ein Viereck.

Beweis. Man betrachte eine beliebige Ebene e_2 verschieden von e_1. Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Linie l_2. Da H nicht die Summe von e_1 mit einem Punkt ist, gibt es zwei Punkte p und q ausserhalb von e_1. Entweder einer dieser beiden Punkte liegt nicht auf der Ebene e_2, dann ist die selbe Konstellation wie im Beweis von Lemma 5.6 gegeben, und e_2 enthält ein Viereck, was zu zeigen war.

Bleibt noch der Fall, dass beide Punkte p und q auf e_2 liegen. Angenommen die Linie l_2 hat mindestens drei Punkte, dann ist in drei Punkten aus l_2 und den Punkten p und q immer ein Viereck enthalten. Angenommen l_2 hat nur zwei Punkte. Dann gibt es nach Lemma 5.4 eine weitere Linie l_3 auf der Ebene e_1, die l_2 (und damit auch die Ebene e_2) nicht schneidet. Die Ebenen $l_3 \vee p$ und e_2 schneiden sich in einer Linie l', die die Linie l_2 nach Proposition 2.11 auch nicht schneiden darf. In den Punkten der Linie l' und der Linie l_2 ist ein Viereck enthalten. □

Wir zeigen noch ein kurzes Korollar:

5.8 Korollar:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, welches zwei Ebenen besitzt, die ein Viereck enthalten. Dann existiert in jeder Ebene von H ein Viereck.

Beweis. Man nehme eine Ebene e in H, die ein Viereck besitzt. Dann kann H aber auch nicht die Summe von e mit einem Punkt sein, da es dann keine weitere Ebene mit einem Viereck gäbe, nach Lemma 5.7 ist damit alles gezeigt. □

5.9 Lemma:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, in dem in jeder Ebene ein Viereck existiert. Seien p und q zwei beliebige Punkte aus H. Dann gibt es eine Ebene in H, die diese beiden Punkte nicht enthält.

Beweis. Man betrachte die Linie $l = p \vee q$. Sie ist nach Proposition 5.3 Schnittlinie zweier Ebenen e_1 und e_2 in H.

Angenommen l habe drei Punkte, also noch einen weiteren Punkt q'. In e_1 gibt es noch einen weiteren Punkt p', der nicht auf l liegt. Dann ist die Linie $l' = p' \vee q'$ Schnittlinie zweier Ebenen, das heisst es gibt noch eine weitere Ebene e_3, die e_1 in der Linie l' schneidet. Diese Ebene enthält p und q nicht.

Angenommen l habe nur die zwei Punkte p und q. Da e_1 nach Voraussetzung ein Viereck hat, gibt es nach Lemma 5.4 eine zu l coplanare Linie l' in e_1, die p und q nicht enthält. Diese Linie ist nach Proposition 5.3 Schnittlinie zweier Ebenen, das heisst es gibt noch eine weitere Ebene e_3, die e_1 in der Linie l' schneidet. Diese Ebene enthält p und q nicht. □

Nun kommen wir zum wichtigsten Satz dieses Abschnitts:

5.10 Satz:
Sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid, in dem in jeder Ebene ein Viereck existiert. Dann ist H lokal projektiv und alle Kontraktionen von H mit einem Punkt ergeben eine unendliche projektive Ebene, wenn H eine unendliche Grundmenge hat, oder im endlichen Fall eine endliche projektive Ebene der gleichen Ordnung q.

Beweis. Man nehme zwei verschiedene Kontraktionen von H durch zwei verschiedene Punkte p und q. Die beiden Kontraktionen sind nach Lemma 3.4 modulare Rang-3-Matroide. Sie sind unendlich bzw. endlich entsprechend der Grundmenge von H.

Da in jeder Ebene von H ein Viereck existiert, besitzt H nach Lemma 5.9 eine Ebene e, die p und q nicht enthält. Nach Lemma 3.17 ist die Ebene e in den beiden Kontraktionen H/p und H/q enthalten. Da e ein Viereck enthält, enthalten beide Kontraktionen auch ein Viereck, sind also projektive Ebenen.

Es sei nun p' ein Punkt aus der Ebene e, er ist auch in den beiden Kontraktionen enthalten. Nach Lemma 3.18 ist dieser Punkt p' in beiden Punktkontraktionen in genauso vielen Linien enthalten wie in e. Das bedeutet im endlichen Fall, dass beide Punktkontraktionen projektive Ebenen der selben Ordnung sein müssen. □

5.2 Liste aller bekannten hypermodularen Rang-4-Matroide

Wie bei den modularen Matroiden listen wir nun die uns bekannten hypermodularen Rang-4-Matroide auf:

5.11 Satz:
Es sei H ein hypermodulares Rang-4-Matroid.

(i) Angenommen keine Ebene in H besitzt ein Viereck, dann ist H modular und die Summe zweier Linien mit einem Punkt.

(ii) Angenommen genau eine Ebene in H besitzt ein Viereck, dann ist H modular und die Summe einer projektiven Ebene mit einem Punkt.

(iii) Angenommen mindestens zwei Ebenen in H besitzen ein Viereck, dann ist H lokal projektiv.

Beweis. (i) ergibt sich aus Lemma 5.5.
(ii) ergibt sich aus Lemma 5.6.
(iii) ergibt sich aus Korollar 5.8 und Satz 5.10. □

Für die lokal projektiven hypermodularen Rang-4-Matroide gilt:

5.12 Satz:
Folgende endliche lokal projektive hypermodulare Rang-4-Matroide sind bekannt:

- die projektiven Geometrien $PG(3, q)$,
- Matroide welche sich durch Löschen von Punkten aus einer projektiven Geometrie ergeben, ohne dass dabei eine Linie gelöscht wird.

Dass es im Fall unendlicher Grundmengen noch weitere lokal-projektive hypermodulare Rang-4-Matroide gibt, zeigen wir im nächsten Abschnitt.

Wir beweisen noch eine Art Umkehrung von Satz 5.10:

5.13 Lemma:
Ein lokal projektives hypermodulares Rang-4-Matroid besitzt in jeder Ebene ein Viereck.

Beweis. Angenommen, ein hypermodulares Rang-4-Matroid H hätte nur eine Ebene mit Viereck oder überhaupt keine, dann wäre es ein Matroid aus Satz 5.11 (i) bzw. (ii). Solche Matroide sind aber nicht lokal projektiv, also hat H zwei Ebenen mit Viereck und aus Korollar 5.8 folgt, dass jede Ebene von H ein Viereck besitzt. □

Es ergibt sich folgende

5.14 Definition:
Ein **hypermodulares Rang-4-Matroid der Ordnung q** ist ein endliches lokal projektives hypermodulares Matroid von Rang 4, bei dem alle Punktkontraktionen projektive Ebenen der Ordnung q ergeben.

5.3 der Witt-Raum

Nicht alle lokal projektiven Matroide sind hypermodulare Matroide. Wir skizzieren hier das berühmteste Gegenbeispiel.

Der **Witt-Raum W_{22}** ist ein endliches Rang-4-Matroid, dessen Konstruktion auf Erwin Witt und Robert D. Carmichael zurückgeht. Er hängt mit speziellen, von Émile Léonard Mathieu 1861 entdeckten Permutationsgruppen zusammen (der Mathieugruppe M_{22}, siehe [24] oder auch [25]).

Er wird durch spezielle Erweiterungen der projektiven Ebene $P(2,4)$ konstruiert, (siehe Kantor in [12], Abschnitt 4) oder als Subsystem des (in dieser Arbeit nicht definierten) Steiner Systems $S(5,8,24)$ (siehe Welsh, in [22], 12.6., dort wird der Raum D_{22} genannt). Wichtig ist für uns nur, dass alle Punktkontraktionen von W_{22} die projektive Ebene $P(2,4)$ ergeben. Der Witt-Raum ist also lokal-projektiv.

Kantor beweist in [11], Example 1, dass W_{22} sich nicht in ein modulares Matroid einbetten lässt. Aus der Konstruktion des Witt-Raums sieht man ausserdem, dass er disjunkte Hyperebenen haben muss, er ist also kein hypermodulares Matroid.

6 Einbettungssätze

Die folgenden Einbettungssätze sind mit den vorherigen Resultaten relativ einfach zu beweisen, jedoch sind sie nicht alle in der Literatur bekannt oder bewiesen.

6.1 Einbettungen von hypermodularen Matroiden

Diesen Satz werden wir im Folgenden den **ersten Einbettungssatz** nennen:

6.1 Satz:
Sei M ein hypermodulares Rang-4-Matroid mit höchstens abzählbar unendlicher Grundmenge. Dann lässt sich M in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid M' einbetten, wobei die Restriktion einer Linie aus M' auf M eine Linie bleibt. Es gilt:

(i) M' ist endlich genau dann wenn M endlich ist.
(ii) Es gilt: $M/p = M'/p$ für alle $p \in M$.
(iii) M' ist genau dann lokal projektiv, wenn M lokal projektiv ist.
(iv) Wenn M ein hypermodulares Matroid der Ordnung q ist, so ist auch M' ein hypermodulares Matroid der Ordnung q.
(v) Wenn in M zusätzlich die Bundle-Condition erfüllt ist, dann ist M' modular.

Beweis. Da die Grundmenge $E(M)$ von M höchstens abzählbar unendlich ist, ist auch die Menge aller Punktepaare aus M, somit aller Linien aus M, somit aller Paare disjunkt coplanarer Linien aus M höchstens abzählbar unendlich. Es gibt also eine Bijektion $\psi : P \to \mathbb{N}$ bzw. $P \to \mathbb{N}^n$, wobei P die Menge aller Paare disjunkt coplanarer Linien in M ist.

Man definiere induktiv eine Kette von Erweiterungen $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ wie folgt: Es sei $M_0 = M$, angenommen es sei M_{i-1} für ein $i \in \mathbb{N}$ bzw. $i \in \mathbb{N}^n$ bereits definiert. Es seien l_{i1} und l_{i2} die beiden disjunkt coplanaren Linien des Linienpaars $\psi^{-1}(i)$ in M. Wenn l_{i1} und l_{i2} in dem Matroid M_{i-1} nicht zum Schnitt gebracht werden können, so sei $M_i = M_{i-1}$. Ansonsten sei M_i die Punkterweiterung von M_{i-1}, die dem von l_{i1} und l_{i2} erzeugten modularen Filter in M_{i-1} entspricht. In diesem Fall schneiden sich die beiden Linien l_{i1} und l_{i2} in M_i in einem Punkt.

$M = M_0$ ist ein hypermodulares Rang-4-Matroid. Angenommen dies gelte auch für alle M_j mit $j < i$ und $j, i \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^n$. Man betrachte eine Linie l in M_i. Angenommen es gelte $M_{i-1} = M_i$, dann enthält M_{i-1} auch schon die Linie l. Ansonsten ist M_i eine Punkterweiterung von M_{i-1}, in der zwei disjunkt coplanare Linien aus M_{i-1} zum Schnitt gebracht werden. Nach Satz 3.13 (ii) ist dann die Restriktion der Linie l auf M_{i-1} auch eine Linie. Das selbe gilt dann auch für Ebenen und M_i ist dann auch ein hypermodulares Rang-4-Matroid. Induktiv folgt zudem, dass die Restriktion einer Linie aus M_i auf M auch eine Linie ist.

Man bilde nun nach Lemma 2.82 das Matroid M^*, die Vereinigung der Erweiterungskette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ Es hat auch Rang 4.

Sei l eine Linie aus M^*. Es gibt ein Matroid M_i, in der die Restriktion von l auf M_i auch schon eine Linie ist, damit ist die Restriktion von l auf M auch eine Linie. Dasselbe gilt für Ebenen. M^* ist also auch ein hypermodulares Rang-4-Matroid.

Sei $\mathcal{M}^*$ ein nicht-leerer modularer Filter in M^*, der kein Hauptfilter ist. Nach Lemma 3.16 enthält er zwei disjunkt coplanare Linien l_1 und l_2. Die Restriktionen dieser beiden Linien auf M sind auch disjunkt coplanare Linien. Das Paar (l_1, l_2) liegt also in der Menge P aller disjunkt coplanaren Linienpaare aus M.

Wir bilden $i = \psi((l_1, l_2))$ und betrachten das Matroid M_{i-1}. Die Linien l_1 und l_2 können in M_{i-1} nicht zum Schnitt gebracht werden, sonst wären sie in M_i und damit auch in M^* nicht mehr disjunkt coplanar. Der von l_1 und l_2 erzeugte modulare Filter in M_{i-1} muss also nach Lemma 2.61 schon $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ enthalten, nach Lemma 2.80 enthält der von l_1 und l_2 in M^* erzeugte modulare Filter $\mathcal{M}^*_{\{l_1,l_2\}}$ dann auch $\emptyset$ und da immer $\mathcal{M}^*_{\{l_1,l_2\}} \subseteq \mathcal{M}^*$ ist, enthält $\mathcal{M}^*$ auch $\emptyset$, ist also ein Hauptfilter, was nicht sein darf.

Das bedeutet insgesamt, dass in M^* jeder nicht-leere modulare Filter ein Hauptfilter ist.

(i) Wenn M endlich ist, sieht man sofort, dass die oben konstruierte Erweiterungskette abbricht und somit das Matroid M^* auch endlich ist.

(ii) - (iv) ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass in M' keine neuen Linien und Ebenen hinzukommen.

(v): Angenommen in M gilt die Bundle-Condition. Da in M^* keine neuen Linien und Ebenen hinzukommen, gilt in M^* auch die Bundle-Condition, nach Korollar 4.14 ist M^* dann ein modulares Matroid. Damit ist alles gezeigt. □

1980 zeigte Jeff Kahn in [10], Theorem 4, ein sehr wichtiges Ergebnis, welches den Satz 6.1 (v) etwas verallgemeinert, unser Beweis des Spezialfalles oben fällt aber um einiges kürzer aus. Wir zitieren das Resultat von Kahn hier ohne Beweis. Es gibt Matroide, bei denen die Bundle-Condition erfüllt ist, die sich jedoch nicht zu einer endlichen projektiven Geometrie erweitern lassen, alle nicht-repräsentierbaren Rang-3-Matroide sind solche. Für lokal projektive Rang-4-Matroide gilt jedoch:

6.2 Satz:
Sei H ein lokal-projektives Rang-4-Matroid, bei dem die Bundle-Condition erfüllt ist. Dann lässt sich H zu einer projektiven Geometrie $PG(3, K)$ erweitern. Wenn H endlich ist und seine Punktkontraktionen projektive Ebenen der Ordnung q sind, so ist dies die projektive Geometrie $PG(3, q)$.

Die Beweis dieses Satzes ist sehr aufschlussreich. Die wechselseitig coplanaren Linien, die sich in H nicht schneiden werden zu Bündeln zusammengefasst und es wird ein neuer Raum, ein sogenannter Bündelraum konstruiert, dessen Punkte diesen Linienbündeln entsprechen. Die Idee des Bündelraums geht schon auf Moritz Pasch (1843-1930) zurück, Alexander Kreuzer gibt in [13] einen umfassenden Überblick über die Theorie der Bündelräume, laut Kreuzer sind sie überhaupt die einzige bekannte Möglichkeit, Einbettungen von endlichen lokal projektiven Rang-4-Matroiden in die projektive Geometrie $PG(3, q)$ zu konstruieren.

Im Beweis unseres ersten Einbettungssatzes 6.1 werden indirekt (im Beweis von Satz 3.13) auch solche Linienbündel verwendet. Der Satz von Jeff Kahn und die Arbeit, in der er bewiesen wurde, wurde viel zitiert, weil der Satz auch einigen fundamentalen Aussagen über Möbiusebenen zugrunde liegt, worauf wir hier nicht weiter eingehen können.

