Fakultät für Mathematik und Informatik
der FernUniversität in Hagen

Bachelorarbeit
im Lehrgebiet Analysis

Periodische Dirichlet-Reihe im Zusammenhang mit einer Verallgemeinerung der Gammafunktion und der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante

vorgelegt von

Winfried Aschauer

am

16. Februar 2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo
Zweitgutachter: Dr. Joachim Kerner

Danksagung

Sehr herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Delio Mugnolo, der mir für die Abschlussarbeit die Möglichkeit geboten hatte, ohne inhaltliche Vorgaben und vollkommen selbstständig ein eigenes Thema zu entwickeln, das kein Bestandteil aktueller Kernbereiche der Mathematik ist. Dass aus einem anfänglichen Chaos eine strukturierte Arbeit werden konnte, habe ich seiner konstruktiven Kritik und offensichtlich durch nichts zu erschütternden Geduld zu verdanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Periodische Dirichlet-Reihe **4**

3 Riemannsche Zeta-Funktion an den natürlichen Stellen **6**

4 Q_m-Funktion als Verallgemeinerung der Γ-Funktion **13**

5 Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante **32**

6 Zusammenfassung und Ausblick **39**

7 Literaturverzeichnis **41**

Symbolverzeichnis

Symbol	Bezeichnung	Wertzuordnung
$\mathbb{N}$	Menge der natürliche Zahlen	1,2,3,...
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}^-$	Menge der negativen ganzen Zahlen	$\{-k \mid k \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Z}^-$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der positiven reellen Zahlen mit 0	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_0^-$	Menge der negativen reellen Zahlen mit 0	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$M[x]$	Menge aller Polynome mit einer Variablen x	
	und Koeffizienten aus einer Menge M	
$\sum_{k=1}^{0} a_k$	neutrales Element der Addition, $\sum_{k=1}^{1} a_k - a_1$	0
H_m	m-te Partialsumme der harmonischen Reihe	$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$
i	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
$\equiv$	identisch gleich	
$\simeq$	asymptotisch gleich	
$\forall$	für alle	
$\vee$	Logisches ODER (Boolsche Algebra)	
$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$	Vereinigung aller Mengen A_k mit $k \in \mathbb{N}$	
$T\|_B$	Term T unter der Bedingung B	
$f(x)\|_a^b$	Wertzuweisung	$f(b) - f(a)$
$\zeta(z)$	Riemannsche Zeta-Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$	$z \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(z) > 1$
$\Gamma(z)$	Gammafunktion als Produkt nach Gauß	$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$
B_k	Bernoullische Zahlen	$k \in \mathbb{N}_0$
$B_k(z)$	Bernoullisches Polynom vom Grad k	$k \in \mathbb{N}_0,\ z \in \mathbb{C}$
γ	Euler-Mascheroni-Konstante	$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$
0^0	Null hoch Null mit zweckmäßiger Festlegung auf	1
$\|x\|$	Betrag von x	
$\lfloor x \rfloor$	Abrundungsfunktion (vgl. Gaußklammer)	$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$
$a \bmod b$	a modulo b , Rest bei Teilung von a durch b	$a - \|b\| \cdot \lfloor a/\|b\| \rfloor$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$
$\square$	Endekennzeichen für einen Beweis	
[#]	Verweisnummer # auf das Literaturverzeichnis	# = 1,2,3,...
[#,...]	[#] mit Zusatzinformationen ...	

1 Einleitung

Geschichtlicher Hintergrund

Ein klassisches Problem der Analysis ist die Herleitung eines endlichen Formelausdrucks für die Riemannsche Zeta-Funktion an den natürlichen Stellen größer als 1. Leonhard Euler (1707-1783) löste dieses Problem für die geraden natürlichen Zahlen Mitte des 18. Jahrhunderts [1, Seite 1070, (2)] durch eine beeindruckende Herleitung der Sinus-Produktdarstellung [1, Kapitel 4, Seite 1075ff, (G)], [2, Seite 18f]. Mit [1, Seite 1084, (L)] zeigt Euler einen Zusammenhang der Riemannschen Zetafunktion mit der Verallgemeinerten Hyperfakultät und fand für die Riemannsche Zeta-Funktion an der Stelle 3 schließlich eine logarithmische Reihe mit Koeffizienten, die die Riemannsche Zeta-Funktion an den geraden natürlichen Stellen beinhalten, so dass die Reihenglieder nur aus mit rationalen Zahlen multiplizierten Potenzen von π bestehen [10, Seite 2, (1.5)].

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden von James W. L. Glaisher (1848-1928) Überlegungen zur Verallgemeinerten Hyperfakultät im Zusammenhang mit der später als Glaisher-Kinkelin-Konstante bezeichneten Konstante A veröffentlicht.

