FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Schriftliche Präsentation im
Zusatzstudiengang Master im Fach Mathematik – Methoden und Modelle
zum Thema:

LP-Modelle zu Arbitrage-Detektion und Optionsbewertung

Prüfer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Eingereicht von: Ulrich Damerau

Matrikel-Nr.: 2298732

Abgabetermin: 29. November 2012

Gliederung

1. Ziel der Arbeit

In der nachfolgenden Arbeit soll untersucht werden, wie mit Hilfe der linearen Optimierung festgestellt werden kann, ob Arbitragemöglichkeiten bei Finanzprodukten (wie z.B. Aktien und Optionen) bestehen. Dabei soll auch auf den Zusammenhang zwischen der Arbitrage und den so genannten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten, die sich aus den Kursen der Finanzprodukte ableiten lassen, eingegangen werden. Andererseits können auf Basis der risikolosen Wahrscheinlichkeiten Finanzprodukte, wie z.B. Optionen, bewertet werden.

Zunächst erfolgen die Untersuchungen anhand eines Portefeuilles aus einer Aktie, einer Kaufoption und einer Verkaufsoption im Rahmen des Binomialmodells der Optionspreistheorie, um die dort gewonnenen Ergebnisse anschießend unter allgemeineren Modellannahmen zu verifizieren. Abschließend werden die gefundenen Ergebnisse noch anhand eines Beispiels verdeutlicht.

2. Grundlagen

2.1 Optionen

Der Käufer einer Kaufoption (Call) erwirbt das Recht, innerhalb eines festgelegten Zeitraums (Optionsfrist) vom Verkäufer der Option (Stillhalter) die Lieferung einer bestimmten Anzahl der dem Geschäft zugrundeliegenden Wertpapiere zu einem beim Abschluss des Optionsgeschäfts vereinbarten Preis (Basispreis) zu verlangen. Für dieses Recht bezahlt der Käufer der Option dem Stillhalter bei Abschluss des Optionsgeschäfts den Optionspreis. Bei einer Verkaufsoption (Put) erwirbt der Käufer der Option das Recht, innerhalb der Optionsfrist vom Stillhalter die Abnahme einer bestimmten Anzahl von Wertpapieren zum Basispreis zu verlangen. Kann der Käufer sein Recht über die gesamte Optionsfrist ausüben, handelt es sich um eine amerikanische Option. Ist die Ausübung nur am Ende der Optionsfrist (Verfalltag) möglich, spricht man von einer europäischen Option.[1] Nachfolgend sollen nur Optionen vom europäischen Typ betrachtet werden.[2] Hinsichtlich der zugrundeliegenden Wertpapiere soll vereinfachend von Aktien ausgegangen werden. Eine Option soll dann zum Kauf bzw. Verkauf von genau einer Aktie berechtigen.

---

[1] Vgl. PERRIDON/STEINER (1991) S. 166 f.

[2] Da der Marktpreis einer Option normalerweise über dem inneren Wert liegt (s. Fußnote 4), ist eine vorzeitige Ausübung nicht sinnvoll. Es kann daher auf die Betrachtung von amerikanischen Optionen verzichtet werden. Siehe auch STEINER/BRUNS (1993) S. 129.

Der Käufer einer Option hat das Recht, aber nicht die Pflicht, die Option auszuüben und vom Stillhalter die Lieferung (Call) bzw. die Abnahme (Put) der Wertpapiere zum Basispreis zu verlangen. Er wird eine Kaufoption nur dann am Verfalltag t ausüben, wenn der Basispreis $B > 0$ unter dem entsprechenden Aktienkurs K_t im Zeitpunkt t liegt, da er so die Aktie günstiger erwerben kann. Anderenfalls wird er die Option verfallen lassen, da sie keinen ökonomischen Wert besitzt. Eine Verkaufsoption wird er ausüben, wenn der Basiskurs über dem Aktienkurs liegt, da er so die entsprechende Aktie teurer verkaufen kann. Damit hat eine Option am Verfalltag t folgenden Wert:[3]:

Kaufoption $$C_t(B; K_t) = \max\,(K_t - B; 0) \qquad [1]$$

Verkaufsoption $$P_t(B; K_t) = \max\,(B - K_t; 0) \qquad [2]$$

Nach diesen Formeln bestimmt sich auch der so genannte innere Wert einer Option im Zeitpunkt t.[4]

2.2 Bestimmung des Optionspreises mit dem Binomialmodell

Es soll zunächst ein einfaches Modell der Optionspreisbewertung betrachtet werden. [5] Beim Binomialmodell sind im Einperiodenfall nur Transaktionen in den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ möglich. Eine Aktie kann in $t = 0$ zum Kurs von K_0 gekauft oder verkauft werden, wobei auch Leerverkäufe zulässig sind. In $t = 1$ sind zwei Aktienkurse möglich, der Kurs kann auf K_1^+ steigen oder auf K_1^- sinken. Optionen können in $t = 0$ gekauft oder verkauft werden und verfallen in $t = 1$. Im Zeitpunkt $t = 0$ können beliebige Geldbeträge S_0 zum Zinssatz $r \geq 0$ risikolos für eine Periode angelegt ($S_0 > 0$) oder aufgenommen ($S_0 < 0$) werden (Sollzins = Habenzins). Es wird also ein vollkommener Kapitalmarkt unterstellt.[6]

Unter diesen Modellannahmen kann der Wert einer Kaufoption in $t = 0$ dadurch ermittelt werden, dass die beiden möglichen Aktienkurse in $t = 1$ aus Kaufoptionen und sicherer Geldanlage oder -aufnahme nachgebildet werden, wobei C_1^+ der Wert der Kaufoption bei positiver Aktienkursentwicklung und C_1^- der Wert der Kaufoption bei negativer Kursentwicklung in $t = 1$ sind.[7] Die Größe n

[3] Vgl. hierzu STEINER/BRUNS (1993) S. 125 f und FREY/SCHMIDT (2006) S. 10.
[4] Die Differenz zwischen dem Marktpreis einer Option und ihrem inneren Wert ist die Zeitprämie, siehe hierzu PERRIDON/STEINER (1991) S. 170-173. Nachfolgend soll von einer Zeitprämie von null ausgegangen werden.
[5] Siehe zu den nachfolgenden Ausführungen insbes. STEINER/BRUNS (1993) S. 128-135, 143-146.
[6] Vgl. WÖHE/DÖRING (2000) S. 636.
[7] $C_1^+ > C_1^-$, siehe Formel [1].

gibt die Anzahl der Optionen an.[8] Dabei bedeutet $n > 0$ den Kauf von Optionen und $n < 0$ den Verkauf von Optionen.

$$K_1^+ = nC_1^+ + (1+r)S_0 \qquad [3]$$

$$K_1^- = nC_1^- + (1+r)S_0 \qquad [4]$$

Wenn in $t = 1$ die Ergebnisse bei direkter Aktienanlage und bei der Nachbildung aus Optionen und Geldanlage identisch sind, müssten auch in $t = 0$ beide Alternativen identische Werte haben[9]. Der zu zahlende Optionspreis, also der Wert der Kaufoption in $t = 0$, wird mit C_0 bezeichnet.

$$K_0 = nC_0 + S_0 \qquad [5]$$

Wird [3] von [4] abgezogen, ergibt sich nach entsprechender Umstellung eine Formel für die Zahl der Optionen n:[10]

$$n = \frac{K_1^+ - K_1^-}{C_1^+ - C_1^-} > 0. \qquad [6]$$

Wird [3] nach S_0 umgestellt und [6] eingesetzt, ergibt sich eine Formel für den Geldbetrag S_0:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{C_1^+ K_1^- - C_1^- K_1^+}{C_1^+ - C_1^-}. \qquad [7]$$