6.2 strenge Einbettbarkeit von hypermodularen Rang-4-Matroiden

Dieser Abschnitt ist etwas technisch, wir stellen hier den Begriff der 'strengen Einbettbarkeit' vor, den William Kantor in seiner Arbeit [12] verwendet, die im nächsten Abschnitt für uns wichtig werden wird. Wir stellen den Zusammenhang dieses Begriffs zu unserer Theorie her. Wir beginnen mit einer einfachen

6.3 Proposition:
Seien M_1 und M_2 Matroide mit den Grundmengen $E(M_1)$ bzw. $E(M_2)$ und den Rangfunktionen r_{M_1} bzw. r_{M_2}. Es sei M_2 isomorph zu M_1 und M_1' sei eine Erweiterung von M_1, also $M_2 \cong M_1 \subseteq M_1'$. Dann gibt es eine Erweiterung M_2' von M_2, mit $M_2' \cong M_1'$.

Beweis. Es sei σ der Isomorphismus von $E(M_2)$ nach $E(M_1)$ und für $X \subseteq E(M_2)$ sei $\sigma(X) = \{\sigma(x)|x \in X\}$. Wir betrachten eine Menge E_2 mit $|E_2| = E(M_1') \setminus E(M_1)$ und $E_2 \cap E(M_1') = E_2 \cap E(M_2) = \emptyset$. Es sei σ_2 eine bijektive Abbildung von E_2 nach $E(M_1') \setminus E(M_1)$. Es sei $E(M_2') = E(M_2) \cup E_2$. Wir erweitern nun σ zu

$$\sigma' : E(M_2') \to E(M_1'), \sigma'(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ wenn } x \in E(M_2) \\ \sigma_2(x), \text{ wenn } x \in E(M_2') \setminus E(M_2) = E_2 \end{cases}$$

σ' ist eine bijektive Abbildung von $E(M_2')$ nach $E(M_1')$. Wir definieren die Funktion

$$r_{M_2'} : 2^{E(M_2')} \to \mathbb{N}_0, r_{M_2'}(X) = r_{M_1'}(\sigma'(X)), \text{ wobei } \sigma'(X) = \{\sigma'(x)|x \in X\}.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass für die Funktion $r_{M_2'}$ die Rangaxiome (R1) - (R3) (aus Satz 2.2) gelten. Es sei M_2' das Matroid (aus Satz 2.3), welches $r_{M_2'}$ als Rangfunktion besitzt. M_2' ist ein zu M_1' isomorphes Matroid (mit dem Isomorphismus σ'). Ausserdem gilt für alle $X \subseteq E(M_2)$, dass

$$r_{M_2'}(X) = r_{M_1'}(\sigma'(X)) = r_{M_1'}(\sigma(X)) = r_{M_1}(\sigma(X)) = r_{M_2}(X).$$

M_2' ist also eine Erweiterung des Matroids M_2, was zu zeigen war. □

Das nächste Lemma zeigt, wie Isometrien mit Erweiterungen von Matroiden zusammenhängen.

6.4 Lemma:
Seien M_1 und M_2 einfache Matroide und $G_1 = \mathcal{L}(M_1)$ und $G_2 = \mathcal{L}(M_2)$ ihre zugehörigen Flächenverbände. Es gilt: Wenn es eine Isometrie von G_1 nach G_2 gibt, so hat M_1 eine Erweiterung, die isomorph zu M_2 ist.

Beweis. Es sei θ eine Isometrie von G_1 nach G_2, dann sei θ' die injektive Abbildung der Punkte aus $E(M_1)$ nach $E(M_2)$, die von θ induziert wird. Für $F \subseteq E(M_1)$ definieren wir $\theta'(F) = \{\theta'(p)|p \text{ sei ein Punkt in } F\}$. Wegen Satz 2.17, Korollar 2.18, Proposition 2.16, und weil θ die Dimensionen erhält, gilt für alle endlichen Mengen $F \subseteq E(M_1)$:

$$\begin{aligned} r_{M_1}(F) &\overset{(2.17)}{=} r_{G_1}(cl_{M_1}(F)) \overset{(2.18)}{=} r_{G_1}(\bigvee_{x\in F} x) = r_{G_2}(\theta(\bigvee_{x\in F} x)) \\ &\overset{(2.16)}{=} r_{G_2}(\bigvee_{x\in F} \theta(x)) = r_{G_2}(\bigvee_{x\in\theta'(F)} x) \overset{(2.18)}{=} r_{G_2}(cl_{M_2}(\theta'(F))) \overset{(2.17)}{=} r_{M_2}(\theta'(F)). \quad (1) \end{aligned}$$

Sei nun F eine beliebige Menge aus $E(M_1)$. Wegen Gleichung (1), dem Rangaxiom (R1a) aus Satz 2.2 und der Injektivität von θ gibt es zwei endliche Mengen $F', F'' \subseteq F$ mit

$$r_{M_1}(F) \overset{(R1a)}{=} r_{M_1}(F') \overset{(1)}{=} r_{M_2}(\theta'(F')) \leq r_{M_2}(\theta'(F)) \overset{(R1a)}{=} r_{M_2}(\theta'(F'')) \overset{(1)}{=} r_{M_1}(F'') \leq r_{M_1}(F).$$

Daraus folgt, dass $r_{M_1}(F) = r_{M_2}(\theta'(F))$ ist. Das bedeutet, dass die Restriktion von M_2 auf die Menge $\theta'(E(M_1))$ isomorph zu M_1 ist. Das bedeutet aber nach Proposition 6.3, dass M_1 eine Erweiterung hat, die isomorph zu M_2 ist. □

Es folgt Kantors Definition der strengen Einbettbarkeit (siehe [12], Definition 2).

6.5 Definition:
Es sei G ein geometrischer Verband und M ein modularer geometrischer Verband. G ist **streng einbettbar in M (über θ)**, wenn es eine Isometrie $\theta\colon G \to M$ gibt, so dass für alle $W \in G^\theta = \{\theta(F)|F \in G\} \subseteq M$ gilt:

(SE1) $\dim G = \dim M = n \geq 2$
(SE2) Wenn $\dim W \leq n-4$ ist, dann ist jedes Element $> W$ aus M von Dimemsion $\leq W + 2$ der Schnitt (in M) von den Elementen aus G^θ, die W enthalten.
(SE3) Wenn $\dim W = n-3$ ist, dann ist $(G^\theta)^W$ entweder M^W oder M^W abzüglich einer Linie und ihren Punkten. (Hierbei sei M^W das Intervall $[W, 1]$ in M.)

Dazu eine kleine Proposition:

6.6 Proposition:
Seien G und G' zwei isomorphe geometrische Verbände und M ein modularer geometrischer Verband. Wenn G in M streng einbettbar ist, so auch G'.

Beweis. Sei σ der Isomorphismus von G' nach G, wenn G in M über die Isometrie θ streng einbettbar ist, dann ist $\theta' = \theta \circ \sigma$ auch eine Isometrie von G' nach M, und G' ist in M über θ' streng einbettbar, da $G^\theta = G^{\theta'}$. □

Wir übertragen dies noch auf unsere Begriffe aus der Matroidtheorie:

6.7 Definition:
Es seien M und M' Matroide und M' sei modular. Dann ist M **streng einbettbar** in M', wenn dies für die zugehörigen Flächenverbände $\mathcal{L}(M)$ und $\mathcal{L}(M')$ gilt.

Hierzu zeigen wir ein Lemma:

6.8 Lemma:
Es seien M und M' Matroide und M' sei modular. Wenn M streng einbettbar in M' ist, dann ist M einbettbar in ein Matroid, welches zu M' isomorph ist. M ist also in ein modulares Matroid einbettbar. Jedes modulare Matroid ist in sich selbst streng einbettbar.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 6.4. Die zweite Aussage ist sofort klar. □

Wir kommen nun zu unserem Hauptergebnis:

6.9 Satz:
Sei M ein hypermodulares Rang-4-Matroid, welches sich zu einem modularen Matroid erweitern lässt. Dann ist M streng einbettbar in ein modulares Rang-4-Matroid M'.

Beweis. Zunächst gilt in M die Bundle-Condition. Wir konstruieren mit unserem ersten Einbettungssatz 6.1 ein Matroid M', welches eine Erweiterung von M vom selben Rang ist und welches keine neuen Linien oder Ebenen besitzt. Dieses Matroid M' ist nach 6.1 (v) modular. Wir betrachten die beiden Flächen-Verbände $G = \mathcal{L}(M)$ sowie $G' = \mathcal{L}(M')$. Da $G \subseteq G'$ ist, ist die Identität θ eine Isometrie von G nach G'.

G und G' haben beide Dimension 3. Es gilt also die Aussage (SE1) in Definition 6.5. Aussage (SE2) ist nur für W mit $dim_{G'}W = 3 - 4 = -1$, also $W = 0_{G'}$ zu zeigen. Wir betrachten also alle Punkte und Linien in G'. Alle Obermengen von Punkten in G' (und natürlich auch von Linien), also Linien, Ebenen und das maximale Element $1_{G'}$, sind aber aus $G^\theta = G$. Damit ist die Aussage (SE2) gezeigt. Zur Aussage (SE3) sei nun W ein Punkt aus $G^\theta = G$, dann ist das Intervall G^W gleich G'^W, da wegen Satz 6.1 (ii) solche Punktkontraktionen gleich bleiben. Damit ist alles gezeigt. □

6.3 Einbettungen in hypermodulare Matroide

An dieser Stelle zeigen wir einen weiteren Einbettungssatz, den Martin Aigner in [2], Satz (VII.1.17) ohne Beweis erwähnt. Er gibt zu diesem Satz nur einen Beweishinweis und bezieht sich auf einen Text eines Herrn oder einer Frau Sachs, der leider nicht mehr auffindbar war. Dieser Satz verallgemeinert das Prinzip der freien Ebenenerweiterung und wird uns später Gegenbeispiele für die Kantor-Vermutung im unendlichen Fall liefern. Wir nennen ihn den **zweiten Einbettungssatz**.

6.10 Satz:
Sei M ein endliches Matroid von Rang 4. Dann gibt es ein hypermodulares Rang-4-Matroid M^*, in welches sich M einbetten lässt.

Beweis. In dem Matroid M lässt sich nach Lemma 2.66 jedes nicht-modulare Ebenenpaar zum Schnitt bringen.

Es sei P die endliche Menge aller nicht-modularen Ebenenpaare in $M = M_0$. Wie bei der Definition 2.83 der freien Ebenenerweiterung bilden wir zunächst eine Punkterweiterung M_1 von M_0, die einem modularen Filter von M_0 entspricht, der von einem Ebenenpaar (e_1, e_2) aus P erzeugt wird. Falls das Ebenenpaar in M_1 noch nicht modular ist, erweitern wir M_1 solange auf diese Art und Weise, bis wir ein Matroid M_i erhalten, so dass das Ebenenpaar in M_i modular ist.

Wegen Lemma 2.81 haben alle anderen Ebenenpaare aus P in M_i immer noch den selben modularen Defekt wie in M_0, lassen sich also auch in M_i zum Schnitt bringen. Wir erweitern also M_i mit einer Punkterweiterung, die einem modularen Filter entspricht, der von einem Ebenenpaar aus $P \setminus (e_1, e_2)$ erzeugt wird usw. Irgendwann erhalten wir ein Matroid M_n, in dem alle Ebenenpaare aus P modular sind, Man enthält evtl. aber wieder neue nicht-modulare Ebenenpaare, wie beginnen von vorne mit M_n statt M_0.

Völlig analog zur Definition 2.83 erhalten wir am Schluss eine Erweiterungskette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \ldots$ von Rang-4-Matroiden und können die Vereinigung der Erweiterungskette $M^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ (bzw. $\bigcup_{i=0}^{m} M_i$, falls die Erweiterungskette die endliche Länge m hat) bilden. Sie hat auch Rang 4.

Man nehme zwei Ebenen in M^*, dann gibt es nach der Kettenkonstruktion ein Matroid M_i, welches die beiden Ebenen enthält. Dann gibt es ein Matroid M_{i+j} in der Kette, wobei j endlich ist, in dem sich die beiden Ebenen in einer Geraden schneiden. Dann schneiden sie sich aber auch in M^* in einer Geraden. Damit ist alles gezeigt. □

Zu dieser Einbettung lässt sich noch Konkreteres feststellen:

6.11 Satz:
Sei M ein endliches Rang-4-Matroid, welches nicht hypermodular ist. Mit Hilfe der Konstruktion im Beweis von Satz 6.10 ergibt sich ein hypermodulares Rang-4-Matroid M^* mit abzählbar unendlicher Grundmenge. Dieses Matroid M^* lässt sich nicht in ein modulares Matroid einbetten. Alle Punktkontraktionen von M^* sind unendliche nicht-desarguessche projektive Ebenen.

Beweis. Angenommen M enthält ein Ebenenpaar, welches sich nur in einem Punkt p schneidet. Dann enthält die Punktkontraktion M/p zwei disjunkte Linien. Wir schauen uns nun das Konstruktionsprinzip im Beweis von Satz 6.10 näher an, und betrachten M/p.

Sei M_1 eine Punkterweiterung von M, die dem von einem nicht-modularen Ebenenpaar (e_1, e_2) aus M erzeugten modularen Filter entspricht. Entweder beide Ebenen schneiden sich in M in dem Punkt p, dann ist M_1/p eine Punkterweiterung von M/p, die einem modularen Filter entspricht, der von zwei disjunkten Linien aus M/p erzeugt wird. Angenommen nur eine Ebene enthält den Punkt p, dann wird in M_1/p einer Linie von M/p ein Punkt frei hinzugefügt. Angenommen keine der beiden Ebenen enthält den Punkt p, dann wird in M_1/p dem Matroid M/p ein Punkt frei hinzugefügt.

Sei M_n das erste Matroid in der Erweiterungskette in dem alle nicht-modularen Ebenenpaare aus M so oft zum Schnitt gebracht wurden, bis sie modular sind. Dann sieht man sofort, dass auch in M_n/p alle disjunkten Linienpaare aus M/p und nur diese zum Schnitt gebracht wurden.

Das gilt analog für die weiteren Erweiterungsschritte. Insgesamt handelt es sich also bei M^*/p um eine hyperfreie Ebenenerweiterung von M/p, diese ist nach Satz 2.88 nicht-desarguessch und hat eine abzählbar unendliche Grundmenge. M^* und alle anderen Punktkontraktionen von M^* haben dann natürlich auch eine abzählbar unendliche Grundmenge.

Wir sehen auch, dass nach Erweiterung eines Ebenenpaares jede der beiden Ebenen ein Viereck hat. M^* ist also nach Korollar 5.8 und Satz 5.10 lokal projektiv. Alle anderen Punktkontraktionen von M^* sind demnach auch projektive Ebenen, genauer sind es hyperfreie nicht-desarguessche Ebenenerweiterungen.

Angenommen M^* liesse sich in ein modulares Matroid einbetten, so müsste dies eine projektive Geometrie sein, und eine solche hat nach Korollar 3.20 immer desarguesche Punktkontraktionen, was ein Widerspruch ist.

Es bleibt nur noch der Fall zu betrachten, dass M als nicht-modulare Ebenenpaare nur disjunkte Ebenen enthält, und keine Ebenen, die sich nur in einem Punkt schneiden. Dann enthält die erste Erweiterung von M ein Ebenenpaar, welches sich nur in einem Punkt schneidet und wir können weiter verfahren wie vorher. Damit ist alles gezeigt. □

Der zweite Einbettungssatz 6.10 lässt sich auf allgemeine hypermodulare Matroide verallgemeinern. Auch für Satz 6.11 funktioniert dies mit Einschränkungen.

6.4 Folgerungen

Fassen wir die beiden Einbettungssaätze 6.1 und 6.10 zusammen, so erhalten wir folgenden **dritten Einbettungssatz**:

6.12 Satz:
Jedes endliche Rang-4-Matroid lässt sich in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid einbetten.

Da dieser Satz auch für Matroide gilt, die sich nicht in ein modulares Matroid einbetten lassen, z.B. das Vámos-Matroid, gilt folgender Satz, der uns die Gegenbeispiele der Sticky-Vermutung liefern wird.

6.13 Satz:
Es gibt nicht-modulare Rang-4-Hauptfilter-Matroide.

Wir zeigen noch ein kleines Lemma:

6.14 Lemma:
Ein nicht-modulares Hauptfilter-Matroid lässt sich nicht in ein modulares Matroid einbetten.

Beweis. Man nehme ein nicht-modulares Paar des Matroids. Es gibt keine Punkterweiterung, in der dieses modulare Paar zum Schnitt gebracht werden kann. □

7 die Kantor-Vermutung

Nach all diesen Vorbereitungen können wir endlich zu der Formulierung der zentralen Vermutung dieser Arbeit kommen.

7.1 der Satz von Kantor/Wille

Wir zitieren an dieser Stelle zunächst einen wichtigen Einbettungssatz in der Originalformulierung von Kantor (siehe [12], Theorem 2):

7.1 Satz:
Es sei G ein geometrischer Verband von Dimension $n \geq 3$. Angenommen, für jedes Element $U \in G$ von Dimension $n-4$ kann das Intervall G^U in einen 3-dimensionalen modularen geometrischen Verband streng eingebettet werden. Dann kann G in einen n-dimensionalen modularen geometrischen Verband streng eingebettet werden.

Mit Hilfe unserer Übetragungen aus Abschnitt 6.2, formulieren wir den Satz, wie wir ihn benötigen, mit unseren Begriffen und nennen ihn den **Satz von Wille/Kantor**:

7.2 Satz:
Sei M ein Matroid von Rang $n \geq 4$, und für jede Fläche F von Rang $n-4$ sei M/F modular oder streng einbettbar in ein modulares Rang-4-Matroid. Dann lässt sich M in ein modulares Matroid von Rang n einbetten.

Beweis. Wenn ein Matroid selber schon modular ist, dann ist es nach Lemma 6.8 auch in sich selbst streng einbettbar. Für jede Fläche F von Rang $n-4$ aus M ist der Flächenverband der Kontraktion $\mathcal{L}(M/F)$ nach Satz 2.54 isomorph zu dem Intervall $\mathcal{L}(M)^F$. Nach Voraussetzung und wegen Definition 6.7 ist $\mathcal{L}(M/F)$ in einen modularen 3-dimensionalen geometrischen Verband streng einbettbar, also nach Proposition 6.6 gilt das auch für $\mathcal{L}(M)^F$. Das bedeutet, dass die Voraussetzungen in Satz 7.1 gegeben sind und dass $\mathcal{L}(M)$ in einen modularen (n-1)-dimensionalen geometrischen Verband streng eingebettet werden kann. Das bedeutet wiederum wegen Definition 6.7 und Lemma 6.8, dass sich M in ein modulares Matroid von Rang n einbetten lässt. □

Es finden sich in der Literatur zwei Beweise für den Satz von Wille/Kantor, einer für den Fall, dass die M/F alle modular sind, von Rudolf Wille in [23], Proposition 4, sowie der Beweis von Satz 7.1 von Kantor in [12], Theorem 2. Beide Beweise ähneln sich. Kantor und Wille haben sie ungefähr zeitgleich und unabhängig voneinander gefunden. Wir beschreiben hier kurz Kantors Beweis.

Kantor reduziert das Problem auf den Fall eines Rang-5-Matroids M, bei dem alle Punktkontraktionen modular sind. Zunächst zeigt er, dass in einem solchen Matroid M die Bundle-Condition gilt, und führt dann 'ideale' Punkte ein, die einem Bündel von wechselseitig zueinander coplanaren Linien entsprechen, die sich in M nicht schneiden. Es wird ähnlich wie bei Jeff Kahns Beweis von Satz 6.2 ein 'Bündelraum' konstruiert. Dadurch kann Kantor zeigen, dass sich M in ein modulares Matroid einbetten lässt.

7.2 Kantors Originalvermutung

Wir betrachten noch einmal den Satz 7.2 von Wille/Kantor. Verändern wir die Voraussetzungen des Satzes so, dass die Flächen F vom Rang $\geq n-2$ sein sollen, dann gilt der Satz nicht, da die Kontraktionen M/F dann in jedem Matroid M modular sind, also auch in Matroiden, die sich nicht in modulare Matroide einbetten lassen.

Wie verhält es sich nun, wenn wir voraussetzen, dass die Flächen F von Rang $n-3$ sein sollen? Zu diesem Fall gehören alle hypermodularen Matroide, sowie alle lokal projektiven Rang-4-Matroide.

Hier gilt der Satz auch nicht. Ein berühmtes (schon von Kantor zitiertes) Gegenbeispiel, ist der im Abschnitt 5.3 besprochene Witt-Raum W_{22}, ein lokal projektives endliches Rang-4-Matroid, welches nicht in ein modulares Matroid eingebettet werden kann. Dieses Matroid und alle anderen solchen endlichen Matroide, die bisher gefunden wurden, haben disjunkte Hyperebenen. Es sind keine hypermodularen Matroide.

Für unendliche hypermodulare Matroide gilt der Satz für Flächen von Rang $n-3$ auch nicht, wie wir noch sehen werden, für den Fall endlicher hypermodularer Matroide ist es jedoch bisher noch niemandem gelungen, ein Gegenbeispiel für den Satz zu konstruieren oder zu zeigen, dass es keines gibt. Die Aussage, dass es kein Gegenbeispiel gibt, formulierte Kantor 1974 als Vermutung, die seitdem nicht bewiesen ist und die wir die **Kantor-Vermutung** nennen. Sie lautet im Original im algemeinen Fall (übersetzt in unsere Begriffe), siehe [12], Einleitung:

7.3 Conjecture:
Ein endliches hypermodulares Matroid lässt sich immer in ein modulares Matroid einbetten.

7.3 äquivalente Formulierungen der Kantor-Vermutung

Wir beweisen nun fünf äquivalente Formulierungen der Kantor-Vermutung.

7.4 Satz:
Folgende Sätze sind äquivalent:

(1) Ein endliches hypermodulares Matroid lässt sich immer in ein modulares Matroid einbetten. (Kantors Originalformulierung)
(2) Ein endliches hypermodulares Rang-4-Matroid lässt sich immer in ein modulares Matroid einbetten.
(3) Für endliche hypermodulare Matroide von Rang 4 gilt die Bundle Condition. (Formulierung der Kantor-Vermutung von Bachem/Kern 1988 in [3], Remark 1)
(4) Jedes endliche Rang-4-Hauptfilter-Matroid ist modular.
(5) Jedes endliche Hauptfilter-Matroid ist modular. (Formulierung der Kantor-Vermutung von W. Hochstättler 2016)

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): ist direkt klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen (2) gilt. Wegen Lemma 3.3 gilt die Aussage (1) für Matroide von Rang < 4 immer. Man nehme ein endliches hypermodulares Matroid M von Rang > 4 und betrachte die Kontraktion M/F von M durch eine beliebige Fläche F aus M von Rang $n-4$. Da (2) gilt, lässt sich M/F in ein modulares Matroid einbetten, da M/F aber auch ein hypermodulares Rang-4-Matroid ist, lässt es sich nach Satz 6.9 auch streng in ein modulares Rang-4-Matroid einbetten. Nach dem Satz 7.2 von Wille/Kantor lässt sich dann auch das ganze Matroid M in ein modulares Matroid einbetten.

(2) $\Rightarrow$ (3): In modularen Matroiden und Restriktionen von modularen Matroiden gilt immer die Bundle Condition. Wenn (2) gilt, ist jedes endliche hypermodulare Rang-4-Matroid Restriktion eines modularen Matroids, es gilt in ihm also die Bundle Condition.

(3) $\Rightarrow$ (4): Jedes endliche Rang-4-Hauptfilter-Matroid ist ein hypermodulares Matroid. In diesem soll dann nach (3) dann die Bundle-Condition gelten. Ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid, in dem die Bundle-Condition gilt, ist aber nach Korollar 4.14 modular.

(4) $\Rightarrow$ (2): Nach Satz 6.12 lässt sich jedes endliche hypermodulare Rang-4-Matroid in ein endliches Rang-4-Hauptfilter-Matroid einbetten. Wenn (4) gilt, ist dieses auch modular, es gilt also auch (2).

(4) $\Rightarrow$ (5): Angenommen (5) gälte nicht, und (4) gälte, es gäbe also ein endliches nicht-modulares Hauptfilter-Matroid M von Rang $\neq 4$. Da nach Lemma 4.5 jedes Hauptfilter-Matroid von Rang < 4 modular ist, muss das Matroid M mindestens Rang 5 haben. Nach Satz 4.12 ist die Kontraktion eines Hauptfilter-Matroids auch ein Hauptfilter-Matroid. Demnach wären alle Kontraktionen von M durch eine Fläche von Rang $n-4$ auch endliche Hauptfilter-Matroide. Diese Kontraktionen wären dann aber nach (4) alle modular. Also wäre das Matroid nach dem Satz 7.2 von Wille/Kantor in ein modulares Matroid einbettbar. Das kann nach Lemma 6.14 aber nicht sein.

(5) $\Rightarrow$ (4): Ist trivial. □

Jedes endliche hypermodulare Rang-4-Matroid welches nicht lokal projektiv ist, ist nach Satz 5.11 modular, für solche Matroide gilt die Kantor-Vermutung. Man kann sich in der Vermutung also auf lokal projektive Matroide beschränken.

7.4 die Teilvermutungen der Kantor-Vermutung

Wir analysieren nun die projektiven Ebenen genauer, die sich als Punktkontraktionen eines lokal projektiven hypermodularen Matroids ergeben. Ab Ordnung $q = 9$ gibt es nach Satz 2.37 auch projektive Ebenen, die nicht isomorph zu $PG(2, q)$ sind, nicht-desarguessche projektive Ebenen. Hierzu gibt es folgendes, wichtiges Resultat.

7.5 Lemma:
Sei H ein lokal projektives hypermodulares Rang-4-Matroid, bei dem die Kontraktion eines beliebigen Punktes eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist. Dann ist in H die Bundle-Condition nicht erfüllt.

Beweis. Angenommen die Bundle-Condition wäre in H erfüllt. Wir verwenden den ersten Einbettungssatz 6.1:

H lässt sich demnach nach 6.1 (v) in ein modulares Rang-4-Matroid H' einbetten. Nach 6.1 (ii) bleiben hierbei die Punktkontraktionen mit Punkten aus H in H' gleich, H' besitzt also auch eine Punktkontraktion, die eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist.

Da H lokal projektiv ist, besitzt es nach Satz 5.11 mindestens zwei Ebenen, die Vierecke enthalten, so dann auch H' als Erweiterung von H.

Nach Satz 2.50 ist dann H' als modulares Rang-4-Matroid mit zwei Ebenen, die ein Viereck besitzen, eine projektive Geometrie $PG(3, K)$. Wir haben aber in Satz 3.20 gezeigt, dass eine projektive Geometrie immer desarguessche Punktkontraktionen hat, wir erhalten einen Widerspruch. □

Mir diesem Resultat zerfällt die Kantor-Vermutung nun in zwei Teilvermutungen, die man getrennt voneinander betrachten kann:

7.6 Conjecture:
Es gibt kein endliches lokal projektives hypermodulares Rang-4-Matroid, welches eine Punktkontraktion besitzt, die eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist.

Gäbe es nämlich eines, so wäre in ihm nach Lemma 7.5 die Bundle-Condition nicht erfüllt und wir erhielten ein Gegenbeispiel für die Kantor-Vermutung in der Formulierung von Bachem und Kern. Ausserdem, für alle übrigen Matroide, haben wir:

7.7 Conjecture:
Ein endliches lokal-projektives hypermodulares Rang-4-Matroid, in welchem alle Punktkontraktionen desarguessche projektive Ebenen sind, erfüllt die Bundle-Condition.

Lässt man in beiden Teilvermutungen die Bedingung der Hypermodularität weg, so gelten sie beide nicht. Mit Hilfe von Theorem 3.4 in Percsy, [18], lassen sich hier leicht Gegenbeispiele konstruieren.

7.5 Gegenbeispiele für die Kantor-Vermutung im Unendlichen

Gegenbeispiele für die Kantor-Vermutung im unendlichen Fall lassen sich mit unserem zweiten Einbettungssatz 6.10 schnell konstruieren. Wir gehen von einem endlichen Rang-4-Matroid M aus, welches sich nicht in ein modulares Matroid einbetten lässt, z.B. dem Vámos-Matroid. Wir konstruieren mit Satz 6.10 ein hypermodulares Rang-4-Matroid M' welches M erweitert, und erhalten ein Gegenbeispiel für die Kantor-Vermutung. Dies ist jedoch nur ein Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion:

Wir müssen nämlich nicht ein Matroid nehmen, welches sich nicht in ein modulares Matroid einbetten lässt, sondern wir können auch allgemein von einem endlichen Rang-4-Matroid M ausgehen, welches nicht hypermodular ist. Mit Satz 6.10 konstruieren wir wieder ein hypermodulares Rang-4-Matroid M' welches M erweitert. Dieses hat nach Satz 6.11 eine unendliche Grundmenge, ist lokal projektiv und hat als Punktkontraktionen nur nicht-desarguesche projektive Ebenen. Es lässt sich nach Lemma 7.5 also nicht in ein modulares Matroid einbetten.

Kantor selbst gab auch in [12], Example 5, ein Gegenbeispiel für seine Vermutung im unendlichen Fall an. Bei genauer Betrachtung seines Beispiels (für den Fall $n = 3$) zeigt sich, dass es sich um einen Spezialfall unseres allgemeinen Konstruktionsprinzips handelt, wenn wir als Ausgangsmatroid das uniforme Matroid $U_{4,5}$ verwenden.

Wir erhalten auf diese Art und Weise alle Rang-4-Gegenbeispiele für die Kantor-Vermutung, die bis jetzt bekannt sind, sie haben alle eine unendliche Grundmenge und sind alles Gegenbeispiele für die erste Kantorsche Teilvermutung. Für die zweite Teilvermutung sind auch im unendlichen Fall keine Gegenbeispiele bekannt, man könnte sie darauf ausweiten.

8 Die Sticky-Vermutung

Nach langen Vorbereitungen können wir endlich zum eigentlichen Thema dieser Arbeit kommen, der Sticky-Vermutung. Wir schicken vorher noch die Definition voraus, wann ein Matroid sticky ist.

8.1 Stickyness

Der Begriff der Stickyness wurde in der Literatur verschieden definiert, wir halten uns hier an die Originaldefinition von Poljak und Turzik 1982 in [20]. Zunächst benötigen wir eine vorbereitende Definition:

8.1 Definition:
Seien im folgenden E_1, E_2, E, T Mengen mit $E_1 \cap E_2 = T$ und $E_1 \cup E_2 = E$. Seien ausserdem:
M ein Matroid mit Grundmenge T,
N_1 ein Matroid mit Grundmenge E_1 und
N_2 ein Matroid mit Grundmenge E_2. Ausserdem seien $N_1|T = N_2|T = M$.