Verallgemeinerung

Ein etwas allgemeinerer Ansatz ist die Dirichlet-Reihe mit natürlichen Potenzen im Nenner und periodischer Koeffizientenfolge, die als Periodische Dirichlet-Reihe bezeichnet werden kann. Angemerkt sei, dass ein besonderer Spezialfall dieser Reihe die Dirichletschen L-Reihen sind, die sich auf Grund ihrer Multiplikativität als Eulerprodukte darstellen lassen.

Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die bekannten oder meist in äquivalenter Form bekannten Formeln aus Potenzen von π und endlichen Termen einer Verallgemeinerung der Gammafunktion für die Periodische Dirichlet-Reihe *ohne* die Ableitung der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion zu entwickeln.

Da dieses Thema offensichtlich kein Kernthema der Mathematik ist, sind die einzelnen Weiterentwicklungen und Ergebnisse in den Büchern, Internetskripten und einschlägige Medien für Veröffentlichungen nicht umfassend in Beziehung zueinander gesetzt. Daher kann ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit auch als kleine Zusammenfassung der einfachsten Ergebnisse zum oben genannten Ziel verstanden werden.

Bezug zur Literatur

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Hurwitzschen Zeta-Funktion, der Riemannschen Zeta-Funktion mit der dazugehörigen Funktionalgleichung, deren Ableitung an den negativen ganzen Stellen und der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante wurden von V. S. Adamchik u. a. Formeln für die Riemannsche Zeta-Funktion an den ungeraden natürlichen Stellen realisiert.

Um jedoch allen Varianten der Periodischen Dirichlet-Reihe eine gemeinsame Grundlage zu geben, soll ein bestimmtes Integral der sogenannten Digamma-Funktion verwendet werden, das im Wesentlichen dem Logarithmus einer Verallgemeinerung der Gammafunktion entspricht, die hier Q_m-Funktion genannt wird.

Mit dieser Funktion vergleichbar sind die Produkt- und Reihendarstellungen, wie sie z. B. von N. Kurokawa, S.-Y. Koyama und M. Wakayama verwendet werden. Diese Produkte sind im Gegensatz zur Q_m-Funktion als Weierstraßsche Produkte definiert und vereinfachen wegen eines zusätzlichen Faktors im Vergleich zur Q_m-Funktion zwar die Formelbildung für die Riemannsche Zeta-Funktion an den natürlichen Stellen, der Aufbau von Funktionalgleichungen ist jedoch erschwert.

Methode

In der vorliegenden Arbeit wird die Formelbildung für die Periodische Dirichlet-Reihe *nicht* auf die Ableitung der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion zurückgeführt, *sondern* auf folgende Grundlagen gestellt: Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete (*Komplexe Analysis, Kurvenintegrale*), Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmäßig konvergenten Reihen mit einer Veränderlichen, und Definitionen, die dafür geeignet sind, nicht-triviale Ergebnisse weitestgehend durch elementare Umformungen zu erhalten.

Konkret werden hier als „geeignete Definitionen" die formale Darstellung einer Reihe als Taylorreihe mit Exponentialfunktion als Argument, die Definition der o. g. Q_m-Funktion und eine hier als „Grenzwertgleichung" (Lemma 4.4) bezeichnete Gleichsetzung eines bestimmten Terms mit 0 verwendet.

Diese Grenzwertgleichung könnte zwar im Wesentlichen durch die allgemeinere Methode der Zeta Regularisierten Produkte [3] ersetzt werden, dies wäre jedoch zum einen ein erheblich größerer Argumentationsaufwand, um die gleichen Ergebnisse zu erzielen, zum anderen würde dann die Ableitung der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion herangezogen werden, die es ja gerade auf einem alternativen Weg zu umgehen gilt.

Unterschied

Welchen wissenschaftlichen Vor- oder Nachteil es hat, die o. g. analytische Fortsetzung außen vor zu lassen, wird in der vorliegenden Arbeit nicht erläutert. Es sei lediglich angemerkt, dass der hier gegangene Weg meist elementar und dadurch auch länger ist, jedoch vergleichsweise wenig Grundwissen erfordert. Vielleicht ist dies einfach eine Möglichkeit, die Zusammenhänge besser zu verstehen, die zur Formelentwicklung für die Periodische Dirichlet-Reihe benötigt werden.

Gliederung

Für die Herleitung von Methoden zur Formelbildung der Periodischen Dirichlet-Reihe ist die vorliegende Arbeit in vier Kapitel unterteilt:

Als Erstes wird die Periodische Dirichlet-Reihe auf den periodischen Polylogarithmus zurückgeführt (Kap. 2), also auf eine spezielle Fourier-Reihe.