Wird [5] nach C_0 umgestellt und anschließend [6] sowie [7] eingesetzt, kann der Optionspreis in $t = 0$ ermittelt werden.[11]

$$C_0 = \frac{1}{n}(K_0 - S_0) \qquad [8]$$

$$C_0 = \frac{C_1^+ K_0 - C_1^- K_0}{K_1^+ - K_1^-} - \frac{1}{1+r} \cdot \frac{C_1^+ K_1^- - C_1^- K_1^+}{K_1^+ - K_1^-} \qquad [9]$$

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{(1+r)K_0 - K_1^-}{K_1^+ - K_1^-} C_1^+ + \frac{K_1^+ - (1+r)K_0}{K_1^+ - K_1^-} C_1^- \right) \qquad [10]$$

Die beiden möglichen Aktienkurse in $t = 1$ können auch aus Verkaufsoptionen und einer Geldanlage bzw. Geldaufnahme nachgebildet werden. P_1^+ ist dabei der Wert der Verkaufsoption bei positiver Aktienkursentwicklung in $t = 1$ und P_1^- ist der Wert bei negativer Kursentwicklung.[12] P_0 ist der Optionspreis in $t = 0$.

$$K_1^+ = nP_1^+ + (1+r)S_0 \qquad [11]$$

$$K_1^- = nP_1^- + (1+r)S_0 \qquad [12]$$

---

[8] Es soll angenommen werden, dass auch nicht-ganzzahlige Stückzahlen bei Optionen und Aktien zulässig sind.

[9] Sollte dies nicht der Fall sein, würde sich sofort eine Arbitragemöglichkeit ergeben. Siehe hierzu die nachfolgenden Kapitel 3, 4 und 5.

[10] Vgl. STEINER/BRUNS (1993) S. 132 und SHREVE (1997) S. 61.

[11] Vgl. CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 63.

[12] $P_1^+ < P_1^-$, siehe Formel [2].

Daraus ergeben sich folgende Formeln:

$$n = \frac{K_1^+ - K_1^-}{P_1^+ - P_1^-} < 0, \quad [13]$$

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{P_1^+ \, K_1^- - P_1^- \, K_1^+}{P_1^+ - P_1^-}, \quad [14]$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{(1+r)K_0 - K_1^-}{K_1^+ - K_1^-} P_1^+ + \frac{K_1^+ - (1+r)K_0}{K_1^+ - K_1^-} P_1^- \right). \quad [15]$$

2.3 Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

Die Formeln [10] und [15] sollen näher betrachtet werden. Durch

$$q^+ = \frac{(1+r)K_0 - K_1^-}{K_1^+ - K_1^-} \quad [16]$$

und

$$q^- = \frac{K_1^+ - (1+r)K_0}{K_1^+ - K_1^-} \quad [17]$$

vereinfachen sich die beiden Formeln zu

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ \, C_1^+ + q^- \, C_1^-) \quad [18]$$

und

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ \, P_1^+ + q^- \, P_1^-).\text{[13]} \quad [19]$$

Da $0 \leq K_1^- < (1+r)K_0 < K_1^+$ angenommen werden kann,[14] ergibt sich $0 < q^+ < 1$ und $0 < q^- < 1$. Außerdem ist $q^+ + q^- = 1$, was durch Nachrechnen leicht zu verifizieren ist. Die Größen q^+ und q^- werden als risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten bezeichnet.[15]

Werden die beiden Aktienkursentwicklungen in $t = 1$ mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gewichtet, ergibt sich

$$q^+ \, K_1^+ + q^- \, K_1^- = \frac{(1+r)K_0 - K_1^-}{K_1^+ - K_1^-} K_1^+ + \frac{K_1^+ - (1+r)K_0}{K_1^+ - K_1^-} \, K_1^- = (1+r)K_0.$$

Damit bestimmt sich der Wert der Aktie in $t = 0$ durch folgende Formel:

---

[13] Vgl. SHREVE (1997) S. 61 und KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010) S. 323, 325.

[14] Bei $K_1^- < K_1^+ < (1+r)K_0$ wird durch die risikolose Anlage stets ein besseres Ergebnis erzielt als bei der risikobehafteten Aktienanlage. Bei $(1+r)K_0 < K_1^- < K_1^+$ wird durch die risikobehaftete Aktienanlage stets ein besseres Ergebnis erzielt als bei der risikolosen Anlage. Beide Fälle sind damit ökonomisch auszuschließen. Siehe auch SHREVE (1997) S. 61 und KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010) S 325.

[15] Vgl. CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 63 f und KWOK (2008) S. 54. In KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010) S. 325 wird dagegen der Begriff „Pseudowahrscheinlichkeit" verwendet.

$$K_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ K_1^+ + q^- K_1^-). \qquad [20]$$

Bei [18], [19] und [20] bestimmt sich somit der Wert in $t = 0$ jeweils aus den abgezinsten und mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Werte aus $t = 1$.

2.4 Arbitrage

Bei einer Arbitrage nutzen Marktteilnehmer Kursunterschiede auf verschiedenen Märkten (z.B. Kassamarkt für Aktien und Markt für Optionen auf Aktien) aus, um ohne Kapitaleinsatz risikolos Gewinne zu erzielen;[16] Verluste können dabei nicht eintreten. Nachfolgend soll angenommen werden, dass keine laufenden Erträge (z.B. Dividenden), keine Transaktionskosten (z.B. Provisionen beim Kauf oder Verkauf) und keine Aufwendungen für das Halten der Positionen (z.B. Depotgebühren) anfallen, so dass für die Arbitrage nur die aktuellen und künftigen Kurse zu betrachten sind.

Der Gewinn des Arbitrageurs kann unabhängig von den Einwicklungen des Kapitalmarktes (Umweltzuständen) immer in derselben Höhe eintreten, er kann aber auch von den Umweltzuständen abhängig sein.[17] Je nach gewählter Strategie fällt der Gewinn des Arbitrageurs sofort (in $t = 0$) oder in der Zukunft (hier in $t = 1$) an.[18]

Ist die Zahl der Finanzprodukte, deren Kursentwicklungen in $t = 1$ voneinander linear unabhängig sind, gleich der Zahl der möglichen Umweltzustände in $t = 1$, liegt ein vollständiger Kapitalmarkt vor.[19] Dann kann durch entsprechende Käufe bzw. Verkäufe der Finanzprodukte jede beliebige Wertentwicklung in Abhängigkeit von den Umweltzuständen dargestellt werden.[20] Damit ist es auch möglich, Arbitragegewinne, die nur bei bestimmten Umweltzuständen eintreten, so umzuwandeln, dass ein Gewinn bei jedem Umweltzustand in gleicher Höhe anfällt. Für eine Aktie gibt es durch die Wahl unterschiedlicher Basispreise eine Vielzahl von möglichen Kauf- und Verkaufsoptionen. Damit lässt sich leicht ein Portefeuille konstruieren, bei denen die Zahl der linear unabhängigen

[16] Vgl. BEIKE/SCHLÜTZ (1999) S. 500-503 und LEOBACHER (2008) S. 29 f.
[17] Ähnliche Überlegungen bei KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010) S. 155-157.
[18] Vgl. CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 62.
[19] Vgl. FREY/SCHMIDT (2006) S. 17 f, ähnlich bei KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010) S. 166-169.
[20] Siehe FREY/SCHMIDT (2006) S. 18.

Kursentwicklungen der Zahl der möglichen Umweltzustände entspricht.[21] Daher soll nachfolgend von einem vollständigen Kapitalmarkt ausgegangen werden.

Durch die Annahme, dass eine unbeschränkte und risikolose Geldanlage- bzw. Geldaufnahmemöglichkeit zum einheitlichen Zinssatz r möglich ist (vollkommener Kapitalmarkt), können Beträge, die in der Zukunft anfallen, stets durch Abzinsung auf den Zeitpunkt $t = 0$ transferiert werden.[22] Für einen in $t = 1$ sicher anfallenden Arbitragegewinn G_1 bedeutet dies, dass dieser im Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $G_0 = G_1 \cdot (1 + r)^{-1}$ hat.

Wird sowohl ein vollständiger als auch ein vollkommener Kapitalmarkt unterstellt, können Arbitragegewinne als von den möglichen Umweltzuständen unabhängiger Wert im Zeitpunkt $t = 0$ dargestellt werden. Um festzustellen, ob es eine Arbitragemöglichkeit gibt, ist es unter diesen Voraussetzungen ausreichend, lediglich diesen risikolosen Arbitragegewinn G_0 zu betrachten.

3. Untersuchung der Arbitragemöglichkeiten

3.1 Aufstellung eines linearen Optimierungsprogramms

Will ein Arbitrageur aus den bisher betrachteten Finanzprodukten (Aktie, Kaufoption, Verkaufsoption, risikolose Anlage) in $t = 0$ einen maximalen Arbitragegewinn $G_0 \geq 0$ erzielen, so ist das folgende lineare Optimierungsprogramm [LOP1] zu lösen.[23]

$$\text{max: } G_0 \qquad \text{[LOP1 a]}$$

$$\text{unter: } K_0\ n_K + C_0\ n_C + P_0\ n_P + S_0 + G_0 = 0 \qquad \text{[LOP1 b]}$$

$$K_1^+\ n_K + C_1^+\ n_C + P_1^+\ n_P + (1 + r)S_0 = 0 \qquad \text{[LOP1 c]}$$

$$K_1^-\ n_K + C_1^-\ n_C + P_1^-\ n_P + (1 + r)S_0 = 0 \qquad \text{[LOP1 d]}$$

Dabei ist n_K die Anzahl, der in $t = 0$ gekauften ($n_K > 0$) bzw. verkauften ($n_K < 0$) Aktien. Die Anzahl der in $t = 0$ gekauften bzw. verkauften Kaufoptionen ist n_C, die der Verkaufsoptionen ist n_P. Der Betrag der risikolosen Geldanlage bzw. Aufnahme

---

[21] Gibt es v Umweltzustände mit unterschiedlichen Aktienkursen, dann lässt sich ein Portefeuille aus einer Aktie und $v - 1$ Kaufoptionen leicht konstruieren, so dass die Kursentwicklungen der v Finanzprodukte in $t = 1$ linear unabhängig sind. Hierzu wählt man die Basispreise der Kaufoptionen so, dass sich bei der j-ten Option in j Umweltzuständen ein Wert von null ergibt (siehe Formel [1]). Nach Zeilentausch liegt dann eine Dreiecksmatrix vor, womit die lineare Unabhängigkeit offensichtlich ist.

[22] Vgl. SÜCHTING (1989) S. 252-254.

[23] Nach dem Ansatz von CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 65 bzw. TÜTÜNCÜ (2003) S. 33 würde $K_0 n_K + C_0 n_C + P_0 n_P + S_0$ minimiert werden, was aber ökonomisch gleichbedeutend mit der Maximierung von G_0 ist.

in $t = 0$ ist S_0, bei einem Zinssatz von r wird daraus in $t = 1$ ein Betrag von $(1 + r)S_0$. Die Variablen n_K, n_C, n_P und S_0 sind nicht vorzeichenbeschränkt. Für G_0 kann auf eine Vorzeichenbeschränkung verzichtet werden, da der Arbitrageur immer die Möglichkeit des „Nichtstuns" ($n_K = n_C = n_P = S_0 = 0$) hat und somit ein negatives Arbitrageergebnis im Rahmen einer Maximierung automatisch ausgeschlossen ist. Dieses „Nichtstun" führt auch dazu, dass [LOP 1] nicht unzulässig sein kann.

In der Zielfunktion [LOP1 a] wird der in $t = 0$ anfallende Arbitragegewinn G_0 maximiert. Die Nebenbedingung [LOP1 b] steht für die Handlungsmöglichkeiten des Arbitrageurs im Zeitpunkt $t = 0$. Unter Berücksichtigung seines Gewinns G_0 dürfen keine Beträge übrigbleiben, in [LOP1 b] muss daher „= 0" stehen. Die Nebenbedingung [LOP1 c] steht für eine positive Aktienkursentwicklung in $t = 1$, die Nebenbedingung [LOP1 d] für eine negative Entwicklung in $t = 1$. Da Arbitragegewinne risikolos in $t = 0$ anfallen sollen[24], muss das Gesamtergebnis aller getätigten Geschäfte in $t = 1$ sowohl bei positiver als auch bei negativer Aktienkursentwicklung null sein. Somit müssen in [LOP1 c] und [LOP1 d] jeweils „= 0" stehen.

Gibt es keine Arbitragemöglichkeit, dann ergibt sich aus [LOP 1] ein optimaler Zielfunktionswert von $G_0^* = 0$. Sollte dagegen eine Arbitragemöglichkeit existieren, dann wird der Arbitrageur unendlich reich ($G_0^* = \infty$), da es hier weder Restriktionen hinsichtlich des Umfangs der getätigten Geschäfte, noch Auswirkungen auf die Kurse (K_0, C_0, P_0) durch die Arbitragegeschäfte gibt.[25] In diesem Fall ist [LOP 1] unbeschränkt.

3.2 Untersuchung des dualen Optimierungsprogramms

Das zu [LOP1] duale lineare Optimierungsprogramm [LOP2] lautet:[26]

$$
\begin{array}{llll}
\text{min:} & 0\; y_0 + \quad 0 \quad y_1^+ + \quad 0 \quad y_1^- & & \text{[LOP2 a]} \\
\text{unter:} & K_0\, y_0 + \quad K_1^+\; y_1^+ + \quad K_1^-\; y_1^- & = 0 & \text{[LOP2 b]} \\
& C_0\, y_0 + \quad C_1^+\; y_1^+ + \quad C_1^-\; y_1^- & = 0 & \text{[LOP2 c]} \\
& P_0\, y_0 + \quad P_1^+\; y_1^+ + \quad P_1^-\; y_1^- & = 0 & \text{[LOP2 d]} \\
& y_0 + (1+r)\, y_1^+ + (1+r) y_1^- & = 0 & \text{[LOP2 e]} \\
& y_0 & = 1 & \text{[LOP2 f]}
\end{array}
$$

[24] Siehe Abschnitt 2.4.

[25] Die Geschäfte der Arbitrageure führen in der Realität zu Kursänderungen, die gerade die Arbitragemöglichkeiten beseitigen; vgl. BEIKE/SCHLÜTZ (1999) S. 503.

[26] Siehe hierzu auch NOZICKA/GUDDAT/HOLLATZ (1972) S. 53.

Die Variablen y_0, y_1^+ und y_1^- sind nicht vorzeichenbeschränkt. Ist [LOP 2] lösbar, so ergibt sich immer ein Zielfunktionswert von null. Damit kann [LOP 2] nie unbeschränkt sein. Da nur ein Zielfunktionswert möglich ist, ist eine zulässige Lösung auch eine optimale Lösung.

Nach [LOP2 f] gilt $y_0 = 1$. Die Nebenbedingungen [LOP2 b], [LOP2 c] und [LOP2 d] können mit $y_0 = 1$ auch wie folgt geschrieben werden:

$$K_0 = -K_1^+ y_1^+ - K_1^- y_1^- \qquad \text{[LOP2 b']}$$

$$C_0 = -C_1^+ y_1^+ - C_1^- y_1^- \qquad \text{[LOP2 c']}$$

$$P_0 = -P_1^+ y_1^+ - P_1^- y_1^- \qquad \text{[LOP2 d']}$$

Werden $y_1^+ = \frac{-1}{1+r} q^+$ und $y_1^- = \frac{-1}{1+r} q^-$ eingesetzt, ergeben sich aus [LOP2 b'], [LOP2 c'] und [LOP2 d'] die bereits bekannten Gleichungen

$$K_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ K_1^+ + q^- K_1^-), \qquad [20]$$

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ C_1^+ + q^- C_1^-), \qquad [18]$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (q^+ P_1^+ + q^- P_1^-). \qquad [19]$$

Aus der Nebenbedingung [LOP2 e] folgt dann, dass $q^+ + q^- = 1$ ist. Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten q^+ und q^- sind eindeutig bestimmt, wenn [LOP2] lösbar ist.[27] Unter der ökonomisch sinnvollen Annahme $0 \leq K_1^- < (1+r)K_0 < K_1^+$ gilt dann zusätzlich $0 < q^+ < 1$ bzw. $0 < q^- < 1$.[28] Ist also [LOP2] zulässig und damit auch beschränkt, dann können aus der Lösung die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

Ist dagegen [LOP 2] unzulässig, dann hat das lineare Gleichungssystem aus [LOP2 b] bis [LOP2 f] keine Lösung. Es können keine risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.

3.3 Zusammenhang zwischen primalem und dualem Optimierungsprogramm

Durch das primale Optimierungsprogramm [LOP1] kann ermittelt werden, ob eine Arbitragemöglichkeit besteht oder nicht. Im Falle einer Arbitragemöglichkeit ist der optimale Zielfunktionswert $G_0^* = \infty$, dann ist [LOP1] unbeschränkt. Falls kein Arbitragegewinn erzielt werden kann, ist $G_0^* = 0$. Dann ist [LOP1] zulässig und beschränkt.

---

[27] Das Gleichungssystem aus [LOP2 b'], [LOP2 c'], [LOP2 d'] und $q^+ + q^- = 1$ hat bei Zulässigkeit genau eine Lösung.

[28] Siehe Fußnote 14.

Mit dem dualen Optimierungsprogramm [LOP2] können, wenn es zulässig (lösbar) und damit auch beschränkt ist, die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Dann ergibt sich als Zielfunktionswert $0y_0 + 0y_1^+ + 0y_1^- = 0$. Da es nur einen zulässigen Zielfunktionswert gibt, ist dies auch der optimale Zielfunktionswert. Ist [LOP2] dagegen unzulässig (nicht lösbar), dann können risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten nicht ermittelt werden.

Nach dem Dualitätssatz der linearen Optimierung gilt: Ist das primale Optimierungsprogramm zulässig und beschränkt, so ist auch das duale Optimierungsprogramm zulässig und beschränkt.[29] Nach dem Dualitätssatz (starke Dualität) gilt dann zusätzlich, dass der optimale Zielfunktionswert des primalen Optimierungsprogramms mit dem optimalen Zielfunktionswert des dualen Programms übereinstimmt.[30] Bestehen keine Arbitragemöglichkeiten, d.h. [LOP1] ist zulässig und beschränkt mit optimalem Zielfunktionswert null, dann gibt es risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, d.h. [LOP2] ist zulässig und beschränkt mit optimalem Zielfunktionswert null. Da das duale Programm eines dualen Optimierungsprogramms wieder das primale Programm ist,[31] kann die Aussage auch umgekehrt werden: Gibt es risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, dann bestehen keine Arbitragemöglichkeiten.

Ist das primale lineare Optimierungsprogramm unbeschränkt, so ist das duale Optimierungsprogramm nach dem Dualitätssatz unzulässig.[32] Bestehen Arbitragemöglichkeiten, d.h. [LOP1] ist unbeschränkt, dann können keine risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden, da [LOP2] unzulässig ist.

4. Verallgemeinerung

4.1 Suche nach Arbitragemöglichkeiten

Die Erkenntnisse aus dem vorherigen Kapitel sollen verallgemeinert werden. Es soll nun eine größeren Zahl von Finanzprodukten (z.B. Aktie und die entsprechenden Kauf-/Verkaufsoptionen zu unterschiedlichen Basispreisen)

---

[29] Siehe HOCHSTÄTTLER (2012) S. 323, HOCHSTÄTTLER (2004) S. 16 oder TÜTÜNCÜ (2003) S. 16. Der Dualitätssatz wird in der Regel für eine Normalform (z.B.: $\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$) angegeben, durch entsprechende Umformung kann jedes lineare Optimierungsprogramm in diese Normalform überführt werden; vgl. NOZICKA/GUDDAT/HOLLATZ (1972) S. 45-55.

[30] Siehe HOCHSTÄTTLER (2012) S. 323, HOCHSTÄTTLER (2004) S. 17 oder TÜTÜNCÜ (2003) S. 17.

[31] Vgl. GRÖTSCHEL (2010) S. 58.

[32] Siehe PETERSON (2012) S. 95 oder HOCHSTÄTTLER (2012) S. 323.

vorliegen.[33] Ebenfalls sollen auch mehr als zwei künftige Kursentwicklungen möglich sein.

Seien $F_0^1, F_0^2, \ldots, F_0^m$ die Kurse (Preise) der Finanzprodukte $1, 2, \ldots, m$ im Zeitpunkt $t = 0$. Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v$ die möglichen Umweltzustände im Zeitpunkt $t = 1$. In Abhängigkeit von den Umweltzuständen ω_j (mit $j = 1, 2, \ldots, v$ und $v \geq 2$) ergeben sich die Kurse der Finanzprodukte in $t = 1$, also ist $F_1^i(\omega_j)$ der Kurs für das Produkt i beim Umweltzustand ω_j. Für jedes Finanzprodukt soll es mindestens einen Umweltzustand ω_j geben mit $F_1^i(\omega_j) < (1+r)\, F_0^i$ und mindestens einen Umweltzustand ω_k geben mit $F_1^i(\omega_k) > (1+r)\, F_0^i$. Nur zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ sollen Transaktionen (Käufe und Verkäufe) möglich sein. Mit $n_1, n_2, \ldots, n_m$ soll die Stückzahl der in $t = 0$ gekauften ($n_i > 0$) bzw. verkaufen ($n_i < 0$) Finanzprodukte bezeichnet werden. Restriktionen für die Stückzahl soll es nicht geben. Ebenfalls soll wieder eine risikolose Geldanlage- oder Geldaufnahmemöglichkeit in unbegrenzter Höhe zum einheitlichen Zinssatz r existieren, wobei S_0 den Anlagebetrag ($S_0 > 0$) bzw. Aufnahmebetrag ($S_0 < 0$) in $t = 0$ angibt. Auch soll weiterhin ein vollständiger Kapitalmarkt unterstellt werden, womit $m \geq v$.

Unter diesen Annahmen kann das folgende lineare Optimierungsprogramm [LOP3] aufgestellt werden, wo G_0, der Arbitragegewinn in $t = 0$, maximiert wird:

$$\text{max:}\quad G_0 \qquad \text{[LOP3 a]}$$

$$\text{unter: } G_0 + S_0 + \sum_{i=1}^{m} F_0^i \cdot n_i = 0 \qquad \text{[LOP3 b]}$$

$$(1+r)S_0 + \sum_{i=1}^{m} F_1^i(\omega_j) \cdot n_i = 0 \quad \text{für alle } j = 1,2,\ldots,v \qquad \text{[LOP3 c]}$$

Die Variablen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sowie S_0 und G_0 sind nicht vorzeichenbeschränkt.

Da immer $n_i = 0$ für alle $i = 1,2,\ldots,m$ und $S_0 = 0$ möglich ist („Nichtstun"), kann [LOP 3] nicht unzulässig sein. Auch ergibt sich damit $G_0^* \geq 0$. Findet sich keine Arbitragemöglichkeit, so ist $G_0^* = 0$ der maximale Zielfunktionswert; das Optimierungsprogramm [LOP3] ist dann zulässig und beschränkt. Gibt es eine

---

[33] Bei Aktien und den entsprechenden Optionen gibt es einen formelmäßigen Zusammenhang zwischen den Werten in $t = 1$ (siehe die Formeln [1] und [2]). Theoretisch könnte auch nach Arbitragemöglichkeiten zwischen verschiedensten Finanzprodukten (z.B. zwischen Aktienoptionen und Kontrakten an einer Warenbörse) gesucht werden, wobei mögliche Zusammenhänge zwischen den Werten in $t = 1$ nur empirisch (aus Vergangenheitswerten) hergeleitet werden können, was aber eine völlig risikolose Arbitrage dann ausschließt.

Arbitragemöglichkeit, so wird sie der Arbitrageur im Rahmen seiner Gewinnmaximierung unendlich oft durchführen, denn für $n_1, n_2, \dots, n_m$ und S_0 gibt es keine Beschränkungen. Es ist dann $G_0^* = \infty$, somit ist [LOP3] unbeschränkt.

Wenn es eine Arbitragemöglichkeit gibt, dann möchte der Arbitrageur natürlich wissen, was er dazu tun muss. Die Lösung von [LOP3] ist hierbei wenig aufschlussreich: Bei einem unbeschränkten linearen Optimierungsprogramm führt eine Pivotspalte mit nur Einträgen ≤ 0 zum Abbruch des Simplex-Algorithmus.[34] Aus dieser Spalte kann lediglich die Richtung der unbeschränkten Optimierung, also die Arbitragerichtung, abgelesen werden.[35] Werden jedoch zum Optimierungsprogramm [LOP3] noch die Restriktionen $n_i \leq 1$ und $-n_i \leq 1$ für alle $i = 1, 2, \dots, m$ eingefügt,[36] dann kann in $t = 0$ von allen Finanzprodukten maximal ein Stück ge- oder verkauft werden. Die Optimallösung dieses erweiterten Optimierungsprogramms [LOP3 erw.] stellt eine Handlungsanweisung für den Arbitrageur dar, die er dann mehrfach (auch unendlich oft) wiederholen kann. Dabei verdient der Arbitrageur bei jeder Wiederholung den optimale Zielfunktionswert $G_0^* > 0$ von [LOP3 erw.].[37]

4.2 Existenz von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten

Für die Umweltzustände $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$ seien $q_1, q_2, \dots, q_v$ mit $q_j \geq 0$ für alle $j = 1, 2, \dots, v$ die entsprechenden risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Dabei muss gelten:[38]:

$$F_0^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{v} q_j \cdot F_1^i(\omega_j) \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m \qquad [21]$$

und

$$\sum_{j=1}^{v} q_j = 1. \qquad [22]$$

Im vorherigen Kapital wurde festgestellt, dass risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten nur genau dann existieren, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Diese

---

[34] Vgl. HOCHSTÄTTLER (2012) S. 333 oder HOCHSTÄTTLER (2004) S. 22.
[35] Vgl. SCHNEIDER (2004) S. 19, wo ein unbeschränktes Minimierungsproblem behandelt wird.
[36] $n_i \leq 1$ und $-n_i \leq 1$ ist äquivalent zu $-1 \leq n_i \leq 1$.
[37] Dies ist nur möglich, wenn sich die Kurse durch den Arbitrageprozess nicht ändern; vgl. LEOBACHER (2008) S. 30.
[38] Siehe hierzu Abschnitt 2.3 mit den Formeln [18], [19] und [20]; vgl. auch CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 64 und FREY/SCHMIDT (2006) S. 22.

Aussage soll für die in diesem Kapitel getroffenen Annahmen (größere Zahl an Finanzprodukten, zwei ober mehr Umweltzustände) bewiesen werden.[39]

Zum primalen linearen Optimierungsprogramm $\max\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$ mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gehört das duale Optimierungsprogramm $\min\{b^T y \mid y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c\}$.[40] Also besitzt das Optimierungsprogramm [LOP 3] das folgende duale Programm [LOP 4]:

$$\text{min:} \quad 0y_0 + \sum_{j=1}^{v} 0y_j \qquad \text{[LOP4 a]}$$

$$\text{unter:} \quad y_0 = 1 \qquad \text{[LOP4 b]}$$

$$y_0 + \sum_{j=1}^{v} (1+r)y_j = 0 \qquad \text{[LOP4 c]}$$

$$F_0^i y_0 + \sum_{j=1}^{v} F_1^i(\omega_j) \cdot y_j = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m \qquad \text{[LOP4 d]}$$

Die Variablen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_v$ sind nicht vorzeichenbeschränkt.

Nach [LOP4 b] gilt $y_0 = 1$. Werden die Gleichungen [LOP4 c] und [LOP4 d] umgestellt und wird anschließend $y_0 = 1$ eingesetzt, ergibt sich:

$$-\sum_{j=1}^{v} (1+r)y_j = 1 \qquad \text{[LOP4 c']}$$

$$F_0^i = -\sum_{j=1}^{v} F_1^i(\omega_j) \cdot y_j \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m \qquad \text{[LOP4 d']}$$

Wird nun $y_j = \frac{-1}{1+r} q_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, v$ eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen [22] und [21]:

$$\sum_{j=1}^{v} q_j = 1, \qquad [22]$$

$$F_0^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{v} q_j \cdot F_1^i(\omega_j) \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m. \qquad [21]$$

Wenn das lineare Gleichungssystem aus [21] und [22] lösbar ist, dann gibt es auch eine Lösung mit $q_j \geq 0$ für alle $j = 1, 2, \dots, v$, da es nach den Modellannahmen für

---

39 Vgl. CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005) S. 64-66 oder TÜTÜNCÜ (2003) S. 33-34, ähnlich bei FREY (2005) S. 29-31. Auf anderer Weise erfolgt der Beweis hierzu bei KWOK (2008) S. 44-47.

40 Vgl. GRÖTSCHEL (2010) S. 58, HOCHSTÄTTLER (2004) S. 17 oder NOZICKA/GUDDAT/HOLLATZ (1972) S. 53.

jedes Finanzprodukt mindestens einen Umweltzustand gibt, bei denen das Ergebnis schlechter als bei der risikolosen Anlage ist ($F_1^i(\omega_j) < (1+r)\ F_0^i$), und da es für jedes Finanzprodukt mindestens einen Umweltzustand gibt, bei denen das Ergebnis besser als bei der risikolosen Anlage ist ($F_1^i(\omega_k) > (1+r)\ F_0^i$).

Es gibt die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \dots, q_v$ genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem aus [21] und [22] lösbar ist. Da die Gleichungen [21], [22] äquivalent zu den Nebenbedingungen von [LOP4] sind, gibt es die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten auch genau dann, wenn das lineare Optimierungsprogramm [LOP4] lösbar (zulässig) ist. Aufgrund der Zielfunktion [LOP4 a] ist jede zulässige Lösung von [LOP4] auch optimal und besitzt einen Zielfunktionswert von null. Ist [LOP4] zulässig, dann ist es somit beschränkt. .

Nach dem Dualitätssatz der linearen Optimierung gilt: Ist das primale Optimierungsprogramm zulässig und beschränkt, so ist auch das duale Optimierungsprogramm zulässig und beschränkt.[41] Das heißt, wenn das primale Programm [LOP3] zulässig und beschränkt ist, dann ist auch das duale Programm [LOP4] zulässig und beschränkt. Genau dann, wenn es keine Arbitrage-möglichkeiten gibt, ist [LOP3] beschränkt. Dann ist auch [LOP4] zulässig und beschränkt, womit es die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gibt. Da das duale Programm eines dualen Optimierungsprogramms wieder das primale Optimierungsprogramm ist[42], gilt auch: Ist das duale Programm zulässig und beschränkt, so ist auch das primale Programm zulässig und beschränkt. Es gibt genau dann die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten, wenn [LOP4] zulässig und beschränkt ist. Da dann auch [LOP3] zulässig und beschränkt ist, gibt es dann keine Arbitragemöglichkeiten.

Der Dualitätssatz der linearen Optimierung sagt weiter aus, dass die optimalen Zielfunktionswerte des primalen und dualen Programms gleich sind, wenn beide Optimierungsprogramme zulässig und beschränkt sind (starke Dualität).[43] Ist [LOP3] zulässig und beschränkt, dann hat es einen Zielfunktionswert von null. Ist [LOP4] zulässig und beschränkt, dann hat es ebenfalls einen Zielfunktionswert von null.[44]

[41] Siehe HOCHSTÄTTLER (2012) S. 323 oder HOCHSTÄTTLER (2004) S. 16.
[42] Vgl. GRÖTSCHEL (2010) S. 58.
[43] Vgl. HOCHSTÄTTLER (2012) S. 323, HOCHSTÄTTLER (2004) S. 17 oder GRÖTSCHEL (2010) S. 53.
[44] Analoge Ergebnisse sind bei VARIAN (1987) S. 71 f zu finden.

4.3 Bewertung neuer Finanzprodukte

Die Formel [21] kann auch zur Bewertung neuer Finanzprodukte, z.B. Optionen mit bisher nicht betrachteten Basispreisen, benutzt werden. Seien $F_1^{neu}(\omega_j)$ mit $j = 1, \dots, v$ die Kurse des neuen Finanzprodukts im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit von den Umweltzuständen ω_j. Sind bisher keine Arbitragemöglichkeiten vorhanden gewesen, so gibt es risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \dots, q_v$. Mit diesen kann der arbitragefreie Wert für das neue Finanzprodukt in $t = 0$ ermittelt werden:

$$F_0^{neu} = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{v} q_j \cdot F_1^{neu}(\omega_j) \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m. \qquad [23]$$

Hat das neue Finanzprodukt tatsächlich den Wert F_0^{neu}, dann besteht weiter Arbitragefreiheit. Werden die Optimierungsprogramme [LOP 3] und [LOP 4] um die Daten des neuen Produktes ergänzt, dann sind das primale Programm [LOP 3 neu] und das duale Programm [LOP 4 neu] weiterhin zulässig und beschränkt, beide haben einen Zielfunktionswert von null. Weicht der tatsächliche Wert von F_0^{neu} ab, dann gibt es eine Arbitragemöglichkeit, denn [LOP 3 neu] ist unbeschränkt und [LOP 4 neu] ist unzulässig.

5. Zusammenfassung und abschließendes Beispiel

5.1 Tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse

Die gewonnenen Ergebnisse sollen in der nachfolgenden Tabelle kurz zusammengefasst werden:

primales Optimierungsprogramm [LOP1] bzw. [LOP3]	**duales Optimierungsprogramm** [LOP2] bzw. [LOP4]
Ist das primale Programm zulässig und beschränkt, dann gibt es keine Arbitragemöglichkeit. Der Zielfunktionswert ist stets null. $\Longrightarrow$ Das duale Programm ist ebenfalls zulässig und beschränkt. Die optimalen Zielfunktionswerte des primalen und des dualen Programms sind identisch.	Ist das duale Programm zulässig und beschränkt, dann gibt es risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten. Der Zielfunktionswert ist stets null. $\Longrightarrow$ Das primale Programm ist ebenfalls zulässig und beschränkt. Die optimalen Zielfunktionswerte des primalen und des dualen Programms sind identisch.
Ist das primale Programm unbeschränkt, dann gibt es Arbitragemöglichkeiten. $\Longrightarrow$ Das duale Programm ist unzulässig.	Ist das duale Programm unzulässig, dann gibt es keine risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.
Das primale Programm kann nicht unzulässig sein, da „Nichtstun“ immer möglich ist.	Das duale Programm kann nicht unbeschränkt sein, da der Zielfunktionswert bei Zulässigkeit immer null ist.

5.2 Abschließendes Beispiel

Zur Verdeutlichung der gefundenen Ergebnisse soll das nachfolgende Beispiel dienen. Die Ausgangsdaten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen[45]:

Finanzprodukte	Kurse in $t = 0$	Kurse in $t = 1$				
	F_0^i	$F_1^i(\omega_1)$	$F_1^i(\omega_2)$	$F_1^i(\omega_3)$	$F_1^i(\omega_4)$	$F_1^i(\omega_5)$
1. Aktie	116	88	99	121	154	198
2. Call mit $B = 99$	27,5	0	0	22	55	99
3. Call mit $B = 121$	14,5	0	0	0	33	77
4. Call mit $B = 143$	7,5	0	0	0	11	55
5. Put mit $B = 110$	5	22	11	0	0	0
6. Put mit $B = 154$	28	66	55	33	0	0
7. Put mit $B = 187$	55	99	88	66	33	0
risikoloser Zinssatz: $r = 0{,}1$ (= 10 %)						

Zur Maximierung des Arbitragegewinns in $t = 0$ ist aus den Daten das folgende lineare Optimierungsprogramm [LOP5] aufzustellen:

$$\begin{aligned}
&\text{max:}\quad G_0\\
&\text{unter:}\quad G_0 + 116n_1 + 27{,}5n_2 + 14{,}5n_3 + 7{,}5n_4 + 5n_5 + 28n_6 + 55n_7 + S_0 = 0\\
&\qquad 88n_1 + 22n_5 + 66n_6 + 99n_7 + 1{,}1S_0 = 0\\
&\qquad 99n_1 + 11n_5 + 55n_6 + 88n_7 + 1{,}1S_0 = 0\\
&\qquad 121n_1 + 22n_2 + 33n_6 + 66n_7 + 1{,}1S_0 = 0\\
&\qquad 154n_1 + 55n_2 + 33n_3 + 11n_4 + 33n_7 + 1{,}1S_0 = 0\\
&\qquad 198n_1 + 99n_2 + 77n_3 + 55n_4 + 1{,}1S_0 = 0
\end{aligned}$$

Da sämtliche Variablen nicht vorzeichenbeschränkt sind, müssen sie zur Lösung mit dem Zwei-Phasen-Simplex-Algorithmus durch jeweils zwei vorzeichen-beschränkte Variablen ersetzt werden:[46] $n_i = n_i^+ - n_i^-$ mit $n_i^+, n_i^- \geq 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, 7$; $S_0 = S_0^+ - S_0^-$ mit $S_0^+, S_0^- \geq 0$; $G_0 = G_0^+ - G_0^-$ mit $G_0^+, G_0^- \geq 0$. Als Lösung[47] ergibt sich $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = S_0 = G_0 = 0$ mit einem Zielfunktionswert von null. Damit gibt es keine Arbitragemöglichkeit.

[45] Für die Werte in $t = 1$ siehe die Formeln [1] und [2].
[46] Vgl. HOCHSTÄTTLER (2012) S. 317 oder HOCHSTÄTTLER (2004) S. 9.
[47] Für die Lösung der linearen Optimierungsprogramme mit dem Simplex-Algorithmus wurde das Programm „Lineare Optimierung und Sensibilitätsanalyse (LinSen)" (*http://www.fernuni-hagen.de/ls_hering/download/linsen.exe*) verwendet.

Das hierzu duale Optimierungsprogramm [LOP6] lautet:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min:} & 0y_0 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 & \\
\text{unter:} & y_0 & = 1 \\
& 116y_0 + 88y_1 + 99y_2 + 121y_3 + 154y_4 + 198y_5 & = 0 \\
& 27{,}5y_0 + 22y_3 + 55y_4 + 99y_5 & = 0 \\
& 14{,}5y_0 + 33y_4 + 77y_5 & = 0 \\
& 7{,}5y_0 + 11y_4 + 55y_5 & = 0 \\
& 5y_0 + 22y_1 + 11y_2 & = 0 \\
& 28y_0 + 66y_1 + 55y_2 + 33y_3 & = 0 \\
& 55y_0 + 99y_1 + 88y_2 + 66y_3 + 33y_4 & = 0 \\
& y_0 + 1{,}1y_1 + 1{,}1y_2 + 1{,}1y_3 + 1{,}1y_4 + 1{,}1y_5 & = 0
\end{array}
$$

Da auch beim dualen Programm sämtliche Variablen nicht vorzeichenbeschränkt sind, sind sie jeweils durch zwei vorzeichenbeschränkte zu ersetzen, damit das Optimierungsprogramm mit dem Zwei-Phasen-Simplex-Algorithmus gelöst werden kann: $y_k = y_k^+ - y_k^-$ mit $y_k^+, y_k^- \geq 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots, 5;$. Als Lösung ergibt sich $y_0 = 1, y_1 = \frac{-3}{22}, y_2 = \frac{-2}{11}, y_3 = \frac{-3}{11}, y_4 = \frac{-5}{22}, y_5 = \frac{-1}{11}$ mit einem Zielfunktionswert von null. Mit $q_j = -(1+r)y_j$ für $j = 1, 2, \dots, 5$ können dann die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Sie haben die Werte: $q_1 = 0{,}15$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}25$; $q_5 = 0{,}1$. Als Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt sich $\sum_{j=1}^{5} q_j = 1$. Für sämtliche Finanzprodukte aus dem Beispiel $(i = 1, 2, \dots, 7)$ gilt damit $F_0^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{5} q_j \cdot F_1^i(\omega_j)$.

Nun soll untersucht werden, wie sich das Ergebnis beim primalen Optimierungsprogramm [LOP5] ändert, wenn der Kurs in $t = 0$ für das Finanzprodukt 2 (Call mit $B = 99$) $F_0^2 = 29$ (statt 27,5) und der Kurs in $t = 0$ für das Finanzprodukt 6 (Put mit $B = 154$) $F_0^6 = 26$ (statt 28) beträgt. Die Berechnungen mit dem Simplex-Algorithmus ergeben, dass das lineare Optimierungsprogramm nun nach oben unbeschränkt ist. Damit gibt es Arbitragemöglichkeiten. Werden zusätzlich die Restriktionen $n_i \leq 1$ und $-n_i \leq 1$ (beziehungsweise $n_i^+, n_i^- \leq 1$) für $i = 1, 2, \dots, 7$ eingefügt, so ergeben sich folgende Werte: $n_1 = 0{,}91\overline{6}$; $n_2 = -0{,}5$; $n_3 = -0{,}1\overline{6}$; $n_4 = -1$; $n_5 = 1$; $n_6 = 0{,}91\overline{6}$; $n_7 = -1$; $S_0 = -58,\overline{3}$; $G_0 = 2{,}58\overline{3}$ mit einem maximalen Zielfunktionswert von $2{,}58\overline{3}$. Ein Arbitrageur erzielt, wenn er diese „Handlungsanweisung" einmal ausführt, einen Arbitragegewinn in $t = 0$ von $2{,}58\overline{3}$. In $t = 1$ ergibt sich bei allen fünf Umweltzuständen ein Saldo von null, was durch Nachrechnen bestätigt wird.

Beim dualen Optimierungsprogramm [LOP6] führen die Änderungen ($F_0^2 = 29$, $F_0^6 = 26$) dazu, dass das Programm keine zulässige Lösung mehr besitzt, also unzulässig wird. Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten liegen dann nicht mehr vor.

Gelten nun wieder die ursprünglichen Daten und kommt eine weitere Kaufoption mit dem Basispreis $B = 88$ hinzu, ergeben sich in $t = 1$ folgende Werte:[48] $F_1^{neu}(\omega_1) = 0$; $F_1^{neu}(\omega_2) = 11$; $F_1^{neu}(\omega_3) = 33$; $F_1^{neu}(\omega_4) = 66$; $F_1^{neu}(\omega_5) = 110$. Werden diese Werte mit den ermittelten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gewichtet und mit 10 % abgezinst, ergibt sich ein Wert $F_0^{neu} = 36$. Werden das primale Programm [LOP 5] und das duale Programm [LOP 6] entsprechend ergänzt, dann sind beide weiterhin zulässig und beschränkt. Das heißt, dass es keine Arbitragmöglichkeiten gibt.

Die rechnerischen Ergebnisse des Beispiels bestätigen somit die in den beiden vorherigen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse.

6. Schlussbemerkung

In der Arbeit wurde gezeigt, wie mit Hilfe der linearen Optimierung Arbitragemöglichkeiten auf Finanzmärkten erkannt werden können. Dafür wurde ein lineares Optimierungsprogramm aufgestellt und gelöst. Über die Aufstellung des hierzu dualen Programms konnten bei Arbitragefreiheit die so genannten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden, die für die arbitragefreie Bewertung von Finanzprodukten, wie zum Beispiel Optionen, einsetzbar sind. Damit bietet sich für die lineare Optimierung ein interessanter Anwendungsbereich in der Analyse von Finanzmärkten und der dort gehandelten Produkte.

[48] Siehe Formel [1].

Symbolverzeichnis

B	Basispreis einer Option
C_t	Wert einer Kaufoption im Zeitpunkt t
C_0	Wert einer Kaufoption im Zeitpunkt $t = 0$; Optionspreis
C_1^+	Wert einer Kaufoption im Zeitpunkt $t = 1$ bei positiver Aktienkursentwicklung
C_1^-	Wert einer Kaufoption im Zeitpunkt $t = 1$ bei negativer Aktienkursentwicklung
F_0^i	Wert des Finanzprodukts i im Zeitpunkt $t = 0$
F_0^{neu}	arbitragfreier Wert eines neuen Finanzproduktes im Zeitpunkt $t = 0$
$F_1^i(\omega_j)$	Wert des Finanzproduktes i im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit vom Umweltzustand ω_j
$F_1^{neu}(\omega_j)$	Wert eines neuen Finanzproduktes im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit vom Umweltzustand ω_j
G_0	Arbitragegewinn im Zeitpunkt $t = 0$
$G_0^+;\ G_0^-$	vorzeichenbeschränkte Variablen mit $G_0 = G_0^+ - G_0^-$ und $G_0^+, G_0^- \geq 0$
G_0^*	optimaler Zielfunktionswert des Arbitragegewinns im Zeitpunkt $t = 0$
G_1	Arbitragegewinn im Zeitpunkt $t = 1$
K_t	Aktienkurs im Zeitpunkt t
K_0	Aktienkurs im Zeitpunkt $t = 0$
K_1^+	Aktienkurs im Zeitpunkt $t = 1$ bei positiver Kursentwicklung
K_1^-	Aktienkurs im Zeitpunkt $t = 1$ bei negativer Kursentwicklung
m	Zahl der Finanzprodukte
$\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$	Menge der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$
n	Anzahl der Optionen
n_C	Anzahl der gekauften ($n_C > 0$) bzw. verkauften ($n_C < 0$) Kaufoptionen
n_i	Stückzahl der gekauften ($n_i > 0$) bzw. verkaufen ($n_i < 0$) Finanzprodukte i
$n_i^+;\ n_i^-$	vorzeichenbeschränkte Variablen mit $n_i = n_i^+ - n_i^-$ und $n_i^+, n_i^- \geq 0$
n_K	Anzahl der gekauften ($n_K > 0$) bzw. verkauften ($n_K < 0$) Aktien
n_P	Anzahl der gekauften ($n_P > 0$) bzw. verkauften ($n_P < 0$) Verkaufsoptionen
ω_j	Umweltzustand j
P_t	Wert einer Verkaufsoption im Zeitpunkt t
P_0	Wert einer Verkaufsoption im Zeitpunkt $t = 0$; Optionspreis
P_1^+	Wert einer Verkaufsoption im Zeitpunkt $t = 1$ bei positiver Aktienkursentwicklung
P_1^-	Wert einer Verkaufsoption im Zeitpunkt $t = 1$ bei negativer Aktienkursentwicklung
q^+	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für positive Aktienkursentwicklung
q^-	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für negative Aktienkursentwicklung

q_j	risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand ω_j
r	Zinssatz für Geldaufnahme und -anlage
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeler Spaltenraum
S_0	Geldanlage ($S_0 > 0$) bzw. Geldaufnahme ($S_0 < 0$) im Zeitpunkt $t = 0$
$S_0^+;\ S_0^-$	vorzeichenbeschränkte Variablen mit $S_0 = S_0^+ - S_0^-$ und $S_0^+, S_0^- \geq 0$
t	Zeitpunkt; Verfalltag
v	Zahl der Umweltzustände
y_0	Variable im dualen Programm ($t = 0$)
y_1^+	Variable im dualen Programm ($t = 1$ bei positiver Aktienkursentwicklung)
y_1^-	Variable im dualen Programm ($t = 1$ bei negativer Aktienkursentwicklung)
y_j	Variable im dualen Programm ($t = 1$ bei Umweltzustand ω_j)
$y_k^+;\ y_k^-$	vorzeichenbeschränkte Variablen mit $y_k = y_k^+ - y_k^-$ und $y_k^+, y_k^- \geq 0$

<u>Literaturverzeichnis</u>

BEIKE/SCHLÜTZ (1999)
Beike, Rolf; Schlütz, Johannes: Finanznachrichten, lesen – verstehen – nutzen; 2. Aufl., Stuttgart 1999.

CORNUEJOLS/TÜTÜNCÜ (2005)
Cornuejols, Gerald; Tütüncü, Reha: Optimization Methods in Finance; Carnegie Mellon University, Pittsburgh (Sommer 2005).
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.113.1160&rep=rep1&type=pdf

FREY (2005)
Frey, Rüdiger: Skript zur Vorlesung Optimierung I; Wirtschaftsuniversität Wien (Sommersemester 2005).
http://statmath.wu.ac.at/~frey/Skript-Optimierung-1.pdf

FREY/SCHMIDT (2006)
Frey, Rüdiger; Schmidt, Thorsten: Vorlesungsskript Finanzmathematik I; Universität Leipzig (6. April 2006).
www.math.uni-leipzig.de/~frey/skript-fima1.pdf

GRÖTSCHEL (2010)
Grötschel, Martin: Lineare und Ganzzahlige Programmierung (Algorithmische Diskrete Mathematik II); Skript zur Vorlesung im WS 2009/2010 an der Technischen Universität Berlin (9. Februar 2010).
http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS0910/skriptADMII-WS0910.pdf

HOCHSTÄTTLER (2004)
Hochstättler, Winfried: Lineare Programmierung; Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2002/03 an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus (24. Februar 2004)
http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsgdi/LP/Materialien/lecture.pdf

HOCHSTÄTTLER (2012)
Hochstättler, Winfried: Algorithmische Mathematik; Studienbrief der FernUniversität in Hagen (Sommersemester 2012).

KRUSCHWITZ/HUSMANN (2010)
Kruschwitz, Lutz; Husmann, Sven: Finanzierung und Investition; 6. Auflage, München 2010.

KWOK (2008)
Kowk, Yue-Kuen: Mathematical Models of Financial Derivates; 2. Aufl., Berlin/Heidelberg 2008.

LEOBACHER (2008)
Leobacher, Gunther: Skriptum Finanzmathematik I; Johannes Kepler Universität Linz (Wintersemester 2008).
http://www.finanz.jku.at/uploads/tx_mypubl/finmath.pdf

NOZICKA/GUDDAT/HOLLATZ (1972)
Nozicka, Frantisek; Guddat, Jürgen; Hollatz, Horst: Theorie der linearen Optimierung; Berlin 1972.

PERRIDON/STEINER (1991)
Perridon, Louis; Steiner, Manfred: Finanzwirtschaft der Unternehmung; 6. Aufl., München 1991.

PETERSON (2012)
Peterson, H. P.: Lineare Optimierung; Studienbrief der FernUniversität in Hagen (Sommersemester 2012).

SCHNEIDER (2004)
Schneider, Claus: Numerische Mathematik I, 6. Lineare Optimierung I; Johannes Gutenberg-Universität Mainz (Sommersemester 2004).
http://numerik.mathematik.uni-mainz.de/NumerikSS06/numerik6.pdf

SHREVE (1997)
Shreve, Steven: Stochastic Calculus and Finance; Carnegie Mellon University, Pittsburgh (25. Juli 1997).
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.137.6951&rep=rep1&type=pdf

STEINER/BRUNS (1993)
Steiner, Manfred; Bruns, Christoph: Wertpapiermanagement; Stuttgart 1993.

SÜCHTING (1989)
Süchting, Joachim: Finanzmanagement, Theorie und Politik der Unternehmensfinanzierung; 5. Aufl., Wiesbaden 1989.

TÜTÜNCÜ (2003)
Tütüncü, Reha H.: Optimization in Finance; Research Reports on Mathematical and Computing Sciences, Series B: Operations Research, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology (August 2003).
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.61.2925&rep=rep1&type=pdf

VARIAN (1987)
Varian; Val R.: The Arbitrage Principle in Financial Economics; in: The Journal of Economic Perspectives, Vol 1 (1987), No. 2, S. 55-72.
http://www.iew.uzh.ch/study/courses/ss03/2951/downloads/varian.pdf

WÖHE/DÖRING (2000)
Wöhe, Günter; Döring, Ulrich: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre; 20. Aufl., München 2000.

Stand der Internetseiten: 20.11.2012