Dann heisst ein Matroid N ein **Amalgam von N_1 und N_2 um M**, wenn gilt, dass $N|E_1 = N_1$, sowie $N|E_2 = N_2$ ist.

Es muss für zwei Erweiterungen eines Matroids kein Amalgam existieren, Damit können wir den Begriff der Stickyness nun definieren:

8.2 Definition:
Ein Matroid M heisst **sticky**, wenn zu jedem Paar M_1 und M_2 von Matroiden, die Erweiterungen von M sind, ein Amalgam von M_1 und M_2 um M existiert.

Die **Sticky-Vermutung** wurde 1982 von Poljak und Turzik in [20] aufgestellt. Sie lautet:

8.3 Conjecture:
Ein Matroid ist sticky genau dann, wenn es modular ist.

Eine Richtung dieser Vermutung ist schon bewiesen, es gilt:

8.4 Satz:
Modulare Matroide sind sticky.

Dies haben Poljak und Turzik in der ersten Arbeit zur Sticky-Vermutung bereits bewiesen (siehe [20], Theorem 1). In [17], Theorem 12.4.10, gibt es dann einen weiteren Beweis, der auf unveröffnentlichten Resultaten von A.W. Ingleton beruht. Also ist noch die andere Richtung der Sticky-Vermutung zu zeigen:

8.5 Conjecture:
Wenn ein Matroid sticky ist, dann ist es auch modular.

8.2 was schon bewiesen ist

Wir tragen hier die wichtigsten Sätze zusammen, die zur Stickyness von Matroiden sowie zur Sticky-Vermutung bewiesen worden sind. Zunächst ein wichtiges Resultat, welches J.Bonin 2009 in [8], Theorem 3.4, zeigte:

8.6 Satz:
Ein Matroid ist nicht sticky, wenn es ein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar besitzt, welches zum Schnitt gebracht werden kann.

Daraus können wir direkt einen Satz folgern:

8.7 Satz:
Wenn ein Matroid M die euklidische Intersection Property IP_3 besitzt, dann gilt für dieses Matroid die Sticky-Vermutung. Damit gilt die Sticky-Vermutung auch für alle Matroide, die die Intersection-Properties IP_1 und IP_2 besitzen.

Beweis. Da die Sticky-Vermutung für modulare Matroide immer gilt, gehen wir davon aus, dass M nicht modular ist. Dann besitzt M aber nach Satz 2.41 ein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar. Da in M nun die IP_3 gilt, lässt sich dieses Paar zum Schnitt bringen, das Matroid ist also nach Satz 8.6 nicht sticky, was zu zeigen war. □

Ein Beweis für diesen Satz findet sich bereits 1987 bei Bachem und Kern in [3], Lemma 6, allerdings fehlerhaft. Einen wirklichen Beweis für diesen Satz lieferte erst J. Bonin mit seinem Beweis von Satz 8.6 in [8], Theorem 3.4. Da nach Lemma 2.72 die Intersection-Properties für alle Matroide von Rang < 4 gelten, folgt sofort als Korollar:

8.8 Korollar:
Für Matroide von Rang < 4 gilt die Sticky-Vermutung.

Diese Tatsache war bereits Poljak und Turzik bekannt, sie bewiesen sie allerdings mit anderen Mitteln in [20], Theorem 3. Bonin bewies in der selben Arbeit wie oben in [8], Theorem 3.1, folgenden Satz:

8.9 Satz:
Ein Matroid, welches zwei disjunkte Hyperebenen hat, ist nicht sticky.

Über Stickyness von Matroiden gibt es eine interessante Aussage von Bachem und Kern aus [3], Lemma 7:

8.10 Lemma:
Wenn ein Matroid sticky ist, so ist auch jede Kontraktion dieses Matroids sticky.

Aus diesem Lemma und Bonins Satz 8.9 folgt folgendes Korollar:

8.11 Korollar:
Ein Matroid ist nicht sticky, wenn es zwei Hyperebenen besitzt, die sich nicht in einer Hypergeraden schneiden, in anderen Worten, wenn es nicht hypermodular ist.

Beweis. Das Matroid habe Rang n. Es sei (h_1, h_2) ein solches Hyperebenenpaar in dem Matroid. Wenn die beiden Hyperebenen disjunkt sind, so ist das Matroid nach Satz 8.9 nicht sticky. Im anderen Fall ist die Menge $h_1 \cap h_2$ nicht leer und von kleineren Rang als $n-2$. Angenommen das Matroid M wäre nun sticky, dann muss aber nach Lemma 8.10 die Kontraktion $H/(h_1 \cap h_2)$ auch sticky sein, diese ist aber von Rang > 2 und enthält zwei disjunkte Hyperebenen, wir erhalten einen Widerspruch. □

Den wohl folgenreichsten Satz zur Sticky-Vermutung zeigten Bachem und Kern in [3], Theorem 8. Wir zeichnen seinen Beweis hier kurz nach, da auch er wieder den Satz 7.2 von Wille/Kantor benutzt. Wir sehen wieder, welche zentrale Rolle der Satz von Wille/Kantor für die Sticky- bzw. die Kantor-Vermutung hat.

8.12 Satz:
Wenn die Sticky-Vermutung für alle Matroide von Rang 4 gilt, so gilt sie für alle Matroide.

Beweis. Angenommen, die Sticky-Vermutung gelte für alle Matroide von Rang 4. Es sei M ein einfaches Matroid von Rang $n > 4$ und es sei M sticky. Zu zeigen ist, dass M modular sein muss.

Für jede Fläche F in M von Rang $n-4$ ist wegen Lemma 8.10 die Kontraktion M/F sticky. Da M/F ein Rang-4-Matroid ist, ist M/F nach Voraussetzung auch modular. Das wiederum bedeutet nach dem Satz 7.2 von Wille/Kantor, dass M zu einem modularen Matroid M' erweitert werden kann. Das modulare Matroid M' hat nach Lemma 2.72 alle Intersection-Properties. Nach Satz 2.73 hat dann jede Restriktion von M' auch alle drei Intersection-Properties, also auch das Matroid M.

Für M gilt also nach Lemma 8.7 die Sticky-Vermutung, da M sticky ist, ist es also auch modular, was zu zeigen war. □

Dies sind alle uns bekannten Ergebnisse über Stickyness und die Sticky-Vermutung aus der Literatur, aus diesen Ergebnissen können wir für Rang-4-Matroide direkt einen Satz folgern:

8.13 Satz:
Wenn es in einem Matroid M von Rang ≤ 4 ein nicht-modulares Paar gibt, welches zum Schnitt gebracht werden kann, so ist dieses Matroid nicht sticky. Da es dann auch nicht modular ist, gilt für dieses Matroid die Sticky-Vermutung.

Beweis. Für Rang-3-Matroide gilt die Sticky-Vermutung sowieso, angenommen also M habe Rang 4. Hat das Matroid zwei disjunkte Ebenen, oder zwei Ebenen, die sich nur in einem Punkt schneiden, so ist es nach Satz 8.11 nicht sticky, hat es zwei disjunkt coplanare Linien, die sich zum Schnitt bringen lassen, so hat es auch nach Proposition 3.8 auch ein disjunktes Ebenen-Geraden-Paar, welches sich zum Schnitt bringen lässt. Dann ist es aber nach Satz 8.6 nicht sticky. Damit ist alles gezeigt. □

Wir folgern insgesamt:

Will man die Sticky-Vermutung beweisen, so reicht es, sie für Matroide von Rang 4 zu zeigen

- die die Intersection Properties IP_1, IP_2 und IP_3 nicht haben,
- bei denen (äquivalent dazu, siehe Satz 2.79) die Bundle-Condition verletzt ist,
- bei denen es keine nicht-modularen Paare gibt, die zum Schnitt gebracht werden können,
- bei denen (äquivalent dazu, siehe Lemma 4.3) jeder modulare Filter ein Hauptfilter ist.

8.3 der Satz (ST2)

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage, ob auch die Umkehrung von Satz 8.13 gilt und formulieren diese Aussage als **Satz (*ST*2)**.

8.14 Satz:
Wenn es in einem Rang-4-Matroid M keine nicht-modularen Paare von Flächen gibt, die sich zum Schnitt bringen lassen, dann ist das Matroid sticky.

Oder in einer nach Lemma 4.3 äquivalenten Formulierung:

8.15 Satz:
Ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid ist sticky.

Der Beweis dieses Satzes ist das Herzstück dieser Arbeit und befindet sich im nächsten Abschnitt. Er verallgemeinert den Beweis in [17], Kapitel 12.4, dass modulare Matroide sticky sind.

9 der Beweis von Satz (ST2)

9.1 Erweiterungen von nicht-modularen Paaren

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es in Erweiterungen von Rang-4-Hauptfilter-Matroiden unter bestimmten Voraussetzungen spezielle modulare Paare nicht geben kann. Zur Vorbereitung kommen zunächst wieder einige Lemmata und Propositionen:

9.1 Proposition:
Es sei M ein Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r und es sei (X, Y) ein modulares Paar von Teilmengen von T und es sei $Z \subseteq X \setminus Y$. Dann ist $(X \setminus Z, Y)$ auch ein modulares Paar.

Beweis. Aufgrund der Submodularität von r und der Modularität von (X, Y) folgt

$$r(X \setminus Z) + r(Y) \geq r((X \setminus Z) \cup Y) + r(X \cap Y) = r((X \setminus Z) \cup Y) + r(X) + r(Y) - r(X \cup Y)$$

oder, äquivalent dazu

$$r(X \setminus Z) + r(X \cup Y) \geq r((X \setminus Z) \cup Y) + r(X).$$

Aus der Monotonie und der Submodularität von r erhalten wir wiederum

$$r(X \setminus Z) + r(X \cup Y) \leq r((X \setminus Z) \cup (X \cap Y)) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r((X \setminus Z) \cup Y).$$

Daher muss überall das Gleichheitszeichen gelten, und wir erhalten somit

$$r(X \setminus Z) + r(Y) = r((X \setminus Z) \cup Y) + r(X \cap Y) = r((X \setminus Z) \cup Y) + r((X \setminus Z) \cap Y). \quad \square$$

Für die folgenden Sätze gelten folgende Voraussetzungen **D**:

- Es sei M ein Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r.
- Es sei M' eine Erweiterung von M mit Rangfunktion r' und Grundmenge E'.
- Es seien $X, Y \subseteq E'$ und $X \cap T = l_X, Y \cap T = l_Y$ seien disjunkt coplanare Linien in M.
- $X \cap Y$ sei ausserdem eine Fläche in M'.

9.2 Proposition:
Es gelten die Voraussetzungen **D**. Ausserdem soll gelten, dass $(X \setminus T) \subseteq Y$ und es sei (X, Y) in M' ein modulares Paar von Mengen. Dann gilt:

$$\forall x \in l_X : x \notin cl_{M'}(Y).$$

Beweis. Angenommen es gäbe ein $x \in l_X$, für das gilt, dass $x \in cl_{M'}(Y)$, dann wäre aufgrund der Coplanarität von l_X und l_Y auch

$$X \cap T = l_X \subseteq l_X \vee l_Y = x \vee l_Y \subseteq cl_{M'}(Y).$$

Also würde gelten, dass $X = (X \setminus T) \cup (X \cap T) \subseteq Y \cup cl_{M'}(Y) = cl_{M'}(Y)$ und deshalb $cl_{M'}(Y) = cl_{M'}(X \cup Y)$, also $r(Y) = r(X \cup Y)$. Aufgrund der Modularität von (X, Y) müsste dann auch gelten, dass $r(X) = r(X \cap Y)$, was aber nicht sein kann, da $X \cap Y$ eine Fläche und eine echte Teilmenge von X ist. $\square$

9.3 Lemma:
Es gelten die Voraussetzungen **D**. Zudem sei das Matroid M von Rang 4 (der Rang von M' kann grösser als 4 sein). Ausserdem soll folgendes gelten:

- Es sei $(X \setminus T) \subseteq Y$.
- Es sei (X, Y) in M' ein modulares Paar von Mengen.
- Es gelte, dass $T \nsubseteq cl_{M'}(X \cup Y)$.
- Es sei $l' \subseteq T$ eine zu l_X und l_Y jeweils disjunkt coplanare Linie, die nicht in $l_X \vee l_Y$ liegt.

Dann gilt für $X' = (X \setminus T) \cup l'$, dass $r'(X') = r'(X)$.

Beweis. Im folgenden sei $x \in l_X$ und $x' \in l' = X' \cap T$. Wegen $(X \setminus T) \subseteq Y$ und weil die Linien l_X und l' zu l_Y coplanar sind, gilt:

$$cl_{M'}(X \cup Y) = cl_{M'}((X \setminus T) \cup l_X \cup Y) = cl_{M'}(l_X \cup Y) = cl_{M'}(\{x\} \cup Y), \text{ sowie} \tag{2}$$

$$cl_{M'}(X' \cup Y) = cl_{M'}(\{x'\} \cup Y) \text{ analog dazu.} \tag{3}$$

Da M ein Matroid von Rang 4 ist, gilt, dass

$$T = cl_M(\{x'\} \cup l_X \cup l_Y) = cl_M(\{x'\} \cup \{x\} \cup l_Y) \subseteq cl_{M'}(\{x'\} \cup \{x\} \cup Y). \tag{4}$$

Wäre nun $x' \in cl_{M'}(\{x\} \cup Y)$, dann würde aus den Gleichungen (4) und (2) folgen, dass

$$T \subseteq cl_{M'}(\{x'\} \cup \{x\} \cup Y) = cl_{M'}(\{x\} \cup Y) = cl_{M'}(X \cup Y)$$

was nicht sein darf. Nach Gleichung (2) gilt also

$$x' \notin cl_{M'}(\{x\} \cup Y) = cl_{M'}(X \cup Y). \tag{5}$$

Angenommen es wäre $x \in cl_{M'}(\{x'\} \cup Y)$. Da nach Proposition 9.2 gilt, dass $x \notin cl_{M'}(Y)$, würde wegen des Austauschaxioms, Satz 2.4 (CL4), gelten, dass $x' \in cl_{M'}(\{x\} \cup Y)$, was Gleichung (5) widerspricht. Hieraus und mit Gleichung (3) folgt, dass

$$x \notin cl_{M'}(\{x'\} \cup Y) = cl_{M'}(X' \cup Y). \tag{6}$$

Wäre nun $x \in cl_{M'}(X')$, so wäre auch $x \in cl_{M'}(X' \cup Y)$, was Gleichung (6) widerspräche, genauso kann wegen Gleichung (5) nicht $x' \in cl_{M'}(X)$ gelten. Es gilt also:

$$r'(X' \cup \{x\}) = r'(X') + 1, \text{ sowie } r'(X \cup \{x'\}) = r'(X) + 1. \tag{7}$$

Aus der Coplanarität von l_X und l' folgt aber $cl_M(l_X \cup \{x'\}) = cl_M(l' \cup \{x\})$ und daraus:

$$cl_{M'}(X \cup \{x'\}) = cl_{M'}((X \setminus T) \cup l_X \cup \{x'\}) = cl_{M'}((X \setminus T) \cup l' \cup \{x\}) = cl_{M'}(X' \cup \{x\}).$$

Also gilt, dass $r'(X') + 1 = r'(X' \cup \{x\}) = r'(X \cup \{x'\}) = r'(X) + 1$.

Daraus folgt, dass $r'(X') = r'(X)$. □

9.4 Lemma:
Es gelten die Voraussetzungen **D**. Zudem sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Ausserdem soll folgendes gelten:

- Es sei $(X \setminus T) \subseteq Y$ sowie $(Y \setminus T) \subseteq X$.
- Es sei $T \nsubseteq cl_{M'}(X \cup Y)$.

Dann kann (X, Y) kein modulares Paar in M' sein.

Beweis. Nach Korollar 4.13 gibt es in M zwei nicht zueinander coplanare Linien l_1 und l_2, die jeweils zu l_X und l_Y disjunkt coplanar sind, jedoch nicht in der von der von l_X und l_Y erzeugten Ebene liegen.

Wir bilden $X' = (X \setminus T) \cup l_1$ und $Y' = (Y \setminus T) \cup l_2$. Dann gilt wegen Lemma 9.3, dass:

$$r'(X') = r'(X) \text{ und } r'(Y') = r'(Y). \tag{8}$$

Es gilt $T \subseteq cl_M(l_1, l_2) \subseteq cl_{M'}(X' \cup Y')$. Ausserdem gilt:

$$X' \cup Y' \cup T = (X \setminus T) \cup l_1 \cup (Y \setminus T) \cup l_2 \cup T = X \cup Y \cup T$$

Man erhält wegen $T \nsubseteq cl_{M'}(X \cup Y)$:

$$r'(X' \cup Y') = r'(X' \cup Y' \cup T) = r'(X \cup Y \cup T) > r'(X \cup Y) \tag{9}$$

Es gilt, dass $l_1 \cap l_2 = l_1 \cap (Y \setminus T) = l_2 \cap (X \setminus T) = \emptyset$. Daraus und aus $X \cap Y \cap T = \emptyset$ folgt, dass

$$\begin{aligned} X' \cap Y' &= ((X \setminus T) \cup l_1) \cap ((Y \setminus T) \cup l_2) \\ &= (X \setminus T) \cap (Y \setminus T) = X \cap Y \end{aligned}$$

Man erhält:

$$r'(X' \cap Y') = r'(X \cap Y) \tag{10}$$

Aus diesen Gleichungen und der Submodularität von r' folgt:

$$r'(X \cup Y) + r'(X \cap Y) \overset{(9),(10)}{<} r'(X' \cup Y') + r'(X' \cap Y') \leq r'(X') + r'(Y') \overset{(8)}{=} r'(X) + r'(Y)$$

Das Paar (X, Y) ist also kein modulares Paar von Mengen in M'. □

Wir kommen nun zu dem Hauptresultat dieses Abschnitts (hier noch einmal explizit mit allen Voraussetzungen):

9.5 Satz:
Es gelten folgende Voraussetzungen:

- Es sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r.
- Es sei M' eine Erweiterung von M mit Rangfunktion r' und Grundmenge E'.
- Es seien $X, Y \subseteq E'$, so dass $X \cap T$ und $Y \cap T$ disjunkt coplanare Linien in M sind.
- Es sei $X \cap Y$ eine Fläche in M'.

Angenommen, es gilt: $T \nsubseteq cl_{M'}(X \cup Y)$, dann kann (X, Y) kein modulares Paar in M' sein.

Beweis. Angenommen (X, Y) wäre ein modulares Paar in M'.

Man bilde nun $X' = (X \cap T) \cup (X \cap Y)$ und $Y' = (Y \cap T) \cup (X \cap Y)$. Dann wäre nach zweimaliger Anwendung von Proposition 9.1 (mit $Z_1 = (X \setminus Y) \setminus T$ und $Z_2 = (Y \setminus X) \setminus T$ das Paar (X', Y') auch ein modulares Paar in M'.

Ausserdem gilt, dass $X' \cap T = X \cap T$, sowie $Y' \cap T = Y \cap T$, sowie $X' \cap Y' = X \cap Y$, also ist $X' \cap Y'$ auch eine Fläche in M'.

Zudem gilt, dass $X' \setminus T = (X \cap Y) \setminus T \subseteq X \cap Y \subseteq Y'$ und analog dazu $(Y' \setminus T) \subseteq X'$.

Da aus $cl_{M'}(X' \cup Y') \subseteq cl_{M'}(X \cup Y)$ und $T \nsubseteq cl_{M'}(X \cup Y)$ auch $T \nsubseteq cl_{M'}(X' \cup Y')$ folgt, sind für das Paar (X', Y') alle Voraussetzungen von Lemma 9.4 gegeben und damit kann (X', Y') kein modulares Paar sein, was ein Widerspruch zur Annahme ist, das (X, Y) ein modulares Paar sein soll. □

Die nächsten zwei Lemmata sind wichtig um später den Fall der disjunkten Linien-Ebenenpaare auf den der disjunkt coplanaren Linien zu reduzieren.

9.6 Lemma:
- Es sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r.
- Es sei M' eine Erweiterung von M mit Grundmenge E' und Rangfunktion r'.
- Es seien $X, Y \subseteq E'$ und es seien $X \cap T = e_X$ eine Ebene und $Y \cap T = l_Y$ eine dazu disjunkte Linie in M.
- Es sei $X \cap Y$ eine Fläche in M'.
- Es sei L die Menge aller Linien aus e_X, die disjunkt coplanar zu l_Y sind.

Angenommen, es gibt eine Linie $l_X \in L$ für die gilt, dass

$$r'(X) = r'((X \setminus T) \cup e_X) = r'((X \setminus T) \cup l_X) + 1,$$

dann ist (X, Y) kein modulares Paar von Mengen in M'.

Beweis. Angenommen (X, Y) wäre ein modulares Paar von Mengen in M'.

Zunächst gilt: $T \subseteq cl_{M'}(X \cup Y)$, also

$$r'(X \cup Y \cup T) = r'(X \cup Y). \tag{11}$$

Man nehme die Linie l_X und bilde $X' = (X \setminus T) \cup l_X$. Nach Voraussetzung ist

$$r'(X) = r'(X') + 1 \tag{12}$$

Es gilt $X' \cap T = l_X$ und $X' \cup T = X \cup T$. Daraus folgt:

$$X' \cup Y \cup T = X \cup Y \cup T. \tag{13}$$

Ausserdem gilt:

$$X' \cap Y = ((X \setminus T) \cup l_X) \cap Y = X \cap Y. \tag{14}$$

$X' \cap Y$ ist also auch eine Fläche in M'. Es sei $p \in e_X \setminus l_X$, dann gilt:

$$r'(X \cup Y) = r(X' \cup \{p\} \cup Y) \leq r'(X' \cup Y) + 1. \tag{15}$$

Aus diesen Gleichungen und aus der Modularität von (X, Y) folgt, dass:

$$r'(X' \cup Y) + 1 + r'(X' \cap Y) \overset{(15),(14)}{\geq} r'(X \cup Y) + r'(X \cap Y) = r'(X) + r'(Y) \overset{(12)}{=} r'(X') + 1 + r'(Y)$$

Aufgrund der Submodularität von r' muss hier und in Gleichung (15) das Gleichheitszeichen stehen, daraus folgt, dass (X', Y) ein modulares Paar sein muss, und es gilt:

$$r'(X' \cup Y \cup T) \overset{(13)}{=} r'(X \cup Y \cup T) \overset{(11)}{=} r'(X \cup Y) \overset{(15)}{=} r'(X' \cup Y) + 1. \tag{16}$$

Daraus folgt, dass $T \nsubseteq cl_{M'}(X' \cup Y)$. Das Paar (X', Y) erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 9.5. und kann daher kein modulares Paar sein, wir erhalten einen Widerspruch. $\square$

Und wir benötigen noch ein weiteres Lemma:

9.7 Lemma:
Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Lemma 9.6. Angenommen für alle Linien $l \in L$ gilt, dass $r'(X) = r'((X \setminus T) \cup l)$ und es gibt eine Linie $l_X \in L$, für die gilt, dass $r'((X \cap Y) \cup e_X) = r'((X \cap Y) \cup l_X) + 1$.

Dann kann (X, Y) kein modulares Paar von Flächen in M' sein.

Beweis. Angenommen (X, Y) wäre ein modulares Paar von Flächen in M'. Wir bilden nun $X' = (X \cap Y) \cup e_X$. Dann gilt: $X' = X \setminus Z$ mit $Z = (X \setminus Y) \setminus e_X \subseteq X \setminus Y$. Nach Proposition 9.1 ist daher auch (X', Y) ein modulares Paar von Mengen aus E'.

Es gilt: $X' \cap T = e_X = X \cap T$ und $X' \setminus T = X \cap Y = X' \cap Y$

Es gibt nach Voraussetzung eine Linie l_X aus e_X, so dass gilt:

$$r'(X') = r'((X \cap Y) \cup e_X) = r'((X \cap Y) \cup l_X) + 1 = r'((X' \setminus T) \cup l_X)) + 1.$$

Da $X' \cap Y$ eine Fläche in M' ist, sind alle Voraussetzungen von Satz 9.6 erfüllt, ein solches modulares Paar (X', Y) von Mengen aus E' kann es also nicht geben. Demzufolge kann auch das Paar (X, Y) nicht modular sein. □

9.2 Eigenschaften des eigentlichen Amalgams

Zu zwei Erweiterungen eines Matroids lässt sich manchmal ein spezielles Amalgam konstruieren, welches das **eigentliche Amalgam** genannt wird. Wir beschreiben in diesem Abschnitt die Konstruktion und spezielle Eigenschaften dieses Amalgams.

Für alle folgenden Lemmata, Sätze und Propositionen gelten, wenn nicht anders erwähnt, folgende Definitionen:

- Es sei M ein Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r.
- Es seien M_1 und M_2 zwei Erweiterungen von M mit den Grundmengen E_1 und E_2 und den Rangfunktionen r_1 und r_2.
- Es soll gelten: $E_1 \cap E_2 = T$ und $E_1 \cup E_2 = E$.
- Bei den Matroiden M, M_1 und M_2 handelt es sich um Matroide endlichen Ranges mit endlicher oder höchstens abzählbar unendlicher Grundmenge.

Man bilde nun folgende Funktion $\eta : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathbb{Z}$ mit:

$$\eta(X) = r_1(X \cap E_1) + r_2(X \cap E_2) - r(X \cap T)$$

und die Funktion $\xi : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathbb{Z}$ mit:

$$\xi(X) = \min\{\eta(Y) : Y \supseteq X\}$$

Zuerst zeigen wir dazu eine Proposition:

9.8 Proposition:
Die Funktion ξ ist subkardinal, endlich und monoton, es gilt:

R1 : $0 \leq \xi(X) \leq |X|$, für alle $X \subseteq E$, und
R1a : Für alle $X \subseteq E$ existiert ein $X' \subseteq X, |X'| < \infty$, mit $\xi(X) = \xi(X')$.
R2 : Für alle $X_1 \subseteq X_2 \subseteq E$ gilt : $\xi(X_1) \leq \xi(X_2)$.

Ausserdem gilt immer: $\xi(X) \leq \eta(X)$ für alle $X \subseteq E$.

Beweis. Die letzte Aussage ergibt sich direkt aus der Definition von ξ.

Zu **(R1)**: Es gilt: $0 \leq \eta(X)$ für alle $X \subseteq E$, also auch $0 \leq \xi(X)$.

Wenn X eine Menge mit $|X| = \infty$ ist, gilt $\eta(X) \leq |X|$, da η immer endlich ist. Es gilt: $\eta(\emptyset) = 0 \leq |\emptyset|$. Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte nun: $\eta(X) \leq |X|$ für alle X mit $|X| \leq n$. Man betrachte ein X' mit $|X| = n+1$. So ist $X' = X \cup \{p\}$ für eine Menge X mit $|X| = n$ und einen Punkt $p \in E$. Es gilt:

$$\eta(X') = \eta(X \cup p) = r_1((X \cup p) \cap E_1) + r_2((X \cup p) \cap E_2) - r((X \cup p) \cap T) \leq \eta(X) + 2$$

Angenommen, es wäre $\eta(X') = \eta(X) + 2$, dann müsste gelten, dass $r_1((X \cup p) \cap E_1) = r_1(X \cap E_1) + 1, r_2((X \cup p) \cap E_2) = r_2(X \cap E_2) + 1$ und $r((X \cup p) \cap T) = r(X \cap T)$. Aus $r((X \cup p) \cap T) = r(X \cap T)$ folgt aber, dass $p \in cl_M(X \cap T) \subseteq cl_{M_1}(X \cap E_1)$, es gilt also $r_1((X \cup p) \cap E_1) = r_1(X \cap E_1)$, was nicht sein darf.

Deshalb gilt $\eta(X') \leq \eta(X) + 1 \leq |X| + 1 = |X'|$ und somit $\xi(X) \leq \eta(X) \leq |X|$ für alle $X \subseteq E$.

Zu **(R2)**: Diese Aussage folgt sofort aus der Definition von ξ.

Zu **(R1a)**: Wir betrachten eine Menge $X \subseteq E$. Für die Rangfunktion r des Matroids M gilt die Bedingung (R1a). Es gibt also eine endliche Menge $X_T \subseteq X \cap T$, mit $r(X_T) = r(X \cap T)$. Sei Y eine Menge mit $X_T \subseteq Y \subseteq X$, dann gilt:

$$r(X_T) = r(X_T \cap T) \leq r(Y \cap T) \leq r(X \cap T) = r(X_T), \text{ also } r(X_T) = r(Y \cap T). \quad (17)$$

Analog dazu gibt es endliche Mengen $X_1 \subseteq X \cap E_1$ und $X_2 \subseteq X \cap E_2$ für die $r_1(X_1) = r_1(X \cap E_1)$ und $r_2(X_2) = r_2(X \cap E_2)$ gilt und Gleichung (17) jeweils analog dazu. Wir bilden die endliche Menge $X' = X_T \cup X_1 \cup X_2$. Es gilt wegen $X_{(T/1/2)} \subseteq X' \subseteq X$:

$$\begin{aligned}\eta(X') &= r_1(X' \cap E_1) + r_2(X' \cap E_2) - r(X' \cap T) = r_1(X_1) + r_2(X_2) - r(X_T) \\ &= r_1(X \cap E_1) + r_2(X \cap E_2) - r(X \cap T) = \eta(X).\end{aligned}$$

Zudem gilt für alle Mengen Y, für die $X' \subseteq Y \subseteq X$ ist, dass $\eta(X') = \eta(Y) = \eta(X)$. Daraus folgt, dass $\xi(X') = \xi(X)$ gilt, was zu zeigen war. □

Falls ξ auch submodular auf $\mathcal{P}(E)$ ist, dann ist ξ die Rangfunktion eines Amalgams von M_1 und M_2 um M. Der Beweis dazu findet sich bei [17], Proposition 12.4.2. Dieses Amalgam heisst (wenn es existiert) das **eigentliche Amalgam** von M_1 und M_2 um M.

Sei nun $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ die Menge der Teilmengen X von E, so dass $X \cap E_1$ und $X \cap E_2$ Flächen in M_1 bzw. M_2 sind. Dann gilt folgende Proposition:

9.9 Proposition:
$\mathcal{L}(M_1, M_2)$ ist mit der Inklusionsordnung ein vollständiger Verband von Teilmengen von E. Es seien $\wedge_{\mathcal{L}}$ und $\vee_{\mathcal{L}}$ der meet und join dieses Verbandes. Für zwei Mengen $X, Y \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$ gilt, dass $X \wedge_{\mathcal{L}} Y = X \cap Y$ und $X \vee_{\mathcal{L}} Y \supseteq X \cup Y$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathcal{L}(M_1, M_2)$. Man bilde $Y = \bigcap_{X \in A} X$.