Als Zweites wird eine Formel für eine Summe mit der Riemannschen Zeta-Funktion an den natürlichen Stellen größer als 1 entwickelt. Sie liefert die wohlbekannten Euler-Formeln für die Riemannsche Zeta-Funktion an den geraden natürlichen Stellen und die Sinus-Produktdarstellung (Kap. 3), und auf Grund der ungeraden natürlichen Stellen den Anlass, die oben genannte Q_m-Funktion zu definieren.

Als Drittes wird als Verallgemeinerung der Gammafunktion nun die Q_m-Funktion vorgestellt, bei der es sich um eine Produktdarstellung handelt und dessen Logarithmus per Ableitung unmittelbar mit der Digamma-Funktion zusammenhängt (Kap. 4). Abschließend wird an Hand von Beispielen gezeigt, wie sich Formeln für die Periodische Dirichlet-Reihe explizit entwickeln und mit der Q_m-Funktion mit rationalen Argumenten ausdrücken lassen.

Als Viertes wird die Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante definiert. Sie ist Bestandteil der Stirling-Formel für die Verallgemeinerte Hyperfakultät und sie lässt sich durch die Q_m-Funktion an der Stelle 1 ausdrücken. Als Folge davon ergibt sich eine einfache Formel für die Riemannsche Zeta-Funktion an den ungeraden natürlichen Stellen größer als 1, wie sie in den Arbeiten von V. S. Adamchik zu finden ist (Kap. 5). Eine dazu äquivalente Darstellung ist in einer Arbeit über Zeta Regularisierte Produkte von N. Kurokawa und M. Wakayama [4, Seite 475, (12)] nachzulesen.

Resultate im Vergleich zur Literatur

Klassische und wohlbekannte Ergebnisse beinhalten folgende Kapitel:
Kapitel 2: Alle Abschnitte, siehe Analysis und auch die Lineare Algebra für Satz 2.3 .
Kapitel 3: Alle Abschnitte, siehe Analysis, mit Ausnahme von Lemma 3.7 ; dieses Lemma wurde in seiner Allgemeinheit nicht gefunden, obwohl es nur auf der Standardmethode „Kurvenintegral" der Analysis beruht.
Meist wenig bekannte Resultate beinhalten folgende Abschnitte:
Kapitel 4: In [9] können Eigenschaften der Digamma-Funktion und damit auch einige der Q_m-Funktion nachgelesen werden, die in Satz 4.2 gelistet sind. Satz 4.3 ist in [10] und [11] auf ähnliche Weise beschrieben. Lemma 4.4 ist eine eigene Kreation, um das Grenzwertverhalten von Termen in den Kapiteln 4 und 5 auf eine *gemeinsame Weise* zu erklären. Die Sätze 4.5 und 4.6 und die Korollare 4.7 und 4.9 existieren vermutlich in äquivalenter Form für die Multiple Gamma-Funktion, Genaueres dazu kann hier aber wegen fehlender Informationen nicht gesagt werden. Satz 4.10 ist in äquivalenter Form in [12] nachzulesen. Sechs Beispiele der Periodischen Dirichlet-Reihe werden in Korollar 4.11 gelistet: Beispiel (1) ist ohne Verweis, aber eine besonders einfache Anwendung von Satz 2.3, die Beispiele (2), (3) und (5) können in [10], [13] und [14] nachgelesen werden, Beispiel (4) ist eine klassische Fourier-Reihe und nur für Beispiel (6) kann kein Verweis angegeben werden, hier sei für eine lediglich rekursive Darstellung auf [11] verwiesen.
Kapitel 5: Satz 5.2 ist nur als Zwischenresultat relevant und offensichtlich nicht explizit zu finden, von der Veröffentlichung einer äquivalenten Darstellung darf jedoch ausgegangen werden. Die Definition 5.4 ist in [11] einzusehen. Während Satz 5.5 vielleicht noch nicht vollständig bekannt ist, ist Satz 5.6 auf ähnliche Weise veröffentlicht und in [9] und [11] nachzulesen. Zusammenhänge, wie sie Satz 5.8 formuliert, sind offensichtlich nur als Spezialfälle in äquivalenter Form bekannt.

Ergänzung

Alle Gleichungen in den Kapiteln 4 und 5, bei denen der natürliche Logarithmus auftritt, sind ***vorab*** als exponenziert zu verstehen, da der Logarithmus bei negativem reellen Argument nicht reell und bei 0 nicht beschränkt ist. Es wird jedoch die logarithmische Schreibweise bevorzugt, weil sich dann die Terme nicht stapeln und die Umformungen übersichtlicher werden.

2 Periodische Dirichlet-Reihe

In diesem Kapitel wird die Periodische Dirichlet-Reihe über ein Lineares Gleichungssystem auf eine Linearkombination der Lerch-Hurwitz Periodischen Zeta-Funktion zurückgeführt.

2.1 Definition (LH-Reihe - Spezialfall einer Fourier-Reihe)

Sei $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Lerch-Hurwitz Periodische Zeta-Funktion, einer speziellen Lerchschen Zeta-Funktion, ist als Funktion über die Reihe

$$E_s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi xk}}{k^s}$$

definiert [5, Seite 24, 5.3]; dies ist der Polylogarithmus als Fourier-Reihe. Für die vorliegende Arbeit wird sie zwecks verbaler Verkürzung LH-Reihe (LH:=Lerch-Hurwitz) genannt.

2.2 Satz (Konvergenz der LH-Reihe)

$E_s(x)$ konvergiert für $s = 1$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ punktweise und $\mathrm{Re}(s) > 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\left|e^{i2\pi x}\right| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
Für $s = 1$ ergibt sich mit

$$\left|(1 - e^{i2\pi x}) \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i2\pi xk}}{k}\right| = \left|e^{i2\pi x} + \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i2\pi xk}}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i2\pi xk}}{k-1}\right| =$$
$$= \left|e^{i2\pi x} + \sum_{k=2}^{n} e^{i2\pi xk}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right| \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2$$

die Ungleichung $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i2\pi xk}}{k}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i2\pi x}|}$ unabhängig von n.
Auf Grund dieser Unabhängigkeit ist für $n \to \infty$ und ohne den Polstellen von $\frac{1}{1-e^{i2\pi x}}$ nun $|E_1(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{i2\pi x}|}$. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt $|E_s(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mathrm{Re}(s)}} = \zeta(\mathrm{Re}(s))$.
Das Majorantenkriterium für unendliche Reihen begründet die Behauptung. □

2.3 Satz (Zusammenhang zwischen Dirichlet- und LH-Reihe)

Sei $a_k \in \mathbb{C}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}$ eine Dirichlet-Reihe, für die die Koeffizientenfolge (a_k) nun p-periodisch ist, also $a_{k+p} = a_k$ für alle k. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = \sum_{v=1}^{p} b_v E_s\left(\frac{v-w}{p}\right), \quad w \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$
$$\text{mit} \quad b_k = \frac{1}{p}\sum_{v=1}^{p} a_v e^{-i2\pi v \frac{k-w}{p}} \in \mathbb{C} \ \text{ für } \ 1 \leq k \leq p\,.$$

Beweis:
Gegeben sind die Koeffizienten a_k und die Gleichung (2.1) mit den Unbekannten b_v. Durch die Umstellung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = \sum_{v=1}^{p} b_v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi k \frac{v-w}{p}}}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{v=1}^{p} b_v e^{i2\pi k \frac{v-w}{p}}$$

und mit a_k und b_k sind s-unabhängig erhält man als Gleichheitsbedingung das Lineare Gleichungssystem

$$a_k = \sum_{v=1}^{p} b_v e^{i2\pi k \frac{v-w}{p}} \;, \;\; 1 \le k \le p\,.$$

Zu zeigen:

$$b_k = \frac{1}{p}\sum_{v=1}^{p} a_v e^{-i2\pi v \frac{k-w}{p}} \;, \;\; 1 \le k \le p$$

Es ist

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{p}\sum_{v=1}^{p} e^{-i2\pi v \frac{k-w}{p}} \sum_{j=1}^{p} b_j e^{i2\pi v \frac{j-w}{p}} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{v=1}^{p} e^{i2\pi \frac{v}{p}(j-k)} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{j=1,j=k}^{p} b_j \sum_{v=1}^{p} e^{i2\pi \frac{v}{p}(j-k)} + \frac{1}{p} e^{i2\pi\frac{1}{p}} \sum_{j=1,j\neq k}^{p} b_j \frac{e^{i2\pi(j-k)}-1}{e^{i2\pi\frac{1}{p}(j-k)}-1} \\ &= \frac{b_k}{p}\sum_{v=1}^{p} 1 + \frac{1}{p}e^{i2\pi\frac{1}{p}} \sum_{j=1,j\neq k}^{p} b_j \cdot 0 = b_k + 0 \end{aligned}$$

wegen $e^{i2\pi\frac{1}{p}(j-k)}|_{j\neq k} \neq 1$.

Damit folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{v=1}^{p} b_v e^{i2\pi k \frac{v-w}{p}} = \sum_{v=1}^{p} b_v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi k \frac{v-w}{p}}}{k^s} = \sum_{v=1}^{p} b_v E_s(\frac{v-w}{p}) \qquad \square$$

2.4 Korollar (Hilfsmittel zur Formelverkürzung)

Die beiden nachfolgