Der spieltheoretische Listenfärbungsindex von Bäumen

Bachelorarbeit

von

Kerstin Marte

angefertigt an der

FernUniversität Hagen

Fachbereich Mathematik

unter Anleitung von

Herrn Professor Dr. Winfried Hochstättler

Regensdorf, Schweiz

im Wintersemester 2005/2006

INHALTSVERZEICHNIS

I. EINFÜHRUNG

Spieltheoretische Färbungsprobleme auf Graphen wurden erstmals 1989 von Hans L. Bodlaender in seiner Arbeit "*On the complexity of some coloring games*" [2] definiert und mathematisch untersucht.

Im Anschluss daran, begannen einige Mathematiker sich mit dieser interessanten Materie auseinanderzusetzen, erforschten verschiedene Färbungsprobleme unter unterschiedlichen spieltheoretischen Aspekten und warfen neue Fragen bzw. Problemstellungen auf.

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung des spieltheoretischen Färbungsproblems unter den speziellen Bedingungen, dass

- der Graph ein Baum ist;
- am Spiel genau zwei Personen beteiligt sind;
- die Kanten des Graphen gefärbt werden sollen; und
- die Färbung eine Listenfärbung darstellt.

Genauer gesagt geht es um die folgende mathematische Fragestellung:

Gegeben sei ein beliebiger Baum, dessen Kanten alle ungefärbt sind.

Zwei Spieler, Alice und Bob genannt, beginnen nun abwechslungsweise Kanten des Baumes so zu färben, dass sowohl zwei adjazente Kanten niemals die gleiche Farbe besitzen als auch die Farbe der jeweils gefärbten Kante in der k-elementigen Farbenliste ($k \in \mathbb{N}$) der betreffenden Kante enthalten ist.

Das Spiel dauert so lange, bis einer der beiden Spieler keine Möglichkeit mehr findet, eine weitere Kante zulässig zu färben. Sind zu diesem Zeitpunkt alle Kanten des Baumes gefärbt, d.h. ist der Baum vollständig gefärbt, so hat Alice das Spiel gewonnen, in allen anderen Fällen ist Bob der Gewinner.

Gesucht ist dann eine obere bzw. untere Grenze für die Anzahl Farben $k \in \mathbb{N}$, die eine Liste enthalten muss, so dass Alice bzw. Bob eine Gewinnstrategie für den gegebenen Baum besitzen.

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die Alice eine Gewinnstrategie besitzt, wird dann als spiellistenchromatischer Index $ch'_g(G)$ bezeichnet.

II. ALLGEMEINES ÜBER GRAPHEN

Graph

Ein Graph G ist ein 3-Tupel
$G = (V, E, \delta)$

hierbei bezeichnet

V die Menge der Knoten von G,

E die Menge der Kanten von G und

δ eine Abbildung $\delta : E \rightarrow V \times V$.

Die beiden Knoten, welche einer Kante $e \in E$ durch die Abbildung δ zugeordnet werden, heissen dabei Endknoten von e.

endlicher Graph

Ein Graph $G = (V, E, \delta)$ heisst endlich, wenn für die Anzahl der Knoten und Kanten von G gilt: $|V|, |E| < \infty$.

ungerichteter Graph

Ein Graph $G = (V, E, \delta)$ heisst ungerichtet, wenn die Richtung, in welcher eine Kante von einem Endknoten zum anderen Endknoten durchlaufen wird, nicht relevant ist.

parallele Kanten / Schleifen / schlichter Graph

Zwei Kanten werden als parallel bezeichnet, wenn sie dieselben Endknoten besitzen.

Eine Schleife bezeichnet eine Kante, die nur einen Endknoten besitzt.

Ein Graph $G = (V, E, \delta)$, der keine parallelen Kanten und Schleifen besitzt, wird als schlichter Graph bezeichnet.

Alle in dieser Arbeit betrachteten Graphen sind endlich, ungerichtet und schlicht.

adjazent

Zwei verschiedene Kanten e und $\tilde{e}$ eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ heissen adjazent, wenn G einen Knoten v mit $v \in \delta(e)$ und $v \in \delta(\tilde{e})$ besitzt.

Zwei verschiedene Knoten v und $\tilde{v}$ eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ heissen adjazent, wenn G eine Kante e mit $\delta(e) = v \times \tilde{v}$ besitzt.

inzident

Eine Kante e und ein Knoten v heissen inzident, wenn $v \in \delta(e)$ gilt.

Kantenfolge / Weg

Für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Kantenfolge eine Folge von Knoten $v_i \in \mathbb{N}$ (i = 0,...,n) und Kanten $e_i \in \mathbb{N}$ (i = 1,...,n), so dass e_i jeweils zu v_{i-1} und zu v_i inzident ist.

Die Anzahl Kanten der Kantenfolge bezeichnet man als Länge der Kantenfolge.

Eine Kantenfolge wird als Weg bezeichnet, wenn jeder Knoten aus V höchstens einmal in der Kantenfolge vorkommt.

Teilgraph

Ein Graph $G = (V', E', \delta')$ heisst Teilgraph von $G = (V, E, \delta)$, wenn $V' \subset V$, $E' \subset E$ und $\delta' : E' \to V' \times V'$ als Einschränkung von δ auf E' wohldefiniert ist.

Zusammenhängend / Komponente

Ein Graph $G = (V, E, \delta)$ heisst zusammenhängend, wenn für zwei beliebige Knoten v und $\tilde{v} \in V$ gilt, dass sie über mindestens eine Kantenfolge miteinander verbunden sind.

Eine Komponente von $G = (V, E, \delta)$ ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.

Knotengrad

Ist $G = (V, E, \delta)$ ein Graph, so bezeichnet

$\gamma(v)$ den Knotengrad des Knotens v, wenn gilt:
$\gamma(v) = |\{\tilde{v} \in V \mid v \text{ und } \tilde{v} \text{ sind adjazent}\}|$

Maximalgrad

Der Maximalgrad eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ bezeichnet den maximalen Knotengrad der Knoten von G.

In Zeichen: $\Delta(G) = \max\{\gamma(v) \mid v \in V\}$

Baum

Ein Baum ist ein zusammenhängender kreisloser Graph, in welchem zwei beliebige Knoten durch genau eine Kantenfolge verbunden sind.

Blatt / Blattkante / innere Kante

Alle Knoten $v \in V$ eines Baumes mit $\gamma(v) = 1$ heissen Blätter des Baumes.

Eine Kante, die inzident zu einem Blatt ist, heisst Blattkante.

Als innere Kante eines Baumes wird eine Kante bezeichnet, die keine Blattkante ist.

III. FÄRBUNG VON GRAPHEN

1. Kantenfärbung / chromatischer Index $\chi'(G)$

Ist $G = (V, E, \delta)$ ein Graph und $\varphi : E \rightarrow \{1,...,k\}$ eine surjektive Abbildung, so bezeichnet φ eine k-Kantenfärbung von G und G heisst k-kantenfärbbar, wenn für adjazente Kanten e und $\tilde{e}$ von G stets $\varphi(e) \neq \varphi(\tilde{e})$ gilt.

Der ***chromatische Index $\chi'(G)$*** eines Graphen G ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das eine k-Kantenfärbung von G existiert, d.h. es ist

$\chi'(G) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist k-kantenfärbbar}\}$

2. Listenkantenfärbung / listenchromatischer Index ch'(G)

2.1. Idee

Die Idee der Listenfärbung eines Graphen stammt von V.G. Vizing ("*Vertex colorings with given colors*", 1976) und P. Erdös, A.L. Rubin, H. Taylor ("*Choosability in graphs*", 1980).
Die Listenkantenfärbung stellt dabei eine Verschärfung der Kantenfärbung in dem Sinne dar, als dass für die Farben der Kanten einer k-Kantenfärbung nicht mehr jeweils alle Farben {1,...,k} zugelassen werden, sondern jeder Kante eine k-elementige Liste zugeordnet wird, so dass alle Kanten für jede beliebige Wahl der k-elementigen Listen aus ihren Listen gefärbt werden können.

2.2. Definition

Es sei $L = \{L(e) : e \in E(G)\}$ eine Familie von Listen $L(e)$, die den Kanten $e \in E(G)$ eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ zugeordnet sind.
Unter einer L-Listenkantenfärbung versteht man dann eine Kantenfärbung c von G, so dass $c(e) \in L(e) \; \forall \, e \in E(G)$ gilt.
Der Graph heisst ***k-listenkantenfärbbar*** für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn er für jede Familie L mit $|L(e)| \geq k \;\; \forall \, e \in E(G)$ eine L-Listenkantenfärbung besitzt.
Die kleinste Zahl k, für die der Graph k-listenkantenfärbbar ist, heisst ***listenchromatischer Index*** und wird mit ***ch'(G)*** bezeichnet.

2.3. Eigenschaften

Da eine L-Listenkantenfärbung mit $L(e) = \{1,...,k\} \; \forall \, e \in E(G)$ einer k-Kantenfärbung eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ entspricht, gilt für G die Ungleichung $ch'(G) \geq \chi'(G)$.

Listenchromatische Vermutung:
Jeder Graph G erfüllt $ch'(G) = \chi'(G)$.

Die Listenchromatische Vermutung wurde 1985 von B. Bollobás und A.J. Harris in ihrem Artikel "*List colorings of graphs*" erstmals veröffentlicht. Auf ihre Richtigkeit geprüft wurde sie seither von einigen Mathematikern, doch ein allgemeingültiger Beweis konnte bis anhin noch nicht gefunden werden.

Bisher gezeigt werden konnte, dass sie für spezielle Graphenklassen, wie beispielsweise für bipartite Graphen, korrekt ist.

Proposition:
Sei $T = (V, E, \delta)$ ein Baum und seien $L(e)$ die Listen zu den Kanten $e \in E(T)$. Des Weiteren sei ein Knoten $v \in V$ gegeben, für dessen inzidente Kanten $|L(e)| \geq \gamma(v)$ gilt. Gilt dann für alle nicht zum Knoten v inzidenten Kanten $|L(e)| = \Delta(T)$, so ist der Baum T aus den Listen L(e) färbbar.

Beweis:
Der Beweis erfolgt mittels Induktion über die Anzahl der Knoten des Baumes T.
Für $|V| = 1$ ist klar, dass alle zum einzigen Knoten v von T inzidenten Kanten zulässig gefärbt werden können.
Gelte nun $|V| > 1$. Färbt man nun der Reihe nach alle zum Knoten v inzidenten Kanten und entfernt dann den Knoten v und alle seine gefärbten inzidenten Kanten aus T, so erhält man, da ein Baum definitionsgemäss ein zusammenhängender, kreisloser Graph ist, einen oder mehrere voneinander unabhängige Teilbäume, die jeweils einen Knoten v' enthalten, welcher zu genau einer bereits gefärbten Kante inzident war. Für diese Knoten v' folgt dann aber, dass $|L(e)| \geq \gamma(v')$ gilt, da $\gamma(v')$ im neuen unabhängigen Teilbaum um genau eins kleiner ist als im ursprünglichen Baum T. Es erfüllen somit alle Teilbäume die Induktionsvoraussetzung, womit bewiesen ist, dass T aus den Listen L(e) färbbar ist. □

Da die Kantenfärbung ein Spezialfall der Listenkantenfärbung ist und ein Baum mit Maximalgrad $\Delta(T)$ offensichtlich nicht $(\Delta(T) - 1)$-kantenfärbbar ist, folgt nun aufgrund der Proposition, dass die Listenchromatische Vermutung für Bäume Gültigkeit besitzt.

Beachtet man zudem die Tatsache, dass eine Kante eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ mit Maximalgrad $\Delta(G)$ insgesamt zu höchstens $(2\Delta(G) - 2)$ anderen Kanten adjazent sein kann, so ergeben sich zusammenfassend folgende (grobe) Abschätzungen:

Für den listenchromatischen Index ch'(G) eines beliebigen Graphen $G = (V, E, \delta)$ mit Maximalgrad $\Delta(G)$ gilt:

$$\chi'(G) \leq ch'(G) \leq (2\Delta(G) - 1)$$

und für jeden Baum gilt:

$$\chi'(G) = ch'(G) = \Delta(G)$$

3. Spiellistenchromatischer Index $ch'_g(G)$

3.1. Idee

Bei spieltheoretischen Färbungsproblemen geht es darum, dass eine gewisse Anzahl von Spielern nach genau vorgegebenen Spielregeln Knoten oder Kanten eines Graphen zu färben haben.
Von Interesse ist dann immer die Frage nach der Bestimmung einer Gewinnstrategie für einen der Spieler.

3.2. Definition der Spielregeln

Die Spielregeln, zu der in dieser Arbeit untersuchten Situation, gestalten sich wie folgt:
Zwei Spieler, in der Folge immer Alice und Bob genannt, treten gegeneinander an.
Ihnen wird als Graph $G = (V, E, \delta)$ ein beliebiger Baum vorgelegt, dessen Kanten alle ungefärbt sind.
Alice und Bob werden nun aufgefordert, die Kanten des Baumes unter Einhaltung der folgenden Kriterien zu färben:

1. Bei einem Zug wird genau einer ungefärbten Kante eine Farbe zugewiesen;
2. Die Ausführung der Züge muss stets abwechslungsweise geschehen;
3. Die Bedingungen der Listenkantenfärbung müssen befolgt werden.

Es wird zudem festgelegt, dass Alice das Spiel zu eröffnen hat. Dies ist allerdings für das Gelingen der Gewinnstrategie von Alice für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle nicht von Bedeutung.
Das Spiel endet, sobald einer der beiden Spieler keinen gültigen Zug mehr durchführen kann.
Ist der Baum bei Spielende vollständig gefärbt, so hat Alice das Spiel gewonnen, existieren hingegen noch ungefärbte Kanten, so ist Bob der Gewinner.

3.3. Definition spiellistenchromatischer Index $ch'_g(G)$

Der ***spiellistenchromatische Index*** $\boldsymbol{ch'_g(G)}$ eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ bezeichnet die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die G k-listenkantenfärbbar ist und für die Alice eine Gewinnstrategie besitzt.

3.4. Eigenschaften

Da eine k-Kantenfärbung eines Graphen $G = (V, E, \delta)$ ein Spezialfall einer k-Listenkantenfärbung darstellt, gilt

$$\chi'_g(G) \leq ch'_g(G)$$

wobei $\chi'_g(G)$ den spielchromatischen Index unter Beachtung der gleichen Spielregeln, aber unter der Bedingung, dass für alle $L(e) = \{1,...,k\}\ \forall\, e \in E(G)$ gilt, bezeichnet.

IV. SPIELLISTENCHROMATISCHER INDEX $ch'_g(G)$ FÜR BÄUME MIT $\Delta(G) \geq 6$

Satz 1:
Sei G = (V, E, δ) ein Baum mit $\Delta(G) \geq 6$.
Dann gilt $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 1$

Zum Beweis des Satzes wird eine Gewinnstrategie für Alice angegeben, für den Fall, dass jede Liste aus genau $(\Delta(G) + 1)$ beliebigen Farben besteht.

Das Vorgehen richtet sich dabei nach [5], einer Arbeit von Peter L. Erdös, Ulrich Faigle, Winfried Hochstättler und Walter Kern, in welcher $\chi'_g(G) \leq (\Delta(G) + 1)$ für Bäume mit $\Delta(G) \geq 6$ bewiesen werden konnte bzw. nach [1], einer Arbeit von Stephan Dominique Andres, in welcher unter anderem gezeigt wird, dass $\chi'_g(G) \leq (\Delta(G) + 1)$ für Bäume mit $\Delta(G) \neq 4$ gilt.

1. Allgemeines Vorgehen

Wird im Verlaufe des Spiels eine Kante mit einer aus ihrer Liste enthaltenen Farbe gefärbt, so wird diese Farbe aus allen Listen derjenigen Kanten entfernt, die adjazent zur soeben gefärbten Kante sind.

Des Weiteren besteht die grundlegende Idee in der Zerlegung des Baumes in unabhängige Teilbäume, sogenannte T_n-Komponenten. Diese T_n-Komponenten werden die Sichtweise dahingehend vereinfachen, als dass bei der Färbung einer Kante in einer T_n-Komponente nur die Farben dieser und keiner anderen Komponente betrachtet werden müssen.

2. Definitionen

T_n-Komponente

Eine T_n-Komponente ist ein zusammenhängender Teilbaum des gegebenen Baumes, für den gilt:
- er besitzt genau $|n|$ gefärbte Kanten
- alle gefärbten Kanten sind Blattkanten.

Wird in einer T_n-Komponente eine innere Kante gefärbt, so wird diese T_n-Komponente in zwei neue Komponenten zerlegt, so dass die soeben gefärbte Kante in beiden neuen Komponenten vorkommt und alle anderen in genau einer.

induzierter Teilbaum

Ein induzierter Teilbaum einer T_n-Komponente besteht aus allen gefärbten Blattkanten zusammen mit dem kleinsten ungefärbten Teilbaum der T_n-Komponente, der diese verbindet.

nicht-induzierte Kante

Eine nicht-induzierte Kante bezeichnet eine ungefärbte Kante, welche nicht auf dem Weg zwischen zwei gefärbten Blattkanten liegt.

Basisknoten

Ein Knoten v einer T_n-Komponente heisst Basisknoten v_B, wenn der Knotengrad von v im induzierten Teilbaum ≥ 3 ist.

Stern

Eine T_n-Komponente wird als Stern bezeichnet, wenn sie genau einen Basisknoten v_B besitzt.

regulärer T_n-Stern

Ein regulärer T_n-Stern ist ein Stern mit $|n|$ gefärbten Blattkanten, in welchem mindestens eine gefärbte Blattkante inzident zu seinem Basisknoten v_B ist.

relevanter T_n-Stern

Ein T_n-Stern wird als relevant bezeichnet, wenn der Basisknoten v_B in der T_n-Komponente Maximalgrad besitzt.

gepaart

Eine gefärbte Blattkante in einem T_n-Stern mit Basisknoten v_B heisst gepaart, falls ihre Farbe unter den Farben der Kanten, die inzident zu v_B sind, vorkommt.

ungepaart

Eine nicht gepaarte Kante heisst ungepaart.

stark ungepaart

Eine gefärbte Kante heisst stark ungepaart, wenn sie ungepaart ist und zudem genau eine Kante zwischen ihr und dem Basisknoten v_B liegt.

stark listen-ungepaart

Eine gefärbte Kante heisst stark listen-ungepaart, wenn sie die beiden folgenden Kriterien erfüllt:

– sie ist stark ungepaart
– sie ist mit einer Farbe gefärbt, die in der Liste der zu ihr adjazenten und zugleich zum Basisknoten v_B inzidenten Kante k enthalten ist; und keine zu v_B inzidente Kante ist bereits so gefärbt, dass ihre Farbe nicht in der Liste der Kante k enthalten ist.

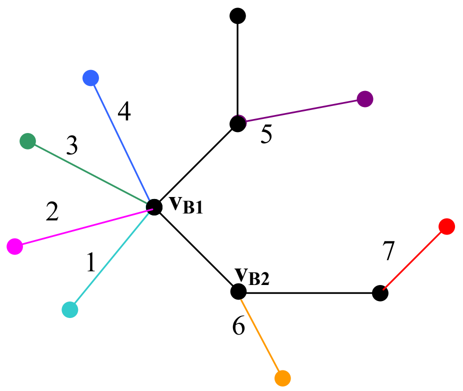
3. Gewinnstrategie von Alice für den Fall $|L(e)| = (\Delta(G) + 1)\ \forall\ e \in E(G)$

Angenommen, für die Listen der Kanten des gegebenen Baumes gilt $|L(e)| = (\Delta(G) + 2)\ \forall e \in E(G)$.

In diesem Fall kann Alice für jeden beliebigen Baum, wie in [3] erstmals festgestellt wurde, auf sehr einfache Weise sicherstellen, dass sie als Gewinnerin des Spiels hervorgeht. Sie muss nur darauf achten, dass nach jedem ihrer Züge für jede T_n-Komponente $n \leq \Delta(G)$ gilt.

Sobald Bob in einem seiner Züge eine T_n-Komponente erzeugt, für welche $n = (\Delta(G) + 1)$ gilt, so folgt für diese T_n-Komponente, dass sie mindestens zwei Basisknoten v_{B1} und v_{B2} besitzt. Denn da der Maximalgrad jeder T_n-Komponente $\leq \Delta(G)$ ist und da ausschliesslich immer nur Blattkanten gefärbt sein können, können maximal $(\Delta(G) - 1)$ gefärbte Kanten zum Basisknoten v_{B1} inzident sein (man beachte, dass eine T_n-Komponente mit $n = (\Delta(G) + 1)$ nicht vollständig gefärbt sein kann und deshalb auch nicht $\Delta(G)$ gefärbte Kanten zu v_{B1} inzident sein können). Daraus folgt aber, da insgesamt $(\Delta(G) + 1)$ gefärbte Blattkanten existieren, dass es mindestens zwei gefärbte Kanten gibt, bei denen zumindest die erste Kante, die jeweils auf dem Weg vom Basisknoten v_{B1} zu einer dieser beiden gefärbten Kanten liegt, identisch ist. Der zweite Basisknoten v_{B2} befindet sich dann im Falle, dass diese beiden gefärbten Kanten nicht zueinander adjazent sind, an der Stelle, an der der Weg, der jeweils zwischen dem Basisknoten v_{B1} und einer dieser beiden gefärbten Kanten liegt, nicht mehr identisch ist, bzw. im Falle, dass diese beiden gefärbten Kanten zueinander adjazent sind, bei dem Knoten, zu dem diese beiden gefärbten Kanten inzident sind.

Beispiel 1:
T_n-Komponente mit $\Delta(G) = 6$ und $n = (\Delta(G) + 1) = 7$.



Bob hat in seinem Zug soeben eine Kante mit der Farbe 7 gefärbt.

Die T_n-Komponente enthält nun zwei Basisknoten v_{B1} und v_{B2}.

Existieren nun also zwei Basisknoten v_{B1} und v_{B2} so kann Alice, da ihr noch mindestens eine bisher nicht verwendete Farbe zur Verfügung steht, eine innere Kante, welche auf dem Weg zwischen den beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} liegt so färben, dass dadurch zwei neue, unabhängige Komponenten T'_n und T''_n entstehen, für welche wieder $n \leq \Delta(G)$ gilt.

Durch wiederholte Anwendung dieses Vorgehens erreicht Alice, dass der Baum in immer kleinere und voneinander unabhängige T_n-Komponenten zerlegt wird, bis schliesslich nur noch solche T_n-Komponenten existieren, bei der die Anzahl der Kanten $\leq \Delta(G)$ ist.

Es ist somit offensichtlich, dass das Spiel solange weitergespielt werden kann, bis alle Kanten des Baumes zulässig gefärbt sind.

Um nun beweisen zu können, dass Alice auch eine Gewinnstrategie für Listen mit $|L(e)| = (\Delta(G) + 1)\ \forall e \in E(G)$ besitzt, muss die soeben beschriebene Strategie für den Fall $|L(e)| = (\Delta(G) + 2)\ \ \forall e \in E(G)$ verfeinert werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2:
T_n-Komponente mit $n = \Delta(G)$.
Alle bisher gefärbten Kanten sind adjazent zur *kritischen Kante* κ und in den verschiedenen Farben 1, 2, 3,..,$\Delta(G)$ - 1 und $\Delta(G)$ gefärbt.

Ist in dieser Spielsituation Bob am Zug und färbt er eine zur *kritischen Kante* κ adjazente Kante mit einer bisher nicht verwendeten Farbe $(\Delta(G) + 1)$, so hat Alice für den Fall $L(\kappa) = \{1, 2,...,(\Delta(G) + 1)\}$ keine Möglichkeit mehr, die Kante κ zulässig zu färben. Folglich hat sie das Spiel verloren.

Alice muss also mit ihrer Strategie auf jeden Fall verhindern, dass sie durch einen ihrer Züge eine *kritische Kante* κ erzeugt, welche in ihrer Liste die $\Delta(G)$ bereits verwendeten Farben enthält.

Aus der Beobachtung von Beispiel 2 ergibt sich folgendes:

- Alice muss ihr Hauptaugenmerk auf diejenigen T_n-Komponenten richten, die Knoten mit hohem Knotengrad enthalten.
- Alice muss verhindern, dass in einer solchen T_n-Komponente zu viele stark listen-ungepaarte Kanten entstehen können.

Als nächstes werden zwei Bedingungen (B1) und (B2) eingeführt, so dass gilt:

Kann Alice gewährleisten, dass **nach** jedem ihrer Züge die zwei Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt sind, so kann das Spiel solange weitergespielt werden, bis alle Kanten des Baumes zulässig gefärbt sind und Alice folglich als Gewinnerin des Spiels hervorgeht.

(B1) Jede T_n-Komponente mit $n \geq 3$ ist ein regulärer T_n-Stern

(B2) Jeder relevante T_n-Stern besitzt höchstens max $\{0, \Delta(G)-1-n\}$ stark listen-ungepaarte Kanten

In der Folge wird nun gezeigt, dass für eine T_n-Komponente, welche die beiden Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt, folgendes gilt:

1. Solange die T_n-Komponente eine ungefärbte Kante besitzt, kann Alice diese in ihrem Zug so färben, dass für den Fall, dass die soeben gefärbte Kante eine:
   – Blattkante ist, die T_n-Komponente (B1) und (B2) erfüllt.
   – innere Kante ist, die beiden neuen Komponenten T'_n und T''_n (B1) und (B2) erfüllen.

2. Solange die T_n-Komponente eine ungefärbte Kante besitzt, kann Bob eine weitere Kante in ihr färben.

3. Färbt Bob in seinem Zug eine Kante der T_n-Komponente, so verletzt danach insgesamt höchstens eine Komponente Bedingung (B1) oder (B2) und in dieser Komponente kann Alice in ihrem nächsten Zug eine Kante so färben, dass danach alle Komponenten die beiden Bedingungen (B1) und (B2) wieder erfüllen.

Man beachte:
Jeder ungefärbte Baum sowie jeder vollständig gefärbte Baum erfüllt die Bedingungen (B1) und (B2).

Der Beweis erfolgt nun mittels Induktion über die Anzahl der Züge.

Jeder ungefärbte Baum (T_0-Komponente) erfüllt die beiden Bedingungen (B1) und (B2).

Nach einigen Zügen von Alice und Bob seien dann eine oder mehrere T_n-Komponenten entstanden, welche (B1) und (B2) erfüllen.

Nun werden zwei Fälle unterschieden:
A) Alice ist als nächste am Zug
B) Bob ist als nächster am Zug

A) Alice ist als nächste am Zug

Falls es T_n-Komponenten mit $1 \leq n \leq 2$ und ungefärbten Kanten gibt, wählt Alice eine davon und färbt darin eine Kante, die adjazent zu einer bereits gefärbten Kante ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe. Da diese T_n-Komponente noch nicht vollständig gefärbt ist, existiert eine solche Kante zwangsläufig.

Falls für alle T_n-Komponenten $n \geq 3$ ist, wählt Alice eine mit noch ungefärbten Kanten aus und betrachtet dann deren existierenden Basisknoten v_B:

<table>
<tr>
<td>Fall 1:
Alle bisher gefärbten Kanten sind inzident zu v_B.

Alice färbt in ihrem Zug eine ungefärbte Kante, welche ebenfalls inzident zu v_B ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

①</td>
<td>Fall 2:
Es existiert eine gefärbte Kante α, welche nicht inzident zu v_B ist.

Alice färbt in ihrem Zug die zu v_B inzidente Kante, welche auf dem Weg von v_B zur Kante α liegt, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

②</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Erläuterungen:
① Eine solche Kante existiert, da die T_n-Komponente noch nicht vollständig gefärbt ist.
Durch diesen Zug bleiben (B1) und (B2) für alle T_n-Komponenten gültig.

② Durch diesen Zug bleiben (B1) und (B2) für beide neu entstehenden Komponenten T'_n und T''_n und somit für alle T_n-Komponenten gültig.</td>
</tr>
</table>

B) Bob ist als nächster am Zug

Bob färbt in seinem Zug eine Kante einer T_n-Komponente. Weist er dabei einer inneren Kante eine Farbe zu und zerteilt er dadurch die T_n-Komponente in zwei neue unabhängige Komponenten T'_n und T''_n, so kann höchstens eine dieser beiden neuen Komponenten Bedingung (B1) oder (B2) verletzen.

Denn da die T_n-Komponente vor dem Zug von Bob (B1) und (B2) erfüllt hat, besass sie vor Bobs Zug höchstens einen Basisknoten. Somit gilt entweder für T'_n oder T''_n $n \leq 2$.

Erfüllen sowohl T'_n als auch T''_n die Bedingungen (B1) und (B2), so kann Alice das Spiel wie unter A) beschrieben fortsetzen.

Verstösst eine T_n-Komponente gegen mindestens eine der Bedingungen (B1) oder (B2), so besitzt sie (i) zwei Basisknoten oder (ii) zu viele stark listen-ungepaarte Kanten.

(i) Existiert nach Bobs Zug eine T_n-Komponente mit zwei Basisknoten (der erste Basisknoten v_{B1} habe dabei bereits vor dem Zug von Bob bestanden, der zweite Basisknoten v_{B2} sei durch den Zug von Bob erzeugt worden), so führt Alice in ihrem nächsten Zug einen sogenannten "Trennzug" durch, indem sie wie folgt agiert:

Fall 1:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch genau eine Kante κ miteinander verbunden.

Alice färbt diese Kante κ mit einer beliebigen möglichen Farbe.

①

Fall 2:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch einen Weg W der Länge ≥ 3 miteinander verbunden.

Alice färbt in diesem Fall die Kante auf W, die inzident zu v_{B2} ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

②

Fall 3:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch einen Weg W der Länge 2 miteinander verbunden.

Fall 3.1:
Es gibt eine gefärbte Kante, die inzident zu v_{B2} ist.

Alice färbt in diesem Fall die Kante auf W, die inzident zu v_{B1} ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

③

Fall 3.2:
Es ist keine gefärbte Kante zu v_{B2} inzident.

Fall 3.2.1:
Die Liste zu der zu v_{B2} inzidenten Kante β auf W enthält eine Farbe, welche die Liste zu der zu v_{B1} inzidenten Kante κ auf W nicht enthält.

Alice färbt die Kante β mit dieser Farbe.

④

Fall 3.2.2:
Die Liste zu der zu v_{B2} inzidenten Kante β auf W und die Liste zu der zu v_{B1} inzidenten Kante κ auf W sind identisch.

	Fall 3.2.2.1: Die Liste zur Kante β enthält eine Farbe, mit der bereits eine zu v_{B1} inzidente Kante gefärbt ist. Alice färbt die Kante β mit dieser Farbe. ⑤	**Fall 3.2.2.2:** Die Liste zur Kante β enthält keine Farbe, mit der bereits eine zu v_{B1} inzidente Kante gefärbt ist. Alice färbt die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. ⑥

Erläuterungen:

① Dies ist möglich, denn der einzige Fall, bei welchem Alice keine Möglichkeit mehr besässe, diese Kante κ zu färben, wäre der, wenn $L(\kappa) = \{1, 2,..,(\Delta(G)+1)\}$ gelten würde und κ zu $(\Delta(G) + 1)$ verschiedenen gefärbten Kanten so adjazent wäre, dass $(\Delta(G) - 1)$ davon inzident zum ersten Basisknoten v_{B1} und die beiden restlichen inzident zum zweiten Basisknoten v_{B2} wären. In diesem Fall wäre aber κ bereits vor dem Zug von Bob eine kritische Kante, was der Annahme, dass Bedingung (B2) vor dem Zug von Bob erfüllt sein muss, widersprechen würde.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ Durch diesen Zug teilt Alice die T_n-Komponente mit zwei Basisknoten in zwei neue Komponenten mit je einem Basisknoten. (B1) ist also wieder erfüllt.

Da der Zug von Alice die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten für die Komponente mit Basisknoten v_{B1} nicht erhöht und sich die Anzahl der insgesamt gefärbten Blätter in Bezug auf diese Komponente ebenfalls nicht erhöht, ist auch Bedingung (B2) erfüllt.

Der zweite Basisknoten v_{B2} besitzt mindestens eine gefärbte inzidente Kante, wodurch (B2) für den T_n-Stern mit $n = 3$ und Basisknoten v_{B2} ebenfalls erfüllt ist.

④ ⑥ Die Situation der kritischen Kante ist in diesen beiden Fällen nicht gegeben, da Alice durch ihren Zug eine zur potentiell kritischen Kante κ adjazente Kante so gefärbt hat, dass dadurch keine Farbe aus der Liste zur potentiell kritischen Kante κ entfernt werden muss (Fall 3.2.1) bzw. eine zur potentiell kritischen Kante κ adjazente Kante bereits vor dem Zug von Alice so gefärbt wurde, dass dadurch keine Farbe aus der Liste zur potentiell kritischen Kante κ entfernt werden musste (Fall 3.2.2.2).

(ii) Existiert nach Bobs Zug eine T_n-Komponente, welche gegen (B2) verstösst, so enthält die Komponente zu viele stark listen-ungepaarte Kanten.

Man beachte hierbei, dass eine solche T_n-Komponente höchstens zwei stark listen-ungepaarte Kanten mehr besitzen kann als erlaubt, da Bob durch seinen Zug nur eine Kante mit einer zusätzlichen Farbe färben kann.

Hat Bob mit seinem Zug einen relevanten T_n-Stern mit Basisknoten v_B produziert, welcher (B2) verletzt, so kann dies auf zwei verschiedene Arten geschehen sein:

1. Bob hat einen neuen T_n-Stern mit $n = 3$, Basisknoten v_B und drei stark listen-ungepaarten Kanten erzeugt; oder
2. Bob hat eine Kante in einem T_n-Stern mit Basisknoten v_B so gefärbt, dass diese Komponente nun zu viele stark listen-ungepaarte Kanten besitzt.

Alice kontert in ihrem nächsten Zug wie folgt:

<table>
<tr>
<td colspan="2">Fall 1:
T_n-Stern mit $n = 3$
↓
Alice färbt in ihrem Zug eine zu v_B inzidente Kante, welche auf dem Weg zwischen v_B und einer stark listen-ungepaarten Kante liegt, mit einer beliebigen möglichen Farbe.
①</td>
<td colspan="2">Fall 2:
T_n-Stern mit $n = \Delta(G)$
↓
Alice färbt in ihrem Zug die zu v_B inzidente Kante auf dem Weg von v_B zur stark listen-ungepaarten Kante, mit einer beliebigen möglichen Farbe.
②</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Fall 3:
T_n-Stern mit $\left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil \leq n \leq \Delta(G) - 1,\ n \neq 3$
③
↓</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Fall 3.1:
Es existiert nur eine stark listen-ungepaarte Kante.
↓
Alice färbt die Kante, die zu v_B inzident ist und auf dem Weg von v_B zur stark listen-ungepaarten Kante liegt, mit einer beliebigen möglichen Farbe.
④</td>
<td colspan="3">Fall 3.2:
Es existieren mindestens zwei stark listen-ungepaarte Kanten.
↓</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Fall 3.2.1:

siehe nächste Seite</td>
<td>Fall 3.2.2:

siehe nächste Seite</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">Fall 3.2.1:
Alle stark listen-ungepaarten Kanten besitzen dieselbe Farbe.</td>
<td colspan="2">Fall 3.2.2:
Es existieren zwei stark listen-ungepaarte Kanten α und β, die nicht dieselbe Farbe besitzen.</td>
</tr>
<tr>
<td>Fall 3.2.1.1:
Die Farbe, mit der alle stark listen-ungepaarten Kanten gefärbt sind, ist auch in der Liste einer nicht-induzierten und zu v_B inzidenten Kante enthalten.

Alice färbt diese Kante auch mit dieser Farbe.

⑤</td>
<td>Fall 3.2.1.2:
Die Farbe, mit der alle stark listen-ungepaarten Kanten gefärbt sind, ist in keiner Liste einer nicht-induzierten und zu v_B inzidenten Kante enthalten.

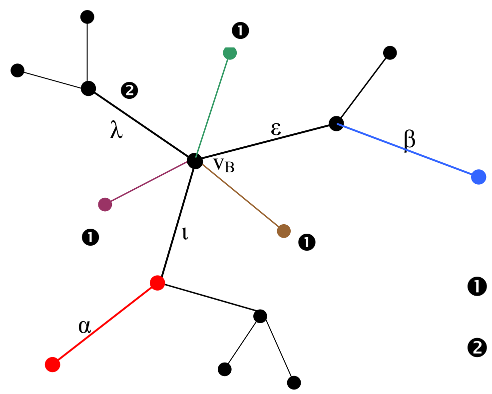
In diesem Fall färbt Alice entweder eine nicht-induzierte und zu v_B inzidente Kante mit einer Farbe, die in mindestens zwei der Listen der Kanten, die jeweils zwischen v_B und einer stark listen-ungepaarten Kante liegen, nicht vorkommt oder, falls dies nicht möglich ist, eine Kante, die zwischen v_B und einer stark listen-ungepaarten Kante liegt, mit einer Farbe, die in mindestens einer Liste der Kanten, die jeweils zwischen v_B und einer stark listen-ungepaarten Kante liegen, nicht vorkommt.

⑥</td>
<td>Fall 3.2.2.1:
Die Kante α ist in einer Farbe gefärbt, die in der Liste der zwischen v_B und der Kante β liegenden Kante ε enthalten ist, und/oder die Kante β ist in einer Farbe gefärbt, die in der Liste der zwischen v_B und der Kante α liegenden Kante ι enthalten ist.

Alice färbt in diesem Fall entweder die Kante ε mit der gleichen Farbe wie die Kante α gefärbt ist oder die Kante ι mit der gleichen Farbe wie die Kante β gefärbt ist.

⑦</td>
<td>Fall 3.2.2.2:
Weder die Kante α ist in einer Farbe gefärbt, die in der Liste der zwischen v_B und der Kante β liegenden Kante ε enthalten ist, noch die Kante β ist in einer Farbe gefärbt, die in der Liste der zwischen v_B und der Kante α liegenden Kante ι enthalten ist.

Man beachte hierbei: Die Liste zur Kante ε enthält dadurch mindestens eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante ι enthalten ist. Ansonsten wären die beiden Listen identisch, was aufgrund der Voraussetzungen nicht möglich ist.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Beispiel 3:
Darstellung einer möglichen Situation zu Fall 3.2.2.</td>
<td>Fall 3.2.2.2.1: siehe nächste Seite
Fall 3.2.2.2.2: siehe nächste Seite</td>
</tr>
</table>



❶ bereits gefärbte und zu v_B inzidente Kanten
❷ nicht-induzierte und zu v_B inzidente Kante

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Fall 3.2.2.2.1:
Die Liste zur Kante ε (bzw. ι) enthält eine Farbe, die die Liste zur Kante ι (bzw. ε) nicht enthält, und die Kante β (bzw. α) ist nicht mit dieser Farbe gefärbt.

Alice färbt die Kante ε (bzw. ι) mit dieser Farbe.

⑧</td>
<td colspan="2">Fall 3.2.2.2.2:
Die Liste zur Kante ε (bzw. ι) enthält genau eine Farbe, die die Liste zur Kante ι (bzw. ε) nicht enthält, und die Kante β (bzw. α) ist mit genau dieser Farbe gefärbt.

Alice färbt in diesem Fall eine nicht-induzierte und zu v_B inzidente Kante λ wie folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>Fall 3.2.2.2.2.1:
Die Liste zur Kante λ enthält eine Farbe, mit der die Kante α und/oder die Kante β gefärbt ist.

Alice färbt die Kante λ mit einer solchen Farbe.

⑨</td>
<td>Fall 3.2.2.2.2.2:
Die Liste zur Kante λ enthält weder die Farbe, mit der die Kante α, noch die Farbe, mit der die Kante β gefärbt ist.

Alice färbt die Kante λ in einer Farbe, die in den Listen zur Kante ι und ε nicht vorkommt.

⑩</td>
</tr>
</table>

Erläuterungen:

① Dadurch reduziert sie die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente auf ≤ 2. Es sind somit sowohl (B1) als auch (B2) nach dem Zug von Alice erfüllt.

② In diesem Fall war die betrachtete Komponente vor dem Zug von Bob ein T_n-Stern mit n = (Δ(G) - 1), welcher (B2) erfüllt hat. Daraus folgt, dass dieser T_n-Stern vor dem aktuellen Zug von Bob keine stark listen-ungepaarten Kanten besass.

Bob konnte dann durch seinen Zug höchstens eine zusätzliche stark listen-ungepaarte Kante produzieren; d.h. es existiert genau eine stark listen-ungepaarte Kante.

② ④ Durch ihren Zug reduziert Alice nun die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente auf 0.

Für die andere T_n-Komponente, die Alice durch ihren Zug auf einer inneren Kante produziert hat, gilt n = 2.

Alle Komponenten erfüllen somit nach dem Zug von Alice (B1) und (B2).

③ Es gilt v_B = Δ(G), da es sich bei der betrachteten Komponente um einen relevanten T_n-Stern handeln muss.
Es existiert somit eine nicht-induzierte Kante, die inzident zu v_B ist.

⑤ Durch ihren Zug reduziert Alice nun die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente auf 0.

Falls durch den Zug von Alice eine weitere T_n-Komponente entsteht, so gilt für diese $n = 1$.

Alle Komponenten erfüllen somit nach dem Zug von Alice (B1) und (B2).

⑥ Dies ist möglich, denn kann Alice eine nicht-induzierte und zu v_B inzidente Kante nicht so färben, dass dadurch mindestens zwei stark listen-ungepaarte Kanten eliminiert werden, so folgt, dass mindestens zwei Kanten existieren, die jeweils zwischen v_B und einer stark listen-ungepaarten Kante liegen, bei welchen die Listen nicht identisch sein können. Denn aufgrund der Voraussetzungen sind alle stark listen-ungepaarten Kanten mit derselben Farbe gefärbt und diese Farbe ist in keiner Liste zu einer nicht-induzierten und zu v_B inzidenten Kante vorhanden.

Durch ihren Zug reduziert Alice nun die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente um mindestens zwei.

Falls durch den Zug von Alice eine weitere T_n-Komponente entsteht, so gilt für diese $n \leq 2$.

Alle Komponenten erfüllen somit nach dem Zug von Alice (B1) und (B2).

⑦ ⑧ Durch ihren Zug reduziert Alice nun die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente um mindestens zwei.

Für die durch den Zug von Alice entstehende weitere T_n-Komponente gilt $n = 2$.

Alle Komponenten erfüllen somit nach dem Zug von Alice (B1) und (B2).

⑧ ⑨ Dies ist möglich, denn wäre bereits eine andere zu v_B inzidente Kante mit einer solchen Farbe gefärbt, so wäre entweder die Kante α oder die Kante β definitionsgemäss gar nicht stark listen-ungepaart gewesen.

⑨ ⑩ Durch ihren Zug reduziert Alice nun die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten in dieser T_n-Komponente um mindestens zwei.

Falls durch den Zug von Alice eine weitere T_n-Komponente entsteht, so gilt für diese $n = 1$.

Alle Komponenten erfüllen somit nach dem Zug von Alice (B1) und (B2).

⑩ Eine solche Farbe existiert, denn die Listen zu den beiden Kanten ε und ι sind voraussetzungsgemäss bis auf eine Farbe identisch. Die Liste zur Kante λ enthält aber keine der beiden Farben, die in jeweils nur einer Liste der beiden Kanten ε und ι vorkommt. Wäre zudem bereits eine zu v_B inzidente Kante mit einer solchen Farbe gefärbt, so wären die beiden Kanten α und β vor dem Zug von Alice definitionsgemäss gar nicht stark listen-ungepaart gewesen.

Alice kann also für jeden Baum mit $\Delta(G) \geq 6$ sicherstellen, dass sie, völlig unabhängig davon, welche Kante Bob in seinem Zug jeweils färbt und wie die Listen zu den jeweiligen Kanten aussehen, als Gewinnerin des Spiels hervorgehen kann, sofern $|L(e)| \geq (\Delta(G) + 1) \ \forall\, e \in E(G)$ gilt.

Womit Satz 1 bewiesen ist.

V. SPIELLISTENCHROMATISCHER INDEX $ch'_g(G)$ FÜR BÄUME MIT $\Delta(G) = 5$

Satz 2:
Sei $G = (V, E, \delta)$ ein Baum mit $\Delta(G) = 5$.
Dann gilt $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 1$

Zum Beweis des Satzes wird wie im Fall $\Delta(G) \geq 6$ eine Gewinnstrategie für Alice angegeben, für den Fall, dass jede Liste nun aus genau sechs beliebigen Farben besteht.

Grundsätzlich kann das Vorgehen aus Abschnitt IV übernommen werden.

Die beiden Bedingungen (B1) und (B2) gestalten sich für den Fall $\Delta(G) = 5$ wie folgt:

(B1) Jede T_n-Komponente mit $n \geq 3$ ist ein regulärer T_n-Stern

(B2) Jeder relevante T_n-Stern mit $n \geq 4$ besitzt keine stark listen-ungepaarte Kante

Im Unterschied zum Fall $\Delta(G) \geq 6$ kann Alice allerdings für den Fall $\Delta(G) = 5$ nicht immer gewährleisten, dass die Bedingungen (B1) und (B2) nach jedem ihrer Züge erfüllt sind.

Es gilt deshalb:

1. Kann Alice gewährleisten, dass, sofern die T_n-Komponente kein T_n-Stern mit $n = 4$ und insgesamt drei stark listen-ungepaarten Kanten ist, **nach** jedem ihrer Züge die zwei Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt sind, so kann das Spiel solange weitergespielt werden, bis alle Kanten des Baumes zulässig gefärbt sind und Alice folglich als Gewinnerin des Spiels hervorgeht.

2. Ist Alice am Zug und existiert eine T_n-Komponente, welche ein T_n-Stern mit $n = 4$ und insgesamt drei stark listen-ungepaarten Kanten ist, so kann Alice ihre weiteren Züge so durchführen, dass sie, unabhängig davon, welche Kanten Bob in seinen Zügen jeweils färbt, gewährleisten kann, dass das Spiel solange weitergespielt werden kann, bis der Baum vollständig gefärbt ist.

Der Beweis erfolgt wiederum induktiv über die Anzahl der Züge:

Jeder ungefärbte Baum (T_0-Komponente) erfüllt die beiden Bedingungen (B1) und (B2).

Nach einigen Zügen von Alice und Bob seien dann eine oder mehrere T_n-Komponenten entstanden, welche (B1) und (B2) erfüllen.

Nun werden wiederum zwei Fälle unterschieden:
A) Alice ist als nächste am Zug
B) Bob ist als nächster am Zug

A) Alice ist als nächste am Zug

Falls es T_n-Komponenten mit $1 \leq n \leq 2$ und ungefärbten Kanten gibt, wählt Alice eine davon und färbt darin eine Kante, die adjazent zu einer bereits gefärbten Kante ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe. Da diese T_n-Komponente noch nicht vollständig gefärbt ist, existiert eine solche Kante zwangsläufig.

Falls für alle T_n-Komponenten $n \geq 3$ ist, wählt Alice eine mit noch ungefärbten Kanten aus und betrachtet dann deren existierenden Basisknoten v_B:

Fall 1: Alle bisher gefärbten Kanten sind inzident zu v_B.	**Fall 2:** Es existiert eine gefärbte Kante α, welche nicht inzident zu v_B ist.
Alice färbt in ihrem Zug eine ungefärbte Kante, welche ebenfalls inzident zu v_B ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.	Alice färbt in ihrem Zug die zu v_B inzidente Kante, welche auf dem Weg von v_B zur Kante α liegt, mit einer beliebigen möglichen Farbe.
Die Erläuterung ist dieselbe wie im Fall $\Delta(G) \geq 6$.	Die Erläuterung ist dieselbe wie im Fall $\Delta(G) \geq 6$.

B) Bob ist als nächster am Zug

Verstösst eine T_n-Komponente nach dem Zug von Bob gegen mindestens eine der Bedingung (B1) oder (B2), so (i) besitzt sie zwei Basisknoten oder (ii) ist sie ein nicht regulärer T_n-Stern mit $n = 3$ oder (iii) besitzt sie zu viele stark listen-ungepaarte Kanten.

(i) Existiert nach Bobs Zug eine T_n-Komponente mit zwei Basisknoten (der erste Basisknoten v_{B1} habe dabei bereits vor dem Zug von Bob bestanden, der zweite Basisknoten v_{B2} sei durch den Zug von Bob erzeugt worden), so führt Alice in ihrem nächsten Zug einen sogenannten "Trennzug" durch, indem sie wie folgt agiert:

Man beachte hierbei, dass die Erläuterungen jeweils aus dem Fall $\Delta(G) \geq 6$ übernommen werden können.

Fall 1:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch genau eine Kante κ miteinander verbunden.

Alice färbt diese Kante κ mit einer beliebigen möglichen Farbe.

Fall 2:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch einen Weg W der Länge ≥ 3 miteinander verbunden.

Alice färbt in diesem Fall die Kante auf W, die inzident zu v_{B2} ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

Fall 3:
Die beiden Basisknoten v_{B1} und v_{B2} sind durch einen Weg W der Länge 2 miteinander verbunden.

Fall 3.1:
Es gibt eine gefärbte Kante, die inzident zu v_{B2} ist.

Alice färbt in diesem Fall die Kante auf W, die inzident zu v_{B1} ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

Fall 3.2:
Es ist keine gefärbte Kante zu v_{B2} inzident.

Fall 3.2.1:
Die Liste zu der zu v_{B2} inzidenten Kante β auf W enthält eine Farbe, welche die Liste zu der zu v_{B1} inzidenten Kante κ auf W nicht enthält.

Alice färbt die Kante β mit dieser Farbe.

Fall 3.2.2:
Die Liste zu der zu v_{B2} inzidenten Kante β auf W und die Liste zu der zu v_{B1} inzidenten Kante κ auf W sind identisch.

Fall 3.2.2.1:
Die Liste zur Kante β enthält eine Farbe, mit der bereits eine zu v_{B1} inzidente Kante gefärbt ist.

Alice färbt die Kante β mit dieser Farbe.

Fall 3.2.2.2:
Die Liste zur Kante β enthält keine Farbe, mit der bereits eine zu v_{B1} inzidente Kante gefärbt ist.

Alice färbt die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe.

(ii), (iii) Existiert nach Bobs Zug eine T_n-Komponente, welche ein nicht regulärer T_n-Stern mit $n = 3$ ist, bzw. ein regulärer T_n-Stern ist, welcher zu viele stark listen-ungepaarte Kanten enthält, so handelt Alice wie folgt:

<table>
<tr>
<td>

Fall 1:
T_n-Stern mit $n = 3$

In diesem Fall existiert keine zum Basisknoten v_B inzidente gefärbte Kante.

Alice färbt in ihrem Zug eine induzierte Kante, die zum Basisknoten v_B inzident ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

Durch diesen Zug erzeugt Alice eine T_n-Komponente mit $n = 3$, welche ein regulärer T_n-Stern ist, sowie eine T_n-Komponente mit $n = 2$.
(B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.

</td>
<td>

Fall 2:
T_n-Stern mit $n = 5$

In diesem Fall besitzt der T_n-Stern genau eine stark listen-ungepaarte Kante, da Bedingung (B2) vor dem Zug von Bob erfüllt war und Bob durch seinen Zug höchstens eine stark listen-ungepaarte Kante produzieren konnte.

Alice färbt in ihrem Zug diejenige Kante, die zum Basisknoten v_B inzident und zugleich zur stark listen-ungepaarten Kante adjazent ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

Durch diesen Zug erzeugt Alice einen regulären T_n-Stern mit $n = 5$, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält, sowie eine T_n-Komponente mit $n = 2$.
(B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Fall 3:
T_n-Stern mit $n = 4$

In diesem Fall können bis zu drei stark listen-ungepaarte Kanten existieren. Da Alice aber nur in den Fällen, in denen die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten < 3 ist (Fälle 3.1 – 3.3), gewährleisten kann, dass nach ihrem Zug die Bedingungen (B1) und (B2) wieder erfüllt sind, muss der Fall mit drei stark listen-ungepaarten Kanten separat betrachtet werden (Fälle 3.4 – 3.6).

Das Vorgehen zu den Fällen 3.4 – 3.6 gestaltet sich dabei folgendermassen: Alice versucht in ihrem Zug so viele stark listen-ungepaarte Kanten wie möglich zu entfernen. Sind danach (B1) und (B2) für diese T_n-Komponente wieder erfüllt, so kann das Spiel normal fortgesetzt werden und der Fall wird nicht mehr weiteruntersucht. Kann Alice durch ihren Zug nur zwei stark listen-ungepaarte Kanten entfernen (dies ist immer möglich, wie man sehen wird), so wird der Fall weiteruntersucht, bis (B1) und (B2) für diese T_n-Komponente wieder erfüllt sind. Auf die anderen T_n-Komponenten, die durch die jeweiligen Züge von Alice und Bob möglicherweise entstehen, wird, solange es sich um T_n-Komponenten mit $n = 2$ oder um reguläre T_n-Sterne mit $n = 3$ handelt, nicht näher eingegangen.

</td>
</tr>
</table>

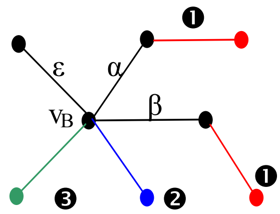
Fall 3.1: es existiert genau **eine** stark listen-ungepaarte Kante.

Alice färbt in ihrem Zug diejenige Kante, die zum Basisknoten v_B inzident und zugleich zur stark listen-ungepaarten Kante adjazent ist, mit einer beliebigen möglichen Farbe.

(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall 3.2: es existieren genau **zwei** stark listen-ungepaarte Kanten und diese sind mit der **gleichen Farbe** gefärbt.

Situation:



Alice geht nun wie folgt vor:

Falls die Liste zur Kante ε die Farbe ❶ enthält, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit der Farbe ❶.

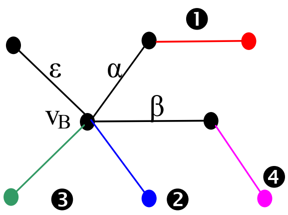
Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante ε eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante β enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe.

In allen anderen Fällen enthält die Liste zur Kante α mindestens eine Farbe, die in der Liste zur Kante β nicht enthalten ist. In diesem Fall färbt Alice die Kante α mit einer solchen Farbe.

In jedem Fall sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall 3.3: es existieren genau **zwei** stark listen-ungepaarte Kanten und diese sind mit **verschiedenen Farben** gefärbt.

Situation:



Alice geht nun wie folgt vor:

Falls die Liste zur Kante α eine Farbe enthält, die in der Liste zur Kante β nicht enthalten ist und diese Farbe ist nicht gleich der Farbe ❶, so färbt Alice die Kante α mit einer solchen Farbe.

Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante β eine Farbe, die in der Liste zur Kante α nicht enthalten ist, und ist diese Farbe nicht gleich der Farbe ❹, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe

Ist auch dies nicht der Fall, sind aber die Listen zu den beiden Kanten α und β identisch, so färbt Alice die Kante α mit der Farbe ❹.

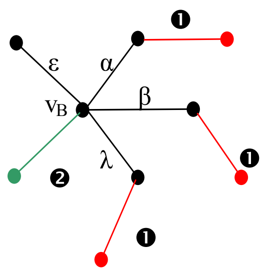
In allen anderen Fällen färbt sie die Kante ε wie folgt:
Falls die Liste zur Kante ε eine Farbe enthält, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante β enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe.

Ist dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante ε nur Farben, die in mindestens einer der Listen zu den Kanten α oder β vorkommt. In diesem Fall enthält die Liste zur Kante ε aber die Farbe ❶, welche in der Liste zur Kante β nicht vorkommt. Alice färbt dann die Kante ε mit der Farbe ❶.

In jedem Fall sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall 3.4: es existieren genau **drei** stark listen-ungepaarte Kanten und diese sind alle mit der **gleichen Farbe** gefärbt.

Situation:



Alice geht nun wie folgt vor:

Falls die Liste zur Kante ε die Farbe ❶ enthält, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit der Farbe ❶. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante ε eine Farbe, die in keiner der Listen zu den Kanten α, β und λ enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

In allen anderen Fällen können die Listen zu den Kanten α, β und λ nicht identisch sein.

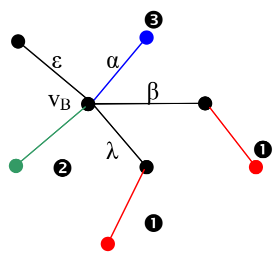
Enthält eine der Listen zu den Kanten α, β oder λ eine Farbe, die in den jeweils beiden anderen Listen nicht vorkommt, so färbt Alice eine dieser Kanten mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht möglich, so ist jede Farbe der Liste zur Kante α in mindestens einer der Listen zu den Kanten β oder λ enthalten.

Mögliche Farbverteilung in diesem Fall:
L(α) = {1,2,**3**,**4**,5,6}, L(β) = {1,2,**4**,5,6,7}, L(λ) = {1,2,**3**,5,6,7}, L(ε) = {2,**3**,**4**,5,6,7}

Alice färbt dann die Kante α mit einer Farbe, die in der Liste zur Kante β nicht enthalten ist, in der Liste zur Kante λ aber vorkommt.

Neue Situation:



(Man beachte hierbei:
Die Farbe ❸ ist in der Liste zur Kante β nicht enthalten.
Die Farbe ❸ ist in der Liste zur Kante λ enthalten.)

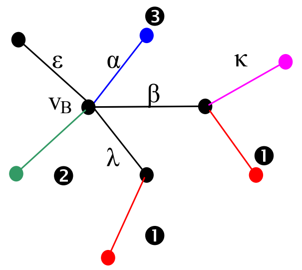
Es wird nun für diesen Fall gezeigt, dass Alice dafür sorgen kann, dass diese kritische T_n-Komponente dennoch vollständig gefärbt werden kann.

Bob kann nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

a) Bob färbt die Kante λ. In diesem Fall sind dann sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt.
b) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
c) Bob färbt die Kante ε. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
d) Bob färbt in seinem Zug eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
e) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

f) Bob färbt in seinem Zug eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
g) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Dies ist gemäss Voraussetzung möglich. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
h) Bob färbt in seinem Zug eine zur Kante ε adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
j) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante ε adjazent ist, bei der aber die Kante ε auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall f)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

Falls möglich, färbt Alice nun in ihrem Zug die Kante β mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ enthalten ist. (B1) und (B2) sind dann in diesem Fall nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Der einzige Fall, bei welchem dies nicht möglich ist, tritt dann ein, wenn die Liste zur Kante β nur eine Farbe enthält, welche die Liste zur Kante λ nicht enthält und diese Farbe diejenige ist, mit der Bob soeben die Kante κ gefärbt hat. (Man beachte hierbei, dass die Listen zu den Kanten β und λ gemäss Voraussetzung nicht identisch sein können).

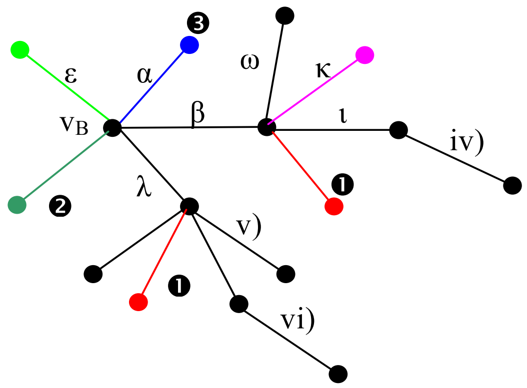
In diesem Fall betrachtet Alice die Kante ε. Enthält die Liste zur Kante ε die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit dieser Farbe. (B2) ist dann wieder erfüllt. Allerdings existieren nach diesem Zug von Alice immer noch zwei Basisknoten, weshalb *dieser Fall weiterverfolgt werden muss* (siehe übernächster Absatz).

Ist dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante ε mindestens zwei Farben, die nicht in der Liste zur Kante β enthalten sind. (Denn ❶ und die Farbe der Kante κ sind umgekehrt nicht in der Liste zur Kante ε enthalten). Da aber offenbar die Listen zu den beiden Kanten β und λ genau fünf Farben gemeinsam haben (darunter auch die Farbe ❶), kann Alice die Kante ε mit einer Farbe färben, die weder in der Liste zur Kante β noch in der Liste zur Kante λ enthalten ist. Auch in diesem Fall ist (B2) dann wieder erfüllt. Allerdings existieren auch nach diesem Zug von Alice immer noch zwei Basisknoten, weshalb auch *dieser Fall weiterverfolgt werden muss* (siehe nächster Absatz).

Hat Alice in ihrem Zug die Kante ε wie oben beschrieben gefärbt, so kann Bob nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:
i) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall sind dann sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt.
ii) Bob färbt die Kante λ. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe, wodurch dann sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt sind.
iii) Bob färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Durch diesen Zug von Alice entsteht ein T_n-Stern mit $n = 5$, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält sowie ein T_n-Stern mit $n = 4$, welcher ebenfalls keine stark listen-ungepaarte Kante enthält. Es sind somit (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

iv) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
v) Bob färbt in seinem Zug eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
vi) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*

Neue Situation zu den Fällen iv), v) und vi):



(Man beachte hierbei: Die Listen zu den beiden Kanten β und λ haben genau fünf Farben gemeinsam, wobei die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante β und die Farbe der Kante κ nicht in der Liste zur Kante λ enthalten ist. Ferner ist die Farbe der Kante ε entweder gleich der Farbe der Kante κ oder sie ist weder in der Liste zur Kante β noch in der Liste zur Kante λ enthalten.)

Zu Fall iv):

Ist der T_n-Stern mit n = 4, welcher entsteht, wenn Alice in ihrem Zug nun die Kante β färbt, kein relevanter T_n-Stern, so färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann für alle Komponenten wieder erfüllt.
Ist dies nicht der Fall, aber ist die Kante, die Bob in seinem Zug soeben gefärbt hat, nicht stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten (Endknoten der Kante β, welcher nicht v_B ist), so färbt Alice in ihrem Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann für alle Komponenten wieder erfüllt.

In allen anderen Fällen hat Bob somit durch seinen Zug eine stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten, welcher Maximalgrad besitzt, produziert. Alice versucht nun in ihrem Zug die Kante β so zu färben, dass danach keine stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten mehr existiert. (B1) und (B2) wären dann wieder für alle Komponenten erfüllt.

Ist dies nicht möglich, so versucht Alice die Kante ι, welche zwischen dem zweiten Basisknoten und der stark listen-ungepaarten Kante liegt, mit einer Farbe zu färben, die nicht in der Liste zur Kante β vorhanden ist. Gelingt ihr das, so kann Bob in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:
– er färbt die Kante β, wodurch ein T_n-Stern mit n = 5 sowie ein T_n-Stern mit n = 4 entstehen, welche beide keine stark listen-ungepaarten Kanten enthalten. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
– er färbt die nicht-induzierte und zum zweiten Basisknoten inzidente Kante ω. In diesem Fall färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Durch diesen Zug entsteht ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält sowie eine vollständig gefärbte Komponente. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
– er färbt eine zur Kante ω adjazente Kante, welche aber nicht stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten ist, bzw. er färbt eine nicht zur Kante ω adjazente Kante, bei welcher aber die Kante ω auf dem Weg von dieser Kante zum zweiten Basisknoten liegt. In diesem Fall färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe, wodurch zwei T_n-Sterne mit n = 5 entstehen, welche

beide keine stark listen-ungepaarten Kanten enthalten. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.

- er färbt eine zur Kante ω adjazente Kante, welche stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten ist. In diesem Fall färbt Alice die Kante ω mit einer beliebigen möglichen Farbe. Da nach diesem Zug von Alice immer noch zwei Basisknoten existieren, *muss dieser Fall weiterverfolgt werden:*
  - Bob kann nun in seinem nächsten Zug die Kante β färben, wodurch ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält sowie eine vollständig gefärbte Komponente entstehen. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
  - Bob kann die Kante λ färben. In diesem Fall färbt Alice dann in ihrem Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Dies ist möglich, da Alice mindestens eine mögliche Farbe zur Verfügung steht! Durch diesen Zug entstehen zwei vollständig gefärbte Komponenten. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
  - Bob kann eine andere ungefärbte Kante, bei welcher die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt, färben. In diesem Fall färbt Alice die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es bleibt ihr dann immer noch eine mögliche Farbe, um die letzte verbleibende ungefärbte Kante β dieser Komponente zulässig färben zu können. (Denn entweder sind drei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind, oder es sind zwei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind und zudem besitzen zwei zur Kante β adjazente Kanten dieselbe Farbe.) (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.

Kann Alice weder die Kante β noch die Kante ι so wie oben beschrieben färben, so sind die Listen zu den beiden Kanten β und ι identisch (in diesem Fall besitzt dann aber die von Bob soeben gefärbte Kante zwangsläufig eine Farbe, mit der bereits eine andere zu v_B inzidente Kante gefärbt ist, da Alice ansonsten bereits die Kante β mit dieser Farbe hätte färben können, was den Voraussetzungen widerspricht) oder sie haben genau fünf Farben gemeinsam (die Farbe, mit der Bob soeben seine Kante gefärbt hat, ist dann nur in der Liste zur Kante ι enthalten und die Farbe, die nur in der Liste zur Kante β enthalten ist, ist dann eine Farbe, mit der bereits eine zu v_B inzidente Kante gefärbt ist).
In diesem Fall färbt Alice die nicht-induzierte und zum zweiten Basisknoten inzidente Kante ω wie folgt:
Falls möglich, färbt sie die Kante ω mit einer Farbe, die in keiner der Listen zu den Kanten β und ι vorkommt.
Ist dies nicht möglich, so färbt sie die Kante ω mit einer Farbe, die nur in einer der Listen zu den Kanten β oder ι vorkommt.
Ist auch dies nicht möglich, so sind diese drei Listen identisch. In diesem Fall färbt Alice die Kante ω mit der Farbe, mit der auch die stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten gefärbt ist. (Man beachte hierbei, dass dann mit dieser Farbe bereits eine zu v_B inzidente Kante gefärbt ist, wie weiter oben ausgeführt wurde.) Da nach dem Zug von Alice immer noch zwei Basisknoten existieren, *muss dieser Fall weiterverfolgt werden*:

- Bob kann nun in seinem nächsten Zug die Kante β färben. Beide durch diesen Zug entstehenden Komponenten sind T_n-Sterne mit n = 5, welche keine stark listen-ungepaarten Kanten enthalten. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.
- Bob kann in seinem nächsten Zug die Kante ι färben. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Durch diesen Zug von Alice entsteht ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält, sowie eine vollständig gefärbte Komponente. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.

– Bob kann in seinem nächsten Zug eine weitere zur Kante ι adjazente Kante färben, welche nicht zum zweiten Basisknoten inzident ist bzw. eine Kante, welche nicht zur Kante ι adjazent ist, bei der aber die Kante ι auf dem Weg von dieser Kante zum zweiten Basisknoten liegt. In diesem Fall färbt Alice die Kante ι mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es existiert dann keine stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten mehr. Allerdings besitzt die Komponente immer noch zwei Basisknoten.
  Der Fall muss also weiterverfolgt werden.
  – Bob kann nun in seinem nächsten Zug die Kante β färben, wodurch ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält, sowie eine vollständig gefärbte Komponente entstehen. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.
  – Bob kann die Kante λ färben. In diesem Fall färbt Alice dann in ihrem Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Dies ist möglich, da Alice mindestens eine mögliche Farbe zur Verfügung steht! Durch diesen Zug von Alice entstehen zwei vollständig gefärbte Komponenten. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.
  – Bob kann eine andere ungefärbte Kante, bei welcher die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt, färben. In diesem Fall färbt Alice die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es bleibt ihr dann immer noch eine mögliche Farbe, um die letzte verbleibende Kante β dieser Komponente zulässig färben zu können. (Denn entweder sind drei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind, oder es sind zwei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind und zudem besitzen zwei zur Kante β adjazente Kanten dieselbe Farbe, oder es ist eine zur Kante β adjazente Kante so gefärbt, dass ihre Farbe nicht in der Liste zur Kante β vorhanden ist und zudem existieren vier gefärbte und zur Kante β adjazente Kanten so, dass diese insgesamt nur zwei verschiedene Farben besitzen.) (B1) und (B2) sind dann für alle Komponenten wieder erfüllt.

Zu Fall v) und vi):

In diesen beiden Fällen färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe.
Bob wiederum, hat nun in seinem nächsten Zug folgende Möglichkeiten:
– er färbt die Kante β. In diesem Fall sind (B1) und (B2) wieder für alle Komponenten erfüllt.
– er färbt eine zum zweiten Basisknoten (Endknoten der Kante β, welcher nicht v_B ist) inzidente Kante. In diesem Fall färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Dies ist möglich, da Alice mindestens eine mögliche Farbe zur Verfügung steht! Durch diesen Zug entsteht eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein T_n-Stern mit n = 4, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
– er färbt eine Kante, welche durch seinen Zug stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten wird.
  Falls der zweite Basisknoten nicht Maximalgrad besitzt, färbt Alice nun die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Durch diesen Zug entsteht eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein nicht relevanter T_n-Stern mit n = 4. (B1) und (B2) sind dann wieder für alle Komponenten erfüllt.
  Besitzt der zweite Basisknoten Maximalgrad, so versucht Alice nun in ihrem Zug die Kante β so zu färben, dass danach keine stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten mehr existiert. Gelingt ihr das, dann entsteht durch ihren Zug eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein T_n-Stern mit n = 4, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält. (B1) und (B2) sind somit für

alle Komponenten wieder erfüllt.
Ist dies nicht möglich, so versucht Alice die Kante ι, welche zwischen dem zweiten Basisknoten und der stark listen-ungepaarten Kante liegt, mit einer Farbe zu färben, die nicht in der Liste zur Kante β vorhanden ist. Gelingt ihr das, so kann Bob in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

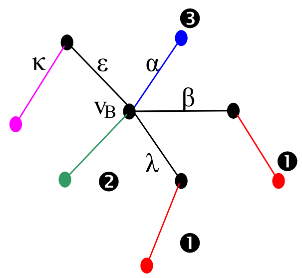
- er färbt die Kante β, wodurch eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein T_n-Stern mit n = 4, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält, entstehen. (B1) und (B2) sind dann wieder für alle Komponenten erfüllt.
- er färbt die nicht-induzierte und zum zweiten Basisknoten inzidente Kante ω. In diesem Fall färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Dies ist möglich, da Alice mindestens eine mögliche Farbe zur Verfügung steht! Durch diesen Zug von Alice entstehen zwei vollständig gefärbte Komponenten. (B1) und (B2) sind somit wieder für alle Komponenten erfüllt.
- er färbt eine zur Kante ω adjazente Kante, welche aber nicht stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten ist, bzw. er färbt eine nicht zur Kante ω adjazente Kante, bei welcher aber die Kante ω auf dem Weg von dieser Kante zum zweiten Basisknoten liegt. In diesem Fall färbt Alice die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Durch diesen Zug von Alice entsteht eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält. (B1) und (B2) sind dann wieder für alle Komponenten erfüllt.
- er färbt eine zur Kante ω adjazente Kante, welche stark listen-ungepaart in Bezug auf den zweiten Basisknoten ist. In diesem Fall färbt Alice die Kante ω mit einer beliebigen möglichen Farbe. Alice besitzt dann immer noch eine mögliche Farbe, um die verbleibende, letzte ungefärbte Kante β zulässig färben zu können. (Denn entweder sind drei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind, oder es sind zwei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind und zudem besitzen zwei zur Kante β adjazente Kanten dieselbe Farbe.) (B1) und (B2) sind dann wieder für alle Komponenten erfüllt.

Kann Alice weder die Kante β noch die Kante ι so wie oben beschrieben färben, so sind die Listen zu den beiden Kanten β und ι identisch (in diesem Fall besitzt dann aber die von Bob soeben gefärbte Kante zwangsläufig eine Farbe, mit der bereits eine andere zu v_B inzidente Kante gefärbt ist, da Alice ansonsten bereits die Kante β mit dieser Farbe hätte färben können, was den Voraussetzungen widerspricht) oder sie haben genau fünf Farben gemeinsam (die Farbe, mit der die stark listen-ungepaarte Kante gefärbt ist, ist dann nur in der Liste zur Kante ι enthalten und die Farbe, die nur in der Liste zur Kante β enthalten ist, ist dann eine Farbe, mit der bereits eine zu v_B inzidente Kante gefärbt ist).
In diesem Fall färbt Alice die nicht-induzierte und zum zweiten Basisknoten inzidente Kante ω wie folgt:
Falls möglich, färbt sie die Kante ω mit einer Farbe, die in keiner der Listen zu den Kanten β und ι vorkommt.
Ist dies nicht möglich, so färbt sie die Kante ω mit einer Farbe, die nur in einer der Listen zu den Kanten β oder ι vorkommt.
Ist auch dies nicht möglich, so sind diese drei Listen identisch. In diesem Fall färbt Alice die Kante ω mit der Farbe, mit der auch die stark listen-ungepaarte Kante in Bezug auf den zweiten Basisknoten gefärbt ist. (Man beachte hierbei, dass dann mit dieser Farbe bereits eine zu v_B inzidente Kante gefärbt ist, wie weiter oben ausgeführt wurde.) Da nach diesem Zug von Alice immer noch zwei Basisknoten existieren, *muss dieser Fall weiterverfolgt werden:*

- Bob kann in seinem nächsten Zug die Kante β färben. Durch diesen Zug entsteht eine vollständig gefärbte Komponente sowie ein T_n-Stern mit n = 5, welcher keine stark listen-ungepaarte Kante enthält. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.

- Bob kann in seinem nächsten Zug die Kante ι färben, dann färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Dies ist möglich, da Alice mindestens eine mögliche Farbe zur Verfügung steht! Durch diesen Zug von Alice entstehen zwei vollständig gefärbte Komponenten. (B1) und (B2) sind somit für alle Komponenten wieder erfüllt.
- Bob kann in seinem Zug eine weitere zur Kante ι adjazente Kante färben, welche nicht zum zweiten Basisknoten inzident ist bzw. eine Kante, welche nicht zur Kante ι adjazent ist, bei der aber die Kante ι auf dem Weg von dieser Kante zum zweiten Basisknoten liegt. In diesem Fall färbt Alice die Kante ι mit einer beliebigen möglichen Farbe. Alice besitzt dann immer noch eine mögliche Farbe, um die verbleibende, letzte ungefärbte Kante β zulässig färben zu können. (Denn entweder sind drei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind, oder es sind zwei zur Kante β adjazente Kanten so gefärbt, dass ihre Farben nicht in der Liste zur Kante β vorhanden sind und zudem besitzen zwei zur Kante β adjazente Kanten dieselbe Farbe, oder es ist eine zur Kante β adjazente Kante so gefärbt, dass ihre Farbe nicht in der Liste zur Kante β vorhanden ist und zudem existieren vier gefärbte und zur Kante β adjazente Kanten so, dass diese insgesamt nur zwei verschiedene Farben besitzen.) (B1) und (B2) sind dann wieder für alle Komponenten erfüllt.

Fall h)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

Ist die Kante κ nicht stark listen-ungepaart, so färbt Alice in ihrem Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist die Kante κ stark listen-ungepaart, so geht Alice wie folgt vor:
Existiert in der Liste zur Kante ε eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ enthalten ist, und ist diese Farbe nicht gleich der Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist dies nicht möglich, so haben die Listen zu den beiden Kanten λ und ε genau fünf Farben gemeinsam. (Man beachte, dass die Farbe der Kante κ nicht gleich der Farbe ❶ sein kann, da die Farbe ❶ nicht in der Liste zur Kante ε enthalten ist. Die beiden Listen unterscheiden sich somit nur in der Farbe ❶ und in der Farbe der Kante κ).

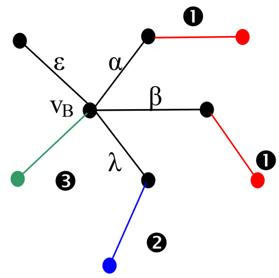
In diesem Fall betrachtet Alice nun die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice in ihrem Zug die Kante β ebenfalls mit dieser Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist die Farbe der Kante κ nicht in der Liste zur Kante β enthalten, so folgt, dass die Liste zur Kante β eine Farbe enthält, die weder in der Liste zur Kante λ noch in der Liste zur Kante ε enthalten ist.
(Die Farbe ❸ und die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, ist in der Liste zur Kante ε enthalten, nicht aber in der Liste zur Kante β. Die Liste zur Kante β enthält somit neben der Farbe ❶ eine weitere Farbe, die nicht in der Liste zur Kante ε vorkommt. Zudem enthält die Liste zur Kante β zwangsläufig eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ enthalten ist. Diese Farbe kann aber nicht die Farbe der Kante κ sein.)

Alice färbt in diesem Fall die Kante β mit einer solchen Farbe.
(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall 3.5: es existieren genau **drei** stark listen-ungepaarte Kanten und diese sind in genau **zwei verschiedenen Farben** gefärbt.

Situation:



Alice geht nun wie folgt vor:

Falls die Liste zur Kante ε eine Farbe enthält, die in keiner der Listen zu den Kanten α, β und λ enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe.
(B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante λ die Farbe ❶, so färbt Alice die Kante λ mit der Farbe ❶. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Enthält die Liste zur Kante λ die Farbe ❶ nicht, ist aber die Farbe ❶ in der Liste zur Kante ε enthalten, so färbt Alice die Kante ε mit der Farbe ❶.
(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht der Fall, enthalten aber die Listen zu den Kanten α und β die Farbe ❷ nicht, ist aber die Farbe ❷ in der Liste zur Kante ε enthalten, so färbt Alice die Kante ε mit der Farbe ❷. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht möglich, ist aber die Farbe ❷ nur in genau einer der beiden Listen zu den Kanten α oder β enthalten, so färbt Alice diese Kante mit der Farbe ❷.
(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht der Fall, enthält aber eine der Listen zu den Kanten α, β oder λ eine Farbe, die in den jeweils beiden anderen Listen nicht vorhanden ist, und ist diese Farbe nicht gleich der Farbe ❶ bzw. ❷, so färbt Alice eine dieser Kanten mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

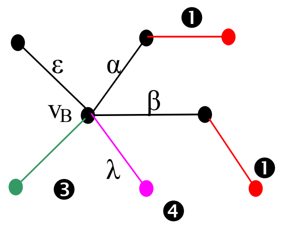
In allen anderen Fällen kann Alice mit ihrem Zug höchstens zwei stark listen-ungepaarte Kanten entfernen.

Alice färbt nun in ihrem Zug die Kante λ so, dass danach nur noch eine stark listen-ungepaarte Kante existiert.

Sie tut dies, indem sie die Kante λ mit einer Farbe färbt, die in der Liste zur Kante α enthalten ist, nicht aber in der Liste zur Kante β.

(Man beachte hierbei, dass dies nicht die Farbe ❷ sein kann, da Alice ansonsten bereits die Kante α mit der Farbe ❷ hätte färben können.
Dass überhaupt eine solche Farbe existiert, sieht man wie folgt:
Besitzt die Liste zur Kante λ eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante β vorkommt, so kann dies gemäss Voraussetzungen höchstens die Farbe ❷ sein. Besässe nun die Liste zur Kante λ keine Farbe, die nur in einer der beiden Listen zu den Kanten α oder β vorhanden ist, so wären die Listen zu den beiden Kanten α und β identisch und die Liste zur Kante λ hätte dann genau fünf Farben mit diesen beiden Listen gemeinsam (die Farben ❶ bzw. ❷ kämen dabei jeweils nur in den Listen zu den Kanten α und β bzw. λ vor).
Da nun gemäss Voraussetzungen die Farben ❶ und ❷ auch in der Liste zur Kante ε nicht enthalten sein können, besässe die Liste zur Kante ε aber zwangsläufig eine Farbe, die in keiner der Listen zu den Kanten α, β und λ enthalten ist. Dies ist aber wiederum gemäss Voraussetzungen nicht möglich.
Da die Listen zu den Kanten α, β und λ gemäss Voraussetzungen auch nicht identisch sein können, existiert nun zwangsläufig eine Farbe, die in den Listen zu den beiden Kanten α und λ, nicht aber in der Liste zur Kante β enthalten ist.)

Neue Situation:

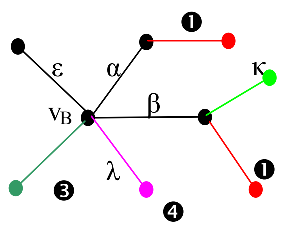


(Man beachte hierbei:
Die Farbe ❹ ist in der Liste zur Kante α enthalten.
Die Farbe ❹ ist nicht in der Liste zur Kante β enthalten.)

Bob kann nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

a) Bob färbt die Kante α. In diesem Fall sind dann sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt.
b) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe, wodurch sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt sind.
c) Bob färbt die Kante ε. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe, wodurch sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt sind.
d) Bob färbt eine zur Kante α adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
e) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante α adjazent ist, bei der aber die Kante α auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
f) Bob färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
g) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante α vorhanden ist. Dies ist gemäss Voraussetzung möglich. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
h) Bob färbt eine zur Kante ε adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
j) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante ε adjazent ist, bei der aber die Kante ε auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall f)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

Falls möglich, färbt Alice die Kante β mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante α enthalten ist. (B1) und (B2) sind dann in diesem Fall nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Der einzige Fall, bei welchem dies nicht möglich ist, tritt dann ein, wenn die Liste zur Kante β nur eine Farbe enthält, welche die Liste zur Kante α nicht enthält und diese Farbe diejenige ist, mit der Bob soeben die Kante κ gefärbt hat. (Man beachte hierbei, dass die Listen zu den Kanten α und β gemäss Voraussetzung nicht identisch sein können).

Ist dies der Fall, so haben die Listen zu den Kanten α und β genau fünf Farben gemeinsam (die Farbe ❹ und die Farbe der Kante κ sind jeweils nur in einer Liste enthalten).

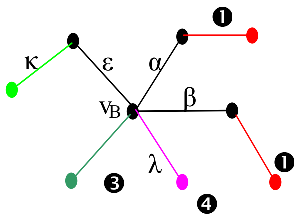
Alice betrachtet dann die Kante ε. Gemäss Voraussetzung ist die Farbe ❶ nicht in der Liste zur Kante ε enthalten. Enthält die Liste zur Kante ε die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit dieser Farbe. (Man beachte, dass in diesem Fall die Farbe der Kante κ nicht gleich ❸ und auch nicht gleich ❹ sein kann, da Alice ansonsten bereits die Kante β hätte so färben können, dass (B1) und (B2) wieder erfüllt gewesen wären.)
Enthält die Liste zur Kante ε diese Farbe nicht, so besitzt die Liste zur Kante ε mindestens eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante β vorhanden ist. Alice färbt dann die Kante ε mit einer solchen Farbe.
Durch diese Färbung der Kante ε eliminiert Alice sämtliche stark listen-ungepaarten Kanten. Allerdings existieren immer noch zwei Basisknoten. *Der Fall muss also weiterverfolgt werden.*

Hat Alice in ihrem Zug die Kante ε gefärbt, so hat Bob in seinem nächsten Zug folgende Möglichkeiten:

i) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall sind dann sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt.
ii) Bob färbt die Kante α. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe, wodurch sowohl (B1) als auch (B2) wieder erfüllt sind.
iii) Bob färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
iv) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
v) Bob färbt in seinem Zug eine zur Kante α adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
vi) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante α adjazent ist, bei der aber die Kante α auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*

Zu den Fällen iv), v) und vi)
Diese lassen sich aus dem Fall 3.4 übertragen. Es muss einfach jeweils die Kante λ durch die Kante α ersetzt werden.

Fall h)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

(Man beachte hierbei:
Die Farbe ❶ ist nicht in der Liste zur Kante ε enthalten.
Die Farbe ❹ ist nicht in der Liste zur Kante β enthalten.)

Ist die Kante κ nicht stark listen-ungepaart, so färbt Alice in ihrem Zug die Kante α mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist die Kante κ stark listen-ungepaart, so geht Alice wie folgt vor:

Falls möglich, färbt Alice die Kante α mit der Farbe, mit der Bob soeben die Kante κ gefärbt hat. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht möglich, enthält die Liste zur Kante α aber neben der Farbe ❶ eine weitere Farbe, die nicht in der Liste zur Kante ε enthalten ist, so färbt Alice die Kante α mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

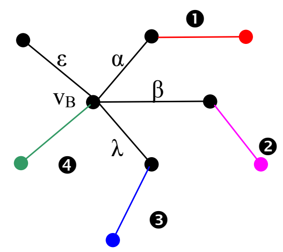
In allen anderen Fällen haben die Listen zu den beiden Kanten α und ε genau fünf

Farben gemeinsam (die Farbe ❶ und die Farbe der Kante κ kommen jeweils nur in einer Liste vor).

Alice betrachtet nun die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β die Farbe der Kante κ, so färbt Alice die Kante β mit dieser Farbe.
Ist auch dies nicht möglich, so besitzt die Liste zur Kante β zwangsläufig eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante ε vorkommt.
Alice färbt dann die Kante β mit einer solchen Farbe.
(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall 3.6: es existieren genau **drei** stark listen-ungepaarte Kanten und diese sind in **drei verschiedenen Farben** gefärbt.

Situation:



Alice geht nun wie folgt vor:

Falls die Liste zur Kante ε eine Farbe enthält, die in keiner der Listen zu den Kanten α, β und λ enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe.
(B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante ε eine Farbe, mit der bereits eine stark listen-ungepaarte Kante gefärbt ist, und ist diese Farbe nur in genau einer Liste zu den Kanten α, β oder λ enthalten, so färbt Alice die Kante ε mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht der Fall, enthält aber eine der Listen zu den Kanten α, β oder λ eine Farbe, die in den jeweils beiden anderen Listen nicht vorhanden ist, und ist diese Farbe nicht gleich der Farbe ❶ bzw. ❷ bzw. ❸, so färbt Alice eine dieser Kanten mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht möglich, gibt es aber eine Farbe, mit der bereits eine stark listen-ungepaarte Kante gefärbt ist, welche in genau zwei der Listen zu den Kanten α, β oder λ enthalten ist, so färbt Alice mit einer solchen Farbe diejenige Kante α, β oder λ, welche diese Farbe enthält und nicht zu einer Kante adjazent ist, welche bereits mit dieser Farbe gefärbt wurde.
(B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

In allen weiteren Fällen kann Alice mit ihrem Zug höchstens zwei stark listen-ungepaarte Kanten entfernen.

Es existieren nun zu diesem Zeitpunkt zwei Möglichkeiten:

– Die Listen zu allen Kanten sind identisch.
  Dass Alice in diesem Fall eine Gewinnstrategie besitzt, wurde bereits in [1] bewiesen. Es wird deshalb darauf verzichtet, an dieser Stelle näher auf diesen Spezialfall einzugehen.

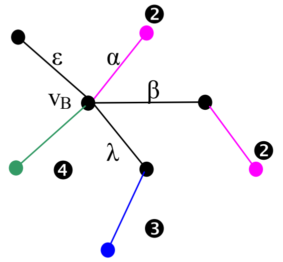
– Es sind nicht alle Listen identisch, aber die Farbverteilung in den Listen gestaltet sich so, dass nicht alle drei stark listen-ungepaarten Kanten durch den Zug von Alice entfernt werden können.

Konkret sind in diesem Fall folgende Konstellationen möglich, die näher untersucht werden müssen:
1. Die Liste zur Kante α und die Liste zur Kante λ enthalten die Farbe ❷.
2. Keine der Listen zu den Kanten α und λ und somit auch ε enthält die Farbe ❷.

1. Die Liste zur Kante α und die Liste zur Kante λ enthalten die Farbe ❷.

Alice färbt die Kante α mit der Farbe ❷.

Neue Situation:



Bob kann nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

a) Bob färbt die Kante λ. In diesem Fall sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

b) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

c) Bob färbt die Kante ε. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

d) Bob färbt eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

e) Bob färbt eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

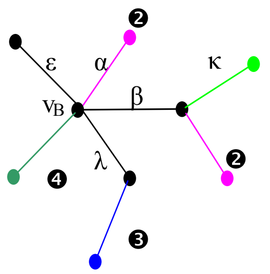
f) Bob färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*

g) Bob färbt eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β falls möglich mit der Farbe ❸, oder, falls die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante β enthalten ist, mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Dies ist dann sicher möglich, da die beiden Listen in diesem Fall nicht identisch sein können und die Farbe ❷ sowohl in der Liste zur Kante β als auch in der Liste zur Kante λ enthalten ist. In beiden Fällen sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

h) Bob färbt eine zur Kante ε adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*

j) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante ε adjazent ist, bei der aber die Kante ε auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall f)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

Falls möglich, färbt Alice nun in ihrem Zug die Kante β mit der Farbe ❸. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

Dies ist genau dann nicht möglich, wenn die Kante κ mit der Farbe ❸ gefärbt oder aber die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante β enthalten ist.

Entspricht die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, der Farbe ❸, und besitzt die Liste zur Kante β eine Farbe, die in der Liste zur Kante λ nicht vorkommt, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht möglich, so sind die Listen zu den beiden Kanten β und λ identisch.

Nun enthält aber die Liste zur Kante α ausser eventuell der Farbe ❶ keine Farbe, die in den Listen zu den beiden Kanten β und λ nicht vorkommt.
Wären die Listen zu den Kanten α, β und λ identisch, so wäre auch die Liste zur Kante ε identisch, was weiter oben bereits ausgeschlossen wurde.
Ist nun also die Farbe ❶ nicht in den Listen zu den beiden Kanten β und λ vorhanden, so kann sie auch in der Liste zur Kante ε nicht vorhanden sein.
Falls dann die Farbe ❸ in der Liste zur Kante ε enthalten ist, so färbt Alice die Kante ε mit der Farbe ❸. Ist die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante ε enthalten, so besitzt die Liste zur Kante ε eine Farbe, die in den Listen zu den beiden Kanten β und λ nicht vorkommt. Alice färbt dann die Kante ε mit einer solchen Farbe. In beiden Fällen eliminiert sie durch ihren Zug alle stark listen-ungepaarten Kanten. Allerdings existieren nach diesem Zug von Alice weiterhin zwei Basisknoten. *Der Fall muss also weiterverfolgt werden* (siehe weiter unten).

Ist die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante β vorhanden, so besitzt die Liste zur Kante β eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ vorkommt. Ist diese Farbe nicht gleich der Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

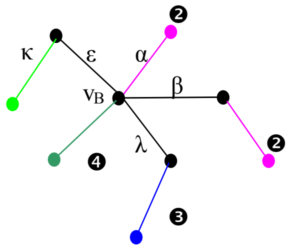
Ist dies nicht möglich, so stimmen die Listen zu den beiden Kanten β und λ in genau fünf Farben überein.
Alice betrachtet dann die Liste zur Kante ε.
Enthält die Liste zur Kante ε die Farbe ❸, so färbt Alice die Kante ε mit der Farbe ❸. Ist dies nicht der Fall, enthält aber die Liste zur Kante ε die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit dieser Farbe. Enthält die Liste zur Kante ε weder die Farbe ❸ noch die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so besitzt sie mindestens eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante β noch in der Liste zur Kante λ vorkommt. Alice färbt in diesem Fall die Kante ε mit einer solchen Farbe, wodurch sie alle stark listen-ungepaarten Kanten eliminieren kann. Allerdings existieren nach diesem Zug von Alice weiterhin zwei Basisknoten.
Der Fall muss also weiterverfolgt werden (siehe nächster Absatz).

Hat Alice in ihrem Zug die Kante ε so gefärbt, dass keine stark listen-ungepaarten Kanten mehr existieren, so kann Bob nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

i) er färbt die Kante β. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
ii) er färbt die Kante λ. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.
iii) er färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.
iv) er färbt in seinem nächsten Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
v) er färbt in seinem Zug eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
vi) er färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.

Zu den Fällen iv), v) und vi)
Diese lassen sich aus dem Fall 3.4 übertragen.
Der Unterschied zu Fall 3.4 besteht einzig darin, dass nun die Kante α nicht mit einer Farbe gefärbt ist, die in der Liste zur Kante β nicht enthalten ist, sondern dass die Kante α mit einer Farbe gefärbt ist, mit der bereits eine andere zur Kante β adjazente Kante gefärbt wurde.

Fall h)



Bob hat in seinem Zug soeben die Kante κ gefärbt.

Ist die Kante κ nicht stark listen-ungepaart, so färbt Alice in ihrem Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist die Kante κ stark listen-ungepaart, so geht Alice wie folgt vor:

Falls möglich, färbt Alice die Kante λ mit der Farbe, mit der Bob soeben die Kante κ gefärbt hat, oder, falls dies nicht möglich ist, die Kante ε mit der Farbe ❸. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Dies ist genau dann nicht möglich, wenn die Farbe ❸ und die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, identisch sind, oder, wenn weder die Farbe ❸ in der Liste zur Kante ε noch die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, in der Liste zur Kante λ vorhanden ist.

Besitzt dann aber die Liste zur Kante λ eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante ε enthalten ist, und ist diese Farbe nicht gleich der Farbe ❸, so färbt Alice die Kante λ mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

In allen anderen Fällen folgt entweder, dass die beiden Listen identisch sind oder genau fünf Farben (die Farbe ❸ und die Farbe der Kante κ sind jeweils nur in genau einer Liste enthalten) gemeinsam haben.

Sind die beiden Listen zu den Kanten ε und λ identisch und entspricht deshalb die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, der Farbe ❸, so betrachtet Alice die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β die Farbe ❸, so färbt Alice die Kante β mit dieser Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.
Ist dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante β eine Farbe, die nicht in den Listen zu den beiden Kanten ε und λ vorhanden ist. (Man beachte hierbei, dass dies nicht die Farbe ❷ sein kann.) Alice färbt in diesem Fall die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Haben die Listen zu den beiden Kanten ε und λ genau fünf Farben gemeinsam, so betrachtet Alice wiederum die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β eine der Farben, die nur in einer der beiden Listen zu den Kanten ε oder λ vorkommt, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe (man beachte hierbei wiederum, dass dies nicht die Farbe ❷ sein kann). (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

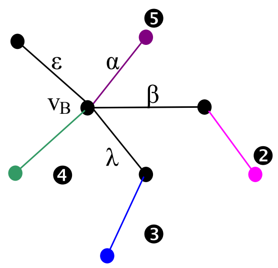
Ist auch dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante β mindestens eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante ε noch in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Alice färbt dann die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

2. *Keine der Listen zu den Kanten α, λ und ε enthält die Farbe ❷.*
   Die Liste zur Kante α enthält dadurch eine Farbe, die nicht in der Liste zur Kante β enthalten ist, und diese Farbe ist nicht gleich der Farbe ❶.

Zuerst muss gezeigt werden, dass die Liste zur Kante α eine Farbe ungleich der Farbe ❶ enthält, die in der Liste zur Kante β nicht enthalten ist.
Dass die Liste zur Kante α eine Farbe enthält, die in der Liste zur Kante β nicht vorkommt, ist klar.
Angenommen, die einzige Farbe der Liste zur Kante α, die in der Liste zur Kante β nicht vorkommt, sei die Farbe ❶. In diesem Fall kann dann aber die Farbe ❶ auch in der Liste zur Kante λ nicht enthalten sein, da Alice ansonsten die Kante λ mit der Farbe ❶ hätte färben können, wodurch (B1) und (B2) wieder erfüllt gewesen wären. Des Weiteren kann dann die Farbe ❶ auch in der Liste zur Kante ε nicht enthalten sein, da

Alice ansonsten die Kante ε mit der Farbe ❶ hätte färben können, wodurch ebenfalls (B1) und (B2) wieder erfüllt gewesen wären.
Da somit die Farben ❶ und ❷ offensichtlich nicht in der Liste zur Kante λ enthalten sein können, enthält die Liste zur Kante λ eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante α noch in der Liste zur Kante β vorhanden sein kann. (Diese unterscheiden sich ja nur in den Farben ❶ und ❷.) Diese Farbe kann dann aber nicht die Farbe ❸ sein, da in diesem Fall die Farbe ❸ auch in der Liste zur Kante ε nicht enthalten sein könnte, wodurch Alice die Kante ε bereits so hätte färben können, dass deren Farbe in keiner der Listen zu den Kanten α, β und λ vorhanden gewesen wäre, was bereits ausgeschlossen wurde. Alice könnte somit die Kante λ so färben, dass (B1) und (B2) wieder erfüllt wären, was den Voraussetzungen widersprechen würde. Es existiert somit eine Farbe ungleich der Farbe ❶, die in der Liste zur Kante α enthalten ist, nicht aber in der Liste zur Kante β.

Neue Situation:

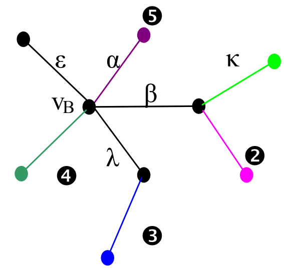


Alice hat die Kante α mit einer Farbe gefärbt, die nicht in der Liste zur Kante β enthalten ist, die aber in der Liste zur Kante λ vorkommt.

Bob kann nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:

a) Bob färbt die Kante λ. In diesem Fall sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
b) Bob färbt die Kante β. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
c) Bob färbt die Kante ε. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
d) Bob färbt eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
e) Bob färbt eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
f) Bob färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
g) Bob färbt eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer Farbe, die nicht in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Dies ist gemäss Voraussetzung möglich. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.
h) Bob färbt eine zur Kante ε adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden*.
j) Bob färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante ε adjazent ist, bei der aber die Kante ε auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. Es sind dann (B1) und (B2) nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Fall f)



Bob hat soeben die Kante κ gefärbt.

Falls möglich, färbt Alice nun in ihrem Zug die Kante β mit der Farbe ❸. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.

Dies ist genau dann nicht möglich, wenn die Kante κ mit der Farbe ❸ gefärbt oder aber die Farbe ❸ nicht in der Liste zur Kante β enthalten ist**.**

Besitzt die Liste zur Kante β neben der Farbe ❷ eine weitere Farbe, die in der Liste zur Kante λ nicht vorkommt, und diese Farbe ist nicht gleich der Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

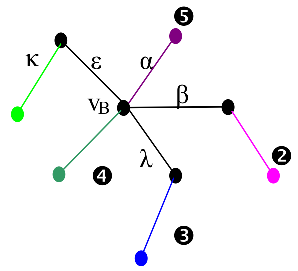
In allen anderen Fällen ergibt sich folgende Situation:
Haben die Listen zu den beiden Kanten β und λ genau fünf Farben gemeinsam (die Farben ❷ und ❺ kommen dabei jeweils nur in einer Liste vor), so entspricht die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, der Farbe ❸.
Haben die Listen zu den beiden Kanten β und λ genau vier Farben gemeinsam, so sind die beiden Farben, die nur in der Liste zur Kante β enthalten sind, die Farbe der Kante κ und die Farbe ❷.

Enthält dann aber die Liste zur Kante ε die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit dieser Farbe.
Ist dies nicht der Fall, aber enthält die Liste zur Kante ε die Farbe ❸, so färbt Alice die Kante ε ebenfalls mit der Farbe ❸.
Ist auch dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante ε mindestens eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante β noch in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Alice färbt dann die Kante ε mit einer solchen Farbe.
In allen drei Fällen reduziert sie durch ihren Zug die Anzahl der stark listen-ungepaarten Kanten auf Null. Allerdings existieren immer noch zwei Basisknoten.
Der Fall muss also weiterverfolgt werden.

Bob kann nun in seinem nächsten Zug folgende Kanten färben:
i) er färbt die Kante β. Es sind dann (B1) und (B2) wieder erfüllt.
ii) er färbt die Kante λ. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.
iii) er färbt eine zur Kante β adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. In diesem Fall färbt Alice in ihrem nächsten Zug die Kante β mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.
iv) er färbt in seinem nächsten Zug eine Kante, die nicht zur Kante β adjazent ist, bei der aber die Kante β auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
v) er färbt in seinem Zug eine zur Kante λ adjazente Kante, welche nicht zum Basisknoten v_B inzident ist. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*
vi) er färbt in seinem Zug eine Kante, die nicht zur Kante λ adjazent ist, bei der aber die Kante λ auf dem Weg von dieser Kante zum Basisknoten v_B liegt. *Dieser Fall muss genauer untersucht werden.*

Zu den Fällen iv), v) und vi)
Diese lassen sich aus dem Fall 3.4 übertragen.

Fall h)



Bob hat soeben die Kante κ gefärbt.

Ist die Kante κ nicht stark listen-ungepaart, so färbt Alice in ihrem Zug die Kante λ mit einer beliebigen möglichen Farbe. (B1) und (B2) sind dann nach dem Zug von Alice wieder erfüllt.

Ist die Kante κ stark listen-ungepaart, so geht Alice wie folgt vor:

Falls möglich, färbt Alice die Kante λ mit der Farbe, mit der Bob soeben die Kante κ gefärbt hat, oder die Kante ε mit der Farbe ❸. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Dies ist genau dann nicht möglich, wenn die Farbe ❸ und die Farbe, mit der Bob die Kante κ gefärbt hat, identisch sind, oder, wenn weder die Farbe ❸ in der Liste zur Kante ε noch die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, in der Liste zur Kante λ vorhanden ist.

Besitzt die Liste zur Kante λ neben eventuell der Farbe ❸ eine weitere Farbe, die in der Liste zur Kante ε nicht enthalten ist, so färbt Alice die Kante λ mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

In allen anderen Fällen folgt entweder, dass die Listen zu den beiden Kanten ε und λ identisch sind oder genau fünf Farben gemeinsam haben.

Sind die beiden Listen zu den Kanten ε und λ identisch, und ist somit die Farbe, mit der die Kante κ gefärbt ist, gleich der Farbe ❸, so betrachtet Alice die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β die Farbe ❸, so färbt Alice die Kante β mit dieser Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante β neben der Farbe ❷ eine weitere Farbe, die nicht in den Listen zu den beiden Kanten ε und λ vorhanden ist. (Es sind nämlich die Farben ❸ und ❺ offenbar nicht in der Liste zur Kante β enthalten.) Alice färbt in diesem Fall die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Haben die Listen zu den beiden Kanten ε und λ genau fünf Farben gemeinsam, so betrachtet Alice wiederum die Kante β. Enthält die Liste zur Kante β eine der Farben, die nur in einer der beiden Listen zu den Kanten ε oder λ vorkommt, so färbt Alice die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Ist auch dies nicht der Fall, so enthält die Liste zur Kante β neben der Farbe ❷ eine Farbe, die weder in der Liste zur Kante ε noch in der Liste zur Kante λ vorhanden ist. Alice färbt dann die Kante β mit einer solchen Farbe. (B1) und (B2) sind dann wieder erfüllt.

Alice kann also für jeden Baum mit $\Delta(G) = 5$ sicherstellen, dass sie, völlig unabhängig davon, welche Kante Bob in seinem Zug jeweils färbt und wie die Listen zu den jeweiligen Kanten aussehen, als Gewinnerin des Spiels hervorgehen kann, sofern $|L(e)| \geq 6$ $\forall e \in E(G)$ gilt.

Womit Satz 2 bewiesen ist.

VI. SPIELLISTENCHROMATISCHER INDEX $ch'_g(G)$ FÜR BÄUME MIT $2 \leq \Delta(G) \leq 4$

1. $ch'_g(G)$ für Bäume mit $\Delta(G) = 2$

> ***Satz 3:***
> **Sei $G = (V, E, \delta)$ ein Baum mit $\Delta(G) = 2$.**
> **Dann gilt $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 1$**

Dass Alice im Fall $\Delta(G) = 2$ eine Gewinnstrategie besitzt, sofern $|L(e)| \geq 3$ $\forall\, e \in E(G)$ gilt, ist sehr einfach ersichtlich, da es sich in diesem Fall bei dem Graphen um einen Weg handelt. Eine Kante kann somit höchstens zu zwei anderen Kanten adjazent sein.

2. $ch'_g(G)$ für Bäume mit $3 \leq \Delta(G) \leq 4$

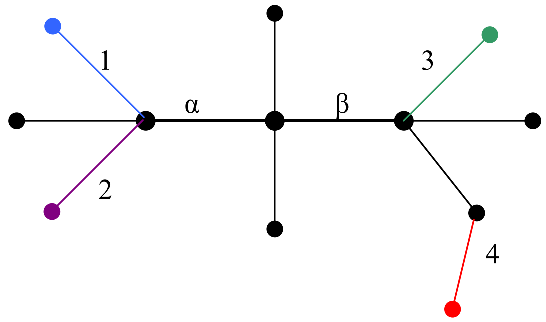
> ***Satz 4:***
> **Sei $G = (V, E, \delta)$ ein Baum mit $3 \leq \Delta(G) \leq 4$.**
> **Dann gilt $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 2$**

Die obere Schranke von Satz 4 ergibt sich dabei aufgrund der auch für diesen Fall gültigen Ausführungen von Seite 11.

Im Unterschied zu den Fällen $\Delta(G) \geq 5$ besteht jedoch das Problem bei den beiden Fällen $\Delta(G) = 3$ bzw. $\Delta(G) = 4$ darin, dass zum Beweis, dass Alice eine Gewinnstrategie besitzt, falls $|L(e)| = \Delta(G) + 1$ $\forall\, e \in E(G)$ gilt, nicht mehr mit den beiden Bedingungen (B1) und (B2) gearbeitet werden kann. Denn gemäss den Bedingungen (B1) und (B2) dürfte bei beiden Fällen jede T_n-Komponente mit $n \geq 3$ nach jedem Zug von Alice **keine** stark listen-ungepaarte Kante enthalten.

Dies zu bewerkstelligen ist allerdings für Alice unmöglich, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4:
T_n-Komponente mit $\Delta(G) = 4$, $n = 4$ und für die Listen gelte
$L(e) = \{1, 2, 3, 4, 5\}\ \forall e \in E(G)$.
Bob hat in seinem Zug soeben eine Kante mit der Farbe 4 gefärbt und dadurch eine T_n-Komponente mit zwei Basisknoten erzeugt.



Alice hat nun keine Chance, in ihrem nächsten Zug eine der beiden inneren Kanten α oder β so zu färben, dass dadurch zwei Komponenten T'_n und T''_n mit jeweils $n = 3$ entstehen, welche beide keine stark listen-ungepaarten Kanten enthalten.

Dieses Beispiel 4, welches sich auch sehr gut auf den Fall $\Delta(G) = 3$ übertragen lässt, beweist nicht, dass Alice keine Gewinnstrategie besitzt, wenn für die Listen zu den Kanten $|L(e)| = \Delta(G) + 1\ \ \forall e \in E(G)$ gilt. Es zeigt aber, dass sich die Vorgehensweise aus den beiden Abschnitten IV und V hier nicht anwenden lässt.

Um beweisen zu können, dass $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ auch in den Fällen $3 \leq \Delta(G) \leq 4$ gilt, müsste also entweder eine völlig andere Strategie, welche nicht auf regulären T_n-Sternen und stark listen-ungepaarten Kanten basiert, gewählt werden, oder aber, es müssten alle Fälle, in denen Alice nach ihrem Zug nicht die Gültigkeit beider Bedingungen wieder herstellen kann, solange weiterverfolgt werden, bis beide Bedingungen für alle Komponenten wieder erfüllt sind bzw. bis man feststellen kann, dass Alice das Spiel nicht gewinnen kann.

Die zweite oben beschriebene Taktik war dabei in Abschnitt V insofern machbar, als dass nur ein spezieller Fall (T_n-Stern mit $n = 4$ und drei stark listen-ungepaarten Kanten) weiterverfolgt werden musste. Im Fall $3 \leq \Delta(G) \leq 4$ würde sich diese Zahl aber drastisch erhöhen, da im Gegensatz zu den Abschnitten IV und V bereits jeder T_n-Stern mit $n = 3$ auf stark listen-ungepaarte Kanten überprüft werden müsste.

Um andererseits widerlegen zu können, dass $ch'_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ für Bäume mit $3 \leq \Delta(G) \leq 4$ gilt, könnte man natürlich auch analog zu Abschnitt VII versuchen, einen Baum sowie eine dazugehörige Listenverteilung mit $|L(e)| = \Delta(G) + 1$ $\forall e \in E(G)$ zu finden, für welchen Bob eine Gewinnstrategie besitzt. Doch auch dieser Beweis ist nicht gerade leicht zu vollbringen.

Dies zeigen auch die aktuellen Forschungsergebnisse. So konnte zwar in [3] und [1] bewiesen werden, dass $\chi'_g(G) \leq 4$ für Bäume mit $\Delta(G) = 3$ gilt, doch der Fall $\Delta(G) = 4$ bleibt weiter offen. In diesem Fall konnte bisher weder bewiesen werden, dass $\chi'_g(G) \leq 5$ ist, noch dass ein Baum mit $\Delta(G) = 4$ existiert, auf welchem Bob eine Gewinnstrategie besitzt, wenn $|L(e)| = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\forall\, e \in E(G)$ gilt.

VII. Besitzt Alice auch eine Gewinnstrategie für $|L(e)| < (\Delta(G)+1)$ $\forall\ e \in E(G)$?

Wie in [5] wird nun gezeigt, dass die untere Grenze der Abschätzung in den Sätzen 1, 2 und 3 scharf ist. Denn für den Fall $|L(e)| = \Delta(G)\ \ \forall\, e \in E(G)$ besitzt Alice keine Gewinnstrategie mehr.

Zudem wird in Bezug auf Satz 4 bewiesen, dass Alice keine Gewinnstrategie besitzt, falls $|L(e)| < (\Delta(G)+1)\ \forall\, e \in E(G)$ gilt.

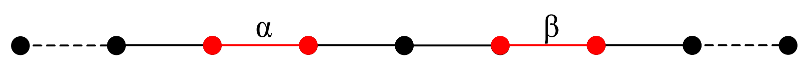
Satz 5:
Gilt $\Delta(G) \geq 2$, so existiert ein Baum mit $ch'_g(G) = \Delta(G) + 1$

Als Beweis dieses Satzes wird für jeden Fall ein Baum sowie eine Listenverteilung mit $|L(e)| = \Delta(G)\ \forall\, e \in E(G)$ angegeben, so dass Bob eine Gewinnstrategie besitzt.

1. Baum mit $\Delta(G) = 2$

Gegeben sei ein Weg der Länge ≥ 6 und für die Listen zu den Kanten gelte $L(e) = \{1, 2\}\ \forall\, e \in E(G)$.

Färbt Alice in ihrem ersten Zug eine beliebige Kante α mit der Farbe 1, so färbt Bob in seinem ersten Zug eine Kante β so, dass sie die gleiche Farbe wie die Kante α erhält und der Weg zwischen den beiden gefärbten Kanten die Länge 2 hat. In diesem Fall hat Bob das Spiel bereits gewonnen.



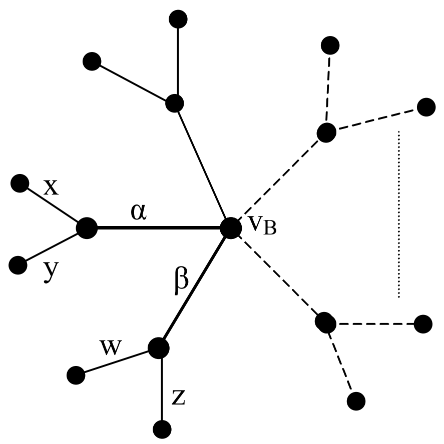
2. Baum mit $\Delta(G) \geq 3$

Gegeben sei ein Baum mit einem Basisknoten v_B, so dass gilt: der Basisknoten v_B besitzt genau $\Delta(G)$ inzidente Kanten, welche jeweils zu genau $\Delta(G)+1$ Kanten adjazent sind. Zudem gelte für die Listen zu den Kanten $L(e) = \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ $\forall\, e \in E(G)$.

Bob reagiert nun auf jeden Zug von Alice wie folgt:

– färbt Alice eine zu v_B inzidente Kante und existieren nach dem Zug von Alice noch mehr als zwei ungefärbte und zu v_B inzidente Kanten, so färbt Bob in seinem Zug eine ebenfalls zu v_B inzidente Kante.
– färbt Alice eine nicht zu v_B inzidente Kante, so färbt Bob, sofern noch mehr als zwei ungefärbte und zu v_B inzidente Kanten existieren, in seinem nächsten Zug die zu v_B inzidente Kante auf dem Weg zur soeben von Alice gefärbten Kante.

Auf diese Weise erreicht Bob, dass der Fall eintritt, dass der Baum nach einem seiner Züge oder nach einem Zug von Alice noch genau zwei ungefärbte, zu v_B inzidente und nicht-induzierte Kanten α und β besitzt, die keine Blattkanten sind (vgl. nachfolgende Grafik).



Für den weiteren Spielverlauf sind nun folgende Situationen möglich (falls Alice am Zug ist, werden nur diejenigen Züge betrachtet, die für Alice auch Sinn machen. D.h. es wird davon ausgegangen, dass Alice in ihrem Zug keine zusätzliche stark listen-ungepaarte Kante produziert):

(i) Ist Alice am Zug und färbt sie die zu v_B inzidente Kante α (bzw. β), so färbt Bob in seinem nächsten Zug die Kante w (bzw. x), die adjazent zur verbleibenden ungefärbten und zu v_B inzidenten Kante β (bzw. α) ist, mit einer Farbe, die bisher nicht verwendet wurde. Bob hat dann das Spiel gewonnen, da Alice keine Chance mehr hat, die letzte verbleibende ungefärbte und zu v_B inzidente Kante zulässig färben zu können.

(ii) Ist Alice am Zug und färbt sie die Kante x, die adjazent zu der zu v_B inzidenten Kante α ist, mit einer Farbe, die bereits verwendet wurde, so färbt Bob in seinem nächsten Zug die Kante w mit einer Farbe, die bisher nicht verwendet wurde.
Färbt Alice nun in ihrem nächsten Zug die Kante β mit der für diese Kante letzten verbleibenden Farbe, so färbt Bob in seinem nächsten Zug die Kante y mit der Farbe, mit der er bereits die Kante w gefärbt hat.

Färbt Alice hingegen in ihrem nächsten Zug die Kante α mit der Farbe, mit der Bob soeben die Kante w gefärbt hat, so färbt Bob in seinem nächsten Zug die Kante z mit der letzten verbleibenden Farbe, die bisher nicht verwendet wurde.

Färbt Alice in ihrem Zug weder die Kante α noch die Kante β, so färbt Bob die Kante α so, dass diese nicht die gleiche Farbe wie die Kante w besitzt.
In allen Fällen hat Bob gewonnen, da Alice nicht mehr alle zu v_B inzidenten Kanten zulässig färben kann.

Die Fälle, in denen Alice in ihrem Zug anstelle der Kante x eine der Kanten y, w oder z färbt, verlaufen analog.

(iii) Ist Bob am Zug, so färbt er die Kante x, die adjazent zu der zu v_B inzidenten Kante α ist, mit einer Farbe, die bisher nicht verwendet wurde.
Färbt Alice dann die Kante α mit der für diese Kante letzten verbleibenden Farbe, so färbt Bob in seinem nächsten Zug die Kante w mit der Farbe, mit der er bereits die Kante x gefärbt hat.
Färbt Alice hingegen die Kante β mit der Farbe, mit der Bob soeben die Kante x gefärbt hat, so färbt Bob in seinem Zug die Kante y mit der letzten verbleibenden Farbe, welche bisher nicht verwendet wurde.
Färbt Alice in ihrem Zug weder die Kante α noch die Kante β, so färbt Bob in seinem Zug eine zur Kante α adjazente Kante so, dass die Kante α zu $\Delta(G)$ verschieden gefärbten Kanten adjazent ist.
In allen Fällen hat Bob gewonnen, da Alice nicht mehr alle zu v_B inzidenten Kanten zulässig färben kann.

Womit Satz 5 bewiesen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Stephan Dominique Andres*: Spieltheoretische Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern und verwandte Strukturen, Diplomarbeit am Mathematischen Institut der Universität Köln, 2003.

[2] *Hans L. Bodlaender*: On the complexity of some coloring games, Utrecht University, Department of Computer Science, RUU-CS-89-27, 1989.

[3] *Leizhen Cai, Xuding Zhu*: Game chromatic index of *k*-degenerate graphs, URL: http://www.cse.cuhk.edu.hk/~lcai/game.ps

[4] *Peter Che Bor Lam, Wai Chee Shiu, Baogang Xu*: Edge Game Coloring of Graphs, URL: http://www.math.hkbu.edu.hk/~wcshiu/PDF/p9807.pdf.

[5] *Peter L. Erdös, Ulrich Faigle, Winfried Hochstättler, Walter Kern*: Note on the Game Chromatic Index of Trees, Preprint, 2002.

[6] *Andrea Hackmann*: Kanten- und Totalfärbungen von Graphen, Dissertation an der Technischen Universität Braunschweig, 2002.

[7] *Tommy R. Jensen, Bjarne Toft*: Graph coloring problems, John Wiley & Sons, 1995.