Wir wählen ein $x \in cl_{M_1}(Y \cap E_1)$ und ein beliebiges $X \in A$. Dann ist auch $x \in cl_{M_1}(X \cap E_1)$, also auch $x \in X \cap E_1$, da $X \cap E_1$ eine Fläche ist.

Da X aus A beliebig gewählt wurde, gilt auch, dass $x \in Y \cap E_1$, $Y \cap E_1$ ist also eine Fläche in M_1. Analog gilt das für $Y \cap E_2$, so dass $Y \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$ liegt.

Jede Menge, die in allen $X \in A$ enthalten ist, ist aber auch in Y enthalten, Y ist also die grösste untere Schranke aller $X \in A$, es gilt: $\bigwedge_{\mathcal{L}} A = Y$. E liegt in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$. Man bilde nun $Y = \bigcup_{X \in A} X$.

Es sei B die Menge aller Elemente aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, die Y enthalten. Da $E \in B$ ist, ist B nicht leer, man bilde $Z = \bigwedge_{\mathcal{L}} B$. Es gilt $Y \subseteq Z$ und alle oberen Schranken von Y aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ enthalten Z. Daraus folgt, dass $Z = \bigvee_{\mathcal{L}} A$. Das bedeutet aber, dass $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ mit der Inklusionsordnung ein vollständiger Verband ist.

Sei nun $A = \{X, Y\} \subseteq \mathcal{L}(M_1, M_2)$, dann gilt $X \wedge_{\mathcal{L}} Y = \bigwedge_{\mathcal{L}} A = \bigcap_{X' \in A} X' = X \cap Y$. Die zweite Gleichung folgt analog. □

Wir zitieren folgendes Lemma aus [17], 12.4.5, der Beweis findet sich dort auch:

9.10 Lemma:
Für alle $X \subseteq E$ gilt: $\xi(X) = \min\{\eta(Y) \colon Y \in \mathcal{L}(M_1, M_2) \text{ und } Y \supseteq X\}$

Nun folgt ein Hauptresultat von Ingleton zitiert aus [17], Theorem 12.4.7. Der Beweis für dieses Resultat findet sich dort auch.

9.11 Satz:
Sei die oben definierte Funktion η submodular auf $\mathcal{L}(M_1, M_2)$. Dann existiert das eigentliche Amalgam von M_1 und M_2 um M.

Dieses Hauptresultat verallgemeinern wir folgendermassen:

9.12 Lemma:
Für alle Paare (X, Y) von Mengen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ sei entweder die oben definierte Funktion η oder die Funktion ξ submodular (oder beide Funktionen). Dann ist ξ submodular auf $\mathcal{P}(E)$ und es existiert das eigentliche Amalgam von M_1 und M_2 um M.

Beweis. Angenommen $X_1, X_2 \subseteq E$. Es gibt nach Lemma 9.10 für $i = 1, 2$ ein $Y_i \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$, so dass $X_i \subseteq Y_i$ und $\xi(X_i) = \eta(Y_i)$.

Aus $\eta(Y_i) = \xi(X_i) \leq \xi(Y_i) \leq \eta(Y_i)$ folgt dann, dass $\xi(X_i) = \xi(Y_i) = \eta(Y_i)$.

Dann ist für das Flächenpaar (Y_1, Y_2) nach Voraussetzung entweder η (sei dies Fall 1) oder ξ (sei dies Fall 2) submodular (oder beide), und es gilt wegen Proposition 9.9, dass $X_1 \cap X_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y_1 \wedge_{\mathcal{L}} Y_2$ sowie $X_1 \cup X_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y_1 \vee_{\mathcal{L}} Y_2$. Wegen Proposition 9.8 folgt:

$$
\begin{aligned}
&\xi(X_1 \cap X_2) + \xi(X_1 \cup X_2) \leq \xi(Y_1 \wedge_{\mathcal{L}} Y_2) + \xi(Y_1 \vee_{\mathcal{L}} Y_2) \\
&\leq \begin{cases} \eta(Y_1 \wedge_{\mathcal{L}} Y_2) + \eta(Y_1 \vee_{\mathcal{L}} Y_2) \leq \eta(Y_1) + \eta(Y_2) = \xi(X_1) + \xi(X_2) \text{ für Fall 1.} \\ \xi(Y_1) + \xi(Y_2) = \xi(X_1) + \xi(X_2) \text{ für Fall 2.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

ξ ist also submodular auf $\mathcal{P}(E)$. Das eigentliche Amalgam existiert. □

Wir folgern hier noch ein Korollar, welches für den Beweis von Satz **(ST2)** noch nicht gebraucht wird, jedoch bei einer Verallgemeinerung dieses Satzes auf höhere Ränge sehr wichtig werden könnte.

9.13 Korollar:
Bei den Voraussetzungen von Lemma 9.12 kann man sich auf solche Paare von (X_1, X_2) aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ beschränken, für die gilt, dass $\xi(X_i) = \eta(X_i)$, und für die für alle $Y \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$ mit $Y \supsetneq X_i$ gilt, dass $\eta(Y) > \eta(X_i)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis von Lemma 9.12. □

Ein wichtiges Lemma ([17], Lemma 12.4.6) muss hier auch noch erwähnt werden (der Beweis ist wiederum dort zu finden):

9.14 Lemma:
Sei $Y \subseteq E$ und Z das kleinste Element aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, welches Y enthält, dann gilt: $\eta(Z) \leq \eta(Y)$.

Daraus folgt:

9.15 Lemma:
Seien X, Y aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, so gilt $\eta(X \cup Y) \geq \eta(X \vee_{\mathcal{L}} Y)$. Ausserdem gilt: $\xi(X \cup Y) = \xi(X \vee_{\mathcal{L}} Y)$.

Beweis. $X \vee_{\mathcal{L}} Y$ ist das kleinste Element aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, welches $X \cup Y$ enthält, also gilt die erste Ungleichung nach dem vorherigem Lemma.

Für den Beweis der zweiten Aussage sei $Z \supseteq X \cup Y$. Sei nun Z' das kleinste Element aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, welches Z enthält, es gilt, dass $\eta(Z') \leq \eta(Z)$ ist. Ausserdem gilt $Z' \supseteq X \cup Y$, daher auch $Z' \supseteq X \vee_{\mathcal{L}} Y$, aufgrund der Monotonie von ξ gilt also:

$\xi(X \vee_{\mathcal{L}} Y) \leq \xi(Z') \leq \eta(Z') \leq \eta(Z)$. Da Z beliebig gewählt wurde, gilt auch

$\xi(X \vee_{\mathcal{L}} Y) \leq \min\{\eta(Z) : Z \supseteq (X \cup Y)\} = \xi(X \cup Y)$.

Daraus und aus der Monotonie von ξ folgt, dass $\xi(X \cup Y) = \xi(X \vee_{\mathcal{L}} Y)$. □

Es folgen noch eine kleine Proposition und ein Lemma:

9.16 Proposition:
Es seien wieder M ein Matroid mit Grundmenge T und Rangfunktion r, sowie M_1 und M_2 Erweiterungen von M mit Grundmengen E_1 und E_2 und Rangfunktionen r_1 und r_2. Es sei $E_1 \cap E_2 = T, E_1 \cup E_2 = E$ und $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ sei wie oben definiert.

Sei X aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, so ist $X \cap T$ eine Fläche in M.

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus Proposition 2.55, da $X \cap E_1$ eine Fläche in M_1 ist. □

9.17 Lemma:
Sei nun M ein Rang-4-Matroid. Alle anderen Definitionen bleiben wie bei Proposition 9.16. Sei X aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ mit $r(X \cap T) \geq 2$. Dann gilt: $\xi(X) = \eta(X)$.

Beweis. Es ist $\eta(X) = r_1(X \cap E_1) + r_2(X \cap E_2) - r(X \cap T)$. Es sei $Y \supseteq X$. Angenommen $Y \cap T = X \cap T$, dann gilt: $\eta(Y) \geq \eta(X)$. Ansonsten existiert ein Element $t \in Y \cap T$ mit $t \notin X \cap T$, also auch $t \notin X$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\eta(X \cup \{t\}) &= r((X \cup \{t\}) \cap E_1) + r((X \cup \{t\}) \cap E_2) - r((X \cup \{t\}) \cap T) \\ &= r_1(X \cap E_1) + 1 + r_2(X \cap E_2) + 1 - r(X \cap T) - 1 = \eta(X) + 1,\end{aligned}$$

da $X \cap E_1, X \cap E_2$ und $X \cap T$ Flächen sind. Da es sich bei M um ein Rang-4-Matroid handelt, und $r((X \cup \{t\}) \cap T) \geq 3$ ist, kann sich η für Obermengen von $X \cup \{t\}$ nur noch höchstens um 1 erniedrigen, es gilt also $\eta(Y) \geq \eta(X \cup \{t\}) - 1 = \eta(X)$.

Insgesamt gilt immer $\eta(Y) \geq \eta(X)$ für alle Obermengen Y von X, also $\xi(X) = \eta(X)$. □

9.3 Der Beweis von Satz (ST2)

Nach all diesen Vorbereitungen können wir endlich zu dem Beweis von Satz (ST2) kommen. Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Proposition 12.4.9. in [17]. Oxley beruft sich hier auf unveröffentlichte Resultate von A.W.Ingleton. Wir beginnen mit einem Lemma:

9.18 Lemma:
- Es sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid mit Grundmenge T.
- Es seien M_1 und M_2 zwei Erweiterungen von M mit den Grundmengen E_1, E_2 und den Rangfunktionen r_1, r_2, ausserdem sei $E_1 \cap E_2 = T$ und $E_1 \cup E_2 = E$.
- Es seien η, ξ und $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ definiert wie im vorherigen Abschnitt.

Sei (X, Y) ein Paar von Elementen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ für welches die Submodularität von η in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ verletzt ist, dann gilt:

(*i*) $\eta(X) + \eta(Y) - \eta(X \cap Y) - \eta(X \cup Y) =$
$\delta(X \cap E_1, Y \cap E_1) + \delta(X \cap E_2, Y \cap E_2) - \delta(X \cap T, Y \cap T) = -1$

(*ii*) $(X \cap E_1, Y \cap E_1)$ und $(X \cap E_2, Y \cap E_2)$ sind modulare Paare in M_1 bzw. M_2

(*iii*) $(X \cap T, Y \cap T)$ sind entweder zwei disjunkt coplanare Linien
oder ein disjunktes Geraden-Ebenenpaar in M

(*iv*) $\eta(X) = \xi(X)$ und $\eta(Y) = \xi(Y)$

Beweis. Zunächst ist M nach Lemma 4.6 ein hypermodulares Matroid und es gilt, dass $X \cap E_1, X \cap E_2, Y \cap E_1$ und $Y \cap E_2$ Flächen aus M_1 bzw. M_2 sind, Nach Proposition 9.16 sind dann auch $X \cap T$ und $Y \cap T$ Flächen aus M.

In $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ gilt nach Proposition 9.9 die Gleichung $X \wedge_{\mathcal{L}} Y = X \cap Y$. Ausserdem gilt nach Lemma 9.15, dass $\eta(X \vee_{\mathcal{L}} Y) \leq \eta(X \cup Y)$.

Da η für (X, Y) in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ nicht submodular ist, gilt:

$$0 > \eta(X) + \eta(Y) - \eta(X \vee_{\mathcal{L}} Y) - \eta(X \wedge_{\mathcal{L}} Y) \geq \eta(X) + \eta(Y) - \eta(X \cup Y) - \eta(X \cap Y)$$

Wir schreiben die rechte Seite dieser Gleichung anders auf:

$$\begin{array}{llll}
\eta(X) & +\eta(Y) & -\eta(X\cup Y) & -\eta(X\cap Y)\\
= r_1(X\cap E_1) & + r_1(Y\cap E_1) & - r_1((X\cup Y)\cap E_1) & - r_1((X\cap Y)\cap E_1)\\
+ r_2(X\cap E_2) & + r_2(Y\cap E_2) & - r_2((X\cup Y)\cap E_2) & - r_2((X\cap Y)\cap E_2)\\
- r(X\cap T) & - r(Y\cap T) & + r((X\cup Y)\cap T) & + r((X\cap Y)\cap T)\\
\multicolumn{4}{l}{= \delta(X\cap E_1, Y\cap E_1) + \delta(X\cap E_2, Y\cap E_2) - \delta(X\cap T, Y\cap T)}
\end{array}$$

Da der modulare Defekt δ von zwei Flächen in M nach Korollar 3.10 niemals > 1 werden kann, kann diese Gleichung niemals kleiner als -1 werden. Sie muss also gleich -1 sein. Damit ist (i) gezeigt.

Dies kann aber nur sein, wenn $(X\cap E_1, Y\cap E_1)$, und $(X\cap E_2, Y\cap E_2)$ modulare Paare von Flächen aus M_1 bzw. M_2 sind und wenn gleichzeitig $(X\cap T, Y\cap T)$ ein nicht modulares Paar von Flächen aus M ist, das heisst, $X\cap T$ und $Y\cap T$ sind nach Korollar 3.10 entweder zwei disjunkt coplanare Linien, oder eine Ebene, die zu einer Linie disjunkt ist. Damit ist (ii) und (iii) gezeigt.

Da dann aber der Rang von $X\cap T$ bzw. $Y\cap T$ grösser gleich 2 sein muss, gilt nach Lemma 9.17 immer, dass $\xi(X) = \eta(X)$ und $\xi(Y) = \eta(Y)$ und damit ist alles bewiesen. □

9.19 Lemma:
Es gelten dieselben Voraussetzungen wie vorher.

Sei (X, Y) ein Paar von Elementen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ für welches die Submodularität von η in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ verletzt ist, und es gilt, dass $\xi(X\cup Y) < \eta(X\cup Y)$ oder $\xi(X\cap Y) < \eta(X\cap Y)$ ist. Dann ist ξ für (X, Y) in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ submodular.

Beweis. Nach Proposition 9.8 gilt, dass $\xi(X\cup Y) \leq \eta(X\cup Y)$, sowie $\xi(X\cap Y) \leq \eta(X\cap Y)$. Ausserdem gilt wegen Proposition 9.9, dass $\xi(X\cap Y) = \xi(X\wedge_{\mathcal{L}} Y)$ ist, sowie wegen Lemma 9.15, dass $\xi(X\cup Y) = \xi(X\vee_{\mathcal{L}} Y)$ ist.

Zudem gilt wegen Lemma 9.18 (iv), dass $\eta(X) = \xi(X)$, sowie $\eta(Y) = \xi(Y)$.

Aus $\xi(X\cup Y) < \eta(X\cup Y)$ oder $\xi(X\cap Y) < \eta(X\cap Y)$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
&\xi(X) + \xi(Y) - \xi(X\wedge_{\mathcal{L}} Y) - \xi(X\vee_{\mathcal{L}} Y)\\
&\quad = \xi(X) + \xi(Y) - \xi(X\cap Y) - \xi(X\cup Y) > \eta(X) + \eta(Y) - \eta(X\cap Y) - \eta(X\cup Y) = -1
\end{aligned}$$

Da ξ nur Werte aus $\mathbb{Z}$ besitzt, wird die linke Seite der Gleichung an dieser Stelle 0 und ξ bleibt submodular für (X, Y) in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$. □

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis von Satz (ST2).

9.20 Satz:
Sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Dann existiert zu je zwei Erweiterungen des Matroids M das eigentliche Amalgam.

Beweis. M habe Grundmenge T. Wir nehmen nun zwei beliebige Erweiterungen M_1, M_2 von M mit den Grundmengen E_1, E_2 und den Rangfunktionen r_1, r_2, wobei $E_1 \cap E_2 = T$ und $E_1 \cup E_2 = E$ sein soll. Zu diesen Erweiterungen zeigen wir nun, dass das eigentliche Amalgam existiert.

Dazu definieren wir η und ξ wie im vorherigen Abschnitt. Wenn wir zeigen können, dass für alle Paare (X, Y) von Elementen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ entweder die Funktion η oder die Funktion ξ in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ submodular ist, so ist ξ nach Lemma 9.12 auch submodular auf $\mathcal{P}(E)$ und das eigentliche Amalgam von M_1 und M_2 um M existiert.

Wir untersuchen im folgenden alle Fälle von Paaren (X, Y) von Mengen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$, bei denen die Submodularität von η verletzt sein könnte, und zeigen:

- entweder, dass der jeweilige Fall gar nicht auftreten kann,
- oder, dass $\xi(X \cup Y) < \eta(X \cup Y)$ oder $\xi(X \cap Y) < \eta(X \cap Y)$ ist, dann muss nach Lemma 9.19 nämlich die Funktion ξ für (X, Y) in $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ submodular sein.

Für alle diese Paare (X, Y) muss folgendes gelten:

$(X \cap E_1, Y \cap E_1)$ und $(X \cap E_2, Y \cap E_2)$ sind nach Lemma 9.18 (ii) modulare Paare von Flächen in M_1 bzw. M_2.

Nach Lemma 9.18 (iii) ist $(X \cap T, Y \cap T)$ ein Paar disjunkt coplanarer Linien oder ein disjunktes Geraden-Ebenenpaar.

Nach Proposition 9.9 ist auch $X \cap Y \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$.

Wir beginnen mit der Unterscheidung der Fälle:

Fall 1: $X \cap T = l_X$ und $Y \cap T = l_Y$ sind zwei disjunkt coplanare Linien. Hier differenzieren wir zwei Unterfälle:

Fall 1a: Es gilt: $T \subseteq cl_{M_1}((X \cup Y) \cap E_1)$ und $T \subseteq cl_{M_2}((X \cup Y) \cap E_2)$.

Wir zeigen, dass $\xi(X \cup Y) < \eta(X \cup Y)$ gilt:

Man erweitere Y um einen Punkt $t \in T \setminus cl_M(l_X \cup l_Y)$, dann gilt:

$$r_1((X \cup (Y \cup \{t\})) \cap E_1) = r_1((X \cup Y) \cap E_1), \text{ und genauso für } r_2.$$

Ausserdem gilt:

$$r((X \cup Y \cup \{t\}) \cap T) = r(l_X \cup l_Y \cup \{t\}) = r(l_X \cup l_Y) + 1 = r((X \cup Y) \cap T) + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{Also gilt:}\quad & \eta(X \cup (Y \cup \{t\})) \\
&= r_1((X \cup (Y \cup \{t\})) \cap E_1) + r_2((X \cup (Y \cup \{t\})) \cap E_2) - r((X \cup (Y \cup \{t\})) \cap T) \\
&= r_1((X \cup Y) \cap E_1) + r_2((X \cup Y) \cap E_2) - r((X \cup Y) \cap T) - 1 \\
&= \eta(X \cup Y) - 1.
\end{aligned}$$

In diesem Falle ist also $\xi(X \cup Y) < \eta(X \cup Y)$.

Fall 1b: Es gilt: $T \nsubseteq cl_{M_1}((X \cup Y) \cap E_1)$ oder $T \nsubseteq cl_{M_2}((X \cup Y) \cap E_2)$ oder beides.

Dieser Fall kann nicht auftreten, wie in Satz 9.5 gezeigt wurde.

Fall 2: $X \cap T = e_X$ ist Ebene und $Y \cap T = l_Y$ eine dazu disjunkte Linie.

Wir versuchen diesen Fall auf den ersten zu reduzieren. Im folgenden sei L die Menge aller Linien aus e_X, die disjunkt coplanar zu l_Y sind. Es sind nur drei Fälle relevant:

Fall 2a: Angenommen es gibt eine Linie $l_X \in L$ für die gilt:

$$r_1(X \cap E_1) = r_1(((X \setminus T) \cup l_X) \cap E_1) + 1 \text{ oder symmetrisch dazu für } r_2, E_2.$$

Dieser Fall kann nicht auftreten. Das wurde in Lemma 9.6 bewiesen.

Fall 2b: Angenommen für alle Linien $l \in L$ gilt, dass

$$r_1(X \cap E_1) = r_1(((X \setminus T) \cup l) \cap E_1) \text{ und symmetrisch dazu für } r_2, E_2.$$

Ausserdem gelte für alle diese Linien, dass

$$r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup l) = r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup e_X) \text{ und symmetrisch dazu für } r_2, E_2. \quad (18)$$

Man nehme einen Punkt p_1 aus e_X. Er spannt mit l_Y eine Ebene e auf. Da sich in dem Matroid M jedes Ebenenpaar in einer Linie schneidet, schneidet sich die Ebene e mit der Ebene e_X in einer Linie l_X, die p_1 enthält.

Wir betrachten nun $(Y \cup \{p_1\}) \cap E_1$. Da $Y \cap E_1$ eine Fläche ist, die p_1 nicht enthält, gilt:

$$r_1((Y \cup \{p_1\}) \cap E_1) = r_1(Y \cap E_1) + 1 \quad (19)$$

Da $X \cap E_1$ und $Y \cap E_1$ Flächen in M_1 sind, ist auch $X \cap Y \cap E_1$ eine Fläche in M_1. Sie enthält keine Punkte aus T. Also gilt:

$$r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1\}) = r_1(X \cap Y \cap E_1) + 1. \quad (20)$$

Wir betrachten einen zweiten Punkt $p_2 \in l_X$ mit $p_2 \neq p_1$. Da l_X und l_Y coplanar sind, gilt

$$p_2 \in l_X \subseteq p_1 \vee l_Y = p_1 \vee (Y \cap T) \subseteq cl_{M_1}(\{p_1\} \cup (Y \cap E_1))$$

Daraus folgt:

$$r_1((Y \cup l_X) \cap E_1) = r_1((Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) = r_1((Y \cup \{p_1\}) \cap E_1). \quad (21)$$

Ausserdem gilt, da $\{p_1, p_2\} \subseteq l_X \subseteq X$:

$$r_1((X \cup Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) = r_1((X \cup Y) \cap E_1) \quad (22)$$

Aus den vorigen Gleichungen und der Modularität von $(X \cap E_1, Y \cap E_1)$ in M_1 folgt:

$$\begin{aligned}
& r_1(X \cap E_1) + r_1((Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) \\
\overset{(21)}{=} \; & r_1(X \cap E_1) + r_1((Y \cup \{p_1\}) \cap E_1) \\
\overset{(19)}{=} \; & r_1(X \cap E_1) + r_1(Y \cap E_1) + 1 \\
\overset{(Mod.)}{=} \; & r_1((X \cup Y) \cap E_1) + r_1(X \cap Y \cap E_1) + 1 \\
\overset{(22)}{=} \; & r_1((X \cup Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) + r_1(X \cap Y \cap E_1) + 1 \\
\overset{(20)}{=} \; & r_1((X \cup Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) + r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1\}) \\
\leq \; & r_1((X \cup Y \cup \{p_1, p_2\}) \cap E_1) + r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1, p_2\})
\end{aligned}$$

Aufgrund der Submodularität von r_1 muss in der letzten Zeile das Gleichheitszeichen stehen, es muss also gelten, dass:

$$r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup l_X) = r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1, p_2\}) = r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1\}) \quad (23)$$

Die Gleichungen (20) und (23) gelten analog auch für r_2. Aus $X \cap Y \cap T = \emptyset$, der Voraussetzung (18) und diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
&\eta((X \cap Y) \cup e_X) \\
&= r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup e_X) + r_2((X \cap Y \cap E_2) \cup e_X) - r((X \cap Y \cap T) \cup e_X) \\
&\overset{(18)}{=} r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup l_X) + r_2((X \cap Y \cap E_2) \cup l_X) - r((X \cap Y \cap T) \cup l_X) - 1 \\
&\overset{(23)}{=} r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup \{p_1\}) + r_2((X \cap Y \cap E_2) \cup \{p_1\}) - r((X \cap Y \cap T) \cup \{p_1\}) - 2 \\
&\overset{(20)}{=} r_1(X \cap Y \cap E_1) + 1 + r_2(X \cap Y \cap E_2) + 1 - r(X \cap Y \cap T) - 1 - 2 \\
&= \eta(X \cap Y) - 1.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\xi(X \cap Y) < \eta(X \cap Y).$$

Fall 2c: Angenommen für alle Linien $l \in L$ gilt, dass

$$r_1(X \cap E_1) = r_1(((X \setminus T) \cup l) \cap E_1) \text{ und symmetrisch dazu für } r_2, E_2.$$

Ausserdem sei angenommen, es gäbe eine Linie $l_X \in L$ so dass entweder

$$r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup e_X) = r_1((X \cap Y \cap E_1) \cup l_X) + 1$$

oder das analoge für r_2, E_2 oder beides gilt.

Dass dieser Fall nicht auftreten kann, wurde in Lemma 9.7 bewiesen (welches sich wiederum auf Lemma 9.6 und damit auf Satz 9.5 bezieht).

Das waren alle problematischen Fälle, die betrachtet werden mussten. Wir haben insgesamt gezeigt, dass für alle Paare (X, Y) von Mengen aus $\mathcal{L}(M_1, M_2)$ entweder die Funktion η oder die Funktion ξ submodular ist. Wegen Lemma 9.12 existiert also das eigentliche Amalgam von M_1 und M_2 um M und damit ist der Satz bewiesen. □

Als Korollar zu diesem Satz ergibt sich nun unser Hauptergebnis, der Satz (ST2):

9.21 Korollar:
Es sei M ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Dann ist M sticky.

10 die Äquivalenz der Sticky- und der Kantor-Vermutung

10.1 mögliche Gegenbeispiele der Sticky-Vermutung

Nach diesem ausufernden Beweis können wir endlich wieder zur Sticky-Vermutung kommen, wir fassen noch einmal aus den Ergebnissen von Abschnitt 8.2 zusammen, welche Kriterien ein mögliches Gegenbeispiel der Sticky-Vermutung erfüllen müsste:

10.1 Satz:
Es sei M ein mögliches Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung, dann erfüllt M folgende Kriterien:

(i) Es hat mindestens Rang 4.
(ii) Es hat keine der Intersection-Properties.
(iii) Es ist hypermodular.
(iv) Es besitzt kein disjunktes Geraden-Hyperebenenpaar, welches sich zum Schnitt bringen lässt.
(v) Es ist nicht modular.

Beweis. (i) Korollar 8.8. (ii) Satz 8.7. (iii) Korollar 8.11. (iv) Satz 8.6. (v) Satz 8.4. □

Wieder mit dem Satz 7.2 von Wille/Kantor lässt sich die Frage der möglichen Gegenbeispiele auf Matroide von Rang 4 reduzieren:

10.2 Lemma:
Sei M ein Matroid von Rang $n \geq 4$, welches sticky ist, aber nicht modular, also ein Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung. Dann gibt es mindestens eine Fläche F von Rang $n-4$ aus M, für die die Kontraktion M/F ein Matroid ist, welches auch schon sticky ist, aber nicht modular.

Beweis. Für jede Fläche F aus M von Rang $n-4$ ist die Kontraktion M/F von M nach Lemma 8.10 sticky. Wären alle diese Kontraktionen nun auch modular, so liesse sich M völlig analog wie in dem Beweis von Satz 8.12 nach dem Satz 7.2 von Wille/Kantor in ein modulares Matroid einbetten, hätte also alle Intersection Properties und wäre nicht sticky, da es nicht modular ist und die Sticky-Vermutung für alle Matroide gilt, die die Intersection-Properties haben. Daher muss mindestens eines dieser Kontraktionen sticky, aber nicht-modular sein. □

Aus jedem möglichen Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung liesse sich also ein Matroid von Rang 4 konstruieren, welches dann auch Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung wäre, es reicht also auch hier, sich mit Matroiden von Rang 4 zu beschäftigen. Bei Rang-4-Matroiden lässt sich der Kriterienkatalog verschärfen. Es gilt:

10.3 Satz:
Ein Rang-4 Matroid M ist genau dann ein Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung, wenn folgende zwei Aussagen gelten:

(i) M ist nicht modular.
(ii) M ist ein Hauptfilter-Matroid.

10.2 Gegenbeispiele der Sticky-Vermutung im unendlichen Fall

Aus jedem Rang-4-Gegenbeispiel für Kantor-Vermutung lässt sich nun ein Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung konstruieren.

Sei M ein Gegenbeispiel von Rang 4 für die Kantor-Vermutung, welches wir mit dem zweiten Einbettungssatz 6.10 konstruiert haben (siehe auch Abschnitt 7.5). Dann ist M ein hypermodulares Rang-4-Matroid mit abzählbar unendlicher Grundmenge, welches sich nicht in ein modulares Matroid einbetten lässt. Wir betten nun M mit dem ersten Einbettungssatz 6.1 in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid M' ein, was immer möglich ist. Dieses Matroid M' ist dann nicht modular. Es ist aber nach Satz (ST2) sticky, insgesamt also ein Gegenbeispiel für die Sticky-Vermutung im unendlichen Fall.

Die auf diese Art konstruierten Matroide sind die einzigen uns bis jetzt bekannten Gegenbeispiele für die Sticky-Vermutung. Im endlichen Fall sind uns bisher keine Gegenbeispiele bekannt. Für den endlichen Fall zeigen wir nun dass die Sticky-Vermutung zur Kantor-Vermutung äquivalent ist.

10.3 die Äquivalenz der Kantor und der Sticky-Vermutung im endlichen Fall

Mit allen Ergebnissen dieser Arbeit ist nun die Äquivalenz der beiden Vermutungen spielend zu beweisen. Beide Vermutungen müssen auf den Fall von Rang 4 reduziert werden.

10.4 Satz:
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Endliche Matroide, die sticky sind, sind modular. (die Sticky-Vermutung)

(2) Jedes endliche Rang-4-Matroid, welches sticky ist, ist auch modular.

(3) Jedes endliche Rang-4-Hauptfilter-Matroid ist modular.

(4) Jedes endliche Hauptfilter-Matroid ist modular. (die Kantor-Vermutung in der Formulierung von W.Hochstättler)

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) wurde in Satz 8.12 bewiesen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen (3) gälte nicht, und es gäbe ein endliches nicht-modulares Rang-4-Hauptfilter-Matroid. Dann wäre dieses endliche Matroid nach Satz (ST2) sticky, aber nicht modular, (2) und (1) gälten also nicht.

(3) $\Rightarrow$ (2): Diese Richtung war bereits Bachem und Kern bekannt (siehe [3], Remark 1). Angenommen (3) gälte und es sei M ein Rang-4-Matroid, welches sticky ist, dann hat M nach Satz 8.13 keine Flächenpaare, die zum Schnitt gebracht werden können, ist also nach Lemma 4.3 ein Hauptfilter-Matroid. Nach (3) wäre M dann auch ein modulares Matroid. Es gälte also (2).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) wurde schon in Satz 7.4 bewiesen. □

11 offene Fragen

11.1 die Bundle-Condition bei höheren Rängen

Bei Rang-4-Matroiden gibt es zur Bundle-Condition und den Intersection-Properties eine klare Aussage (siehe Satz 2.79): Die Bundle-Condition und alle drei Intersection-Properties sind bei Rang-4-Matroiden äquivalent. Bei Matroiden höheren Ranges werden die Verhältnisse sehr viel komplizierter:

Das Verhältnis der Bundle-Condition zu den Intersection-Properties ist bei Matroiden höheren Ranges weitestgehend ungeklärt, es gilt zwar allgemein, dass die Gültigkeit der IP_2 die der Bundle-Condition impliziert, dies ist jedoch schon fast alles, was (bis jetzt) gezeigt werden kann. Einen Satz können wir hierzu aber zeigen:

11.1 Satz:
Es sei M ein hypermodulares Matroid von Rang $n \geq 4$, in dem eine der drei Intersection-Properties oder die Bundle-Condition nicht erfüllt ist. Dann gibt es eine Kontraktion von M durch eine Fläche von Rang $n - 4$ in der die Bundle-Condition nicht erfüllt ist.

Beweis. Angenommen in allen solchen Kontraktionen wäre die Bundle-Condition erfüllt, dann wären diese alle nach dem ersten Einbettungssatz 6.1 in ein modulares Matroid einbettbar, und damit nach Satz 6.9 auch in ein modulares Matroid streng einbettbar, und damit wäre dem Satz 7.2 von Wille/Kantor auch das ganze Matroid M in ein modulares Matroid einbettbar, was nicht sein kann, da eine der drei Intersection-Properties bzw. die Bundle-Condition nicht erfüllt ist. □

Es gilt zur Bundle-Condition im allgemeinen Fall noch folgendes Lemma:

11.2 Lemma:
In einem Matroid M sei die Bundle Condition nicht erfüllt. Dann gibt es in dem Matroid ein Paar disjunkt coplanarer Linien, die nicht zum Schnitt gebracht werden können.

Die Umkehrung dieses Lemmas ist nur für Rang-4-Matroide bewiesen, für höhere Ränge ist dies eine sehr wichtige Frage. Angenommen es gibt in einem Matroid zwei disjunkt coplanare Linien, die nicht zum Schnitt gebracht werden können, dann können wir bisher nicht zeigen, dass in dem Matroid die Bundle-Condition verletzt ist, geschweige denn etwas analoges wie Satz 3.13, der sagt, dass bei Rang-4-Matroiden die beiden Linien sich dann in einem Vámos-Matroid befinden müssen.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes wäre aber auch eine Schlüsselfrage für eine Verallgemeinerung von Satz (ST2) und daher sehr wichtig. Ihr sollte in einer weiteren Arbeit nachgegangen werden. Es schliesst sich hier noch eine weitere offene Frage an:

Wir haben in Satz 4.7 gezeigt, dass ein Hauptfilter-Matroid modular ist, wenn in ihm eine der Intersection Properties gilt. Es wäre schön, wenn sich eine analoge Aussage mit der Bundle-Condition beweisen lassen könnte.

11.2 Fragen zu den Einbettungssätzen

11.2.1 zum ersten Einbettungssatz

Wir zeigten in Satz 6.1, dass jedes hypermodulare Rang-4-Matroid sich in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid einbetten lässt, welches keine zusätzlichen Linien besitzt. Wir vermuten, dass diese Einbettung eindeutig ist, es wäre wünschenswert, das zu zeigen. Ausserdem wäre es wichtig zu erörtern, wie eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf höhere Ränge aussehen könnte.

11.2.2 zum zweiten Einbettungssatz

Wir zeigten ausserdem in Satz 6.10, dass sich jedes endliche Matroid in ein hypermodulares Matroid desselben Ranges einbetten lässt. Wir benutzten im Beweis dieses Satzes eine Konstruktion, in der jeweils zwei Ebenen des Matroids mit einem Punkt erweitert wurden, dies wurde mit allen nicht-modularen Ebenenpaaren vorgenommen.

Wir vermuten, dass sich im Falle von Rang-4-Matroiden mit dieser Konstruktion sogar ein Hauptfilter-Matroid ergibt. Um jedes Paar von disjunkt-coplanaren Geraden müsste sich nämlich im Laufe der Erweiterungsschritte ein Vámos-Matroid herumbauen, dies wäre an dieser Stelle zu zeigen.

Wir schlagen ausserdem (zunächst für Rang 4) folgendes abgewandeltes Konstruktionsprinzip vor: Man stelle sich die Erweiterungskonstruktion so vor, dass in jedem Schritt nicht zwei Ebenen zum Schnitt gebracht werden, sondern soviele Ebenen wie möglich, ohne dass der zugehörige modulare Filter modulare Paare von Ebenen enthält. Dies entspricht dann bei den Punktkontraktionen nicht mehr, wie bei der Konstruktion im Beweis von Satz 6.10 den hyper-freien Ebenenerweiterungen, sondern sogenannten 'bound'-Erweiterungen, wie sie in [21] erwähnt werden. Solche Erweiterungen sind lange nicht so gut erforscht wie die freien Ebenenerweiterungen, wir vermuten, dass sich bei den Punktkontraktionen schlussendlich desarguessche projektive Ebenen ergeben und hoffen mit dieser Konstruktion möglicherweise ein Gegenbeispiel für die 2. Kantorsche Teilvermutung im unendlichen Fall zu erhalten.

Erhielten wir mit einer solchen 'bound'-Erweiterung evtl. sogar eine Konstruktion, die im Endlichen abbricht und ein Gegenbeispiel der Kantor-Vermutung erzeugt? Wir vermuten, dass das nicht funktioniert, weil wir vermuten, dass die Anzahl der zu schneidenden Ebenen exponentiell wächst und sich immer mehr neue nicht-modulare Paare von Ebenen ergeben, als in einem Schritt zum Schnitt gebracht werden können. Dies gilt es jedoch zu beweisen.

11.2.3 unendliche Erweiterungsketten

Wir haben in Satz 6.11 bewiesen, dass die im Beweis von Satz 6.10 benutzte Konstruktion der Erweiterungen von Ebenenpaaren für endliche Matroide, die keine hypermodularen Matroide sind, und erweitert werden sollen, nicht abbricht. Wie sieht es mit anderen Erweiterungsketten aus, in denen z.B. auch Geraden zum Schnitt gebracht werden?

Das Studium solcher Erweiterungsketten könnte für einen Beweisversuch der Kantor-Vermutung interessant sein. Wann brechen sie ab, gibt es Muster solcher Ketten, die zum Ziel führen könnten, oder könnte man auf der anderen Seite zeigen, dass man z.B. das Vámos-Matroid mit einer periodischen Kette nie zu einem endlichen hypermodularen Matroid erweitern kann?

Dies sind alles Versuche, die Kantor-Vermutung algorithmisch zu beweisen. Genauso interessant, wie es wäre, einen solchen 'Algorithmus' zu finden, der zum Ziel führt, wäre es, auszuloten, wo die Grenzen eines solchen 'Algorithmus' liegen und wieweit ein solcher Algorithmus dann auch gleich die Frage der Existenz projektiver Ebenen gewisser Ordnungen beantworten können müsste.

11.2.4 zu den Folgerungen der Einbettungssätze

Wir folgerten bei Rang-4-Matroiden den allgemeinen Satz, dass jedes endliche Rang-4-Matroid in ein Rang-4-Hauptfilter-Matroid einbettbar ist. Wir vermuten, dass dieser Satz auch für alle Ränge gilt, eine ähnliche Konstruktion wie im Beweis von Satz 6.1 wird wahrscheinlich zum Ziel führen. Wir formulieren ihn hier aber noch als Vermutung:

11.3 Conjecture:
Jede endliche Matroid ist in ein Hauptfilter-Matroid einbettbar.

Würde hier das Einbettungs-Matroid auch als endlich vorausgesetzt werden, dann würde aus der Vermutung erstens folgen, dass die Kantor-Vermutung nicht gilt und zweitens, dass sich jedes endliche Rang-3-Matroid in eine endliche projektive Ebene einbetten lässt.

11.3 Die Verallgemeinerung von Satz (ST2)

Das Fernziel an dieser Stelle ist es, folgende Vermutung zu beweisen:

11.4 Conjecture:
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Ein Matroid M ist sticky.
(ii) Jeder modulare Filter in M ist ein Hauptfilter.

Beide Richtungen sind für höhere Ränge offen, für die Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$, dass heisst die Verallgemeinerung von Satz 8.13, gibt es jedoch einen Beweisansatz, den wir in dieser Arbeit aber noch als Vermutung formulieren:

11.5 Conjecture:
Ein Matroid ist nicht sticky, wenn es ein nicht-modulares Paar (X, H) von Flächen besitzt, welches solange zum Schnitt gebracht werden kann, bis es modular ist, wobei H eine Hyperebene ist. Matroide, in denen es ein nicht-modulares Flächenpaar gibt, welches zum Schnitt gebracht werden kann, besitzen auch ein solches Flächenpaar (X, H).

Ein Beweis dieser Vermutung folgt in einer weiteren Arbeit. Die Richtung von $(ii) \Rightarrow (i)$ in der Vermutung, also die Aussage, dass Hauptfilter-Matroide sticky sind (die Verallgemeinerung von Satz (ST2) auf höhere Ränge), scheint sehr viel schwieriger zu beweisen zu sein. Es gibt viele Stellen im Beweis von Satz (ST2), an denen explizit von der Tatsache gebraucht gemacht wird, dass es sich um Rang-4-Matroide handelt. Alleine bei den Fallunterscheidungen, gäbe es viele neue Fälle, das Lemma 9.17 gilt nicht mehr für höhere Ränge, dies könnte evtl noch mit Korollar 9.13 umgangen werden. Aber auch die Fallunterscheidungen mit $T \subseteq cl(X \cup Y)$ müssten wahrscheinlich auch ausdifferenziert werden. Ein Knackpunkt wäre auch noch die (in Abschnitt 11.1 beschriebene) Problematik der Verallgemeinerung von Satz 3.13.

11.4 Gegenbeispiele der Sticky-Vermutung höheren Ranges

Wir haben in Abschnitt 10.1, Satz 10.1 einen Katalog von Kriterien aufgestellt, den mögliche Gegenbeispiele der Sticky-Vermutung allgemeinen Ranges erfüllen müssten.

Wir wissen aber bis heute nicht, ob Matroide, die diesen Kriterienkatalog erfüllen, für Rang > 4 überhaupt existieren, ob sie, wenn sie noch nicht-modulare Paare besitzen, die zum Schnitt gebracht werden können, sticky sind oder nicht, ob sie sich zu Hauptfilter-Matroiden erweitern lassen, und ob diese Matroide dann wiederum sticky sind oder nicht.

Jeder Schritt dieser Verallgemeinerungen ist uns unbekannt und sollte näher betrachtet werden. Für alle diese Verallgemeinerungsbeispiele schlagen wir vor, zunächst Rang-5-Matroide zu betrachten, um die Probleme genau zu erkennen, die auftreten können.

11.5 Erweiterungen des Begriffs der Stickyness

Aufgrund der Ergebnisse dieser Arbeit waren wir motiviert, den Begriff der Stickyness noch etwas zu präzisieren. Zu einer Frage der zugehörigen Amalgame führen wir einen weiteren Begriff ein:

11.6 Definition:
Ein Matroid M heisst **eigentlich sticky**, falls zu zwei beliebigen Erweiterungen dieses Matroids das eigentliche Amalgam existiert.

Es gilt, dass Rang-4-Hauptfilter-Matroide eigentlich sticky sind. Ausserdem gilt allgemein, dass modulare Matroide eigentlich sticky sind. Das heisst, dass bis jetzt alle bekannten Matroide, die sticky sind, auch eigentlich sticky sind. Es gilt:

11.7 Satz:
Ein Rang-4-Matroid ist genau dann sticky, wenn es eigentlich sticky ist.

Für höhere Ränge formulieren wir den offenen Fall als Vermutung:

11.8 Conjecture:
Ein Matroid, welches sticky ist, ist auch eigentlich sticky.

Viel mehr offene Fragen und Beweisansätze ergaben sich im endlichen Fall zur Kantor-Vermutung, wir haben auch einen (noch zu überprüfenden) Ansatz für einen Beweis der Kantor-Vermutung für hypermodulare Rang-4-Matroide bis einschliesslich Ordnung 6. Diese Fragen gehen jedoch weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, es wird ihnen eine weitere Arbeit gewidmet werden.

12 Literaturverzeichnis

[1] Aigner, M.,
Kombinatorik I,
Springer, Heidelberg, Berlin (1976)

[2] Aigner, M.,
Kombinatorik II,
Springer, Heidelberg, Berlin (1976)

[3] Bachem, A., Kern, W.,
On sticky matroids.,
Discrete Math. 69(1), 11-18 (1988)

[4] Bachem, A., Wanka, A.,
Euklidean Intersection Properties.,
Journal of Combinatorial Theory, Series B 47, 10-19 (1989)

[5] Batten, L.M.,
Locally generalized projective spaces,
J. Geom., 29, (1987), 43-49.

[6] Beutelsbacher, A., Rosenbaum,U.,
Projektive Geometrie,
Vieweg, 2. Auflage, (2004)

[7] Birkhoff, G.,
Combinatorial Relations in Projective Geometries,
Annals of Mathematics Second Series, Vol. 36, No. 3 (Jul., 1935), pp. 743-748

[8] Bonin, J.,
A Note on the Sticky Matroid Conjecture,
Ann. Comb. 15 (2011) 619-624

[9] Hughes, D., Piper F.,
Projective Planes.,
Springer-Verlag, New York, 1973.

[10] Kahn, J.,
Locally projective-planar lattices which satisfy the Bundle Theorem,
Mathematische Zeitschrift 175, (1980), 219-247

[11] Kantor, W.,
Characterizations of finite projective and affine spaces,
Can. J. Math. 21 (1969), 64-75.

[12] Kantor, W.,
Dimension and embedding theorems for geometric lattices,
Journal of Combinatorial Theory, Series A 17, 173-195 (1974)

[13] Kreuzer, A.,
Zur Theorie der Bündelräume,
Habilitationsschrift TU München 1992. Beiträge zur Geometrie und Algebra, 22, TUM-Bericht M9311, München:179p, 1993.

[14] Lamprecht, E.,
Lineare Algebra 1,
Birkhäsuer Basel (zweite Aufllage 1992)

[15] Metsch, K.,
Embedding theorems for locally projective three-dimensional linear spaces,
Journal of Combinatorial Theory, Series A 51, 161-168 (1989)

[16] Metsch, K.,
Embedding theorems for locally projective three-dimensional linear spaces,
Discrete Math. 174, 227-245 (1997)

[17] Oxley, J.G.,
Matroid Theory,
Oxford University Press (1992)

[18] Percsy, N.,
Locally embeddable geometries,
Archiv der Mathematik 37(1):184-192 · December 1981

[19] Pickert, G.,
Projektive Ebenen,
Springer (1955) (zweite Auflage 1975)

[20] Poljak, S., Turzik, D.,
A note on sticky matroids,
Discrete Math. 42, 119-123 (1982)

[21] Siebenmann, L.C.,
A characterization of free projective planes,
Pacific J. Math. Volume 15, Number 1 (1965), 293-298.

[22] Welsh, D.J.A.,
Matroid Theory,
Academic Press, London, New York, 1976

[23] Wille, R.,
On incidence geometries of grade n,
nicht mehr erhältlich (1967)

[24] Witt, E.,
Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu,
Abh. Hamburg (1938), 256-264

[25] Witt, E.,
Über Steinersche Systeme,
Abh. Hamburg (1938), 265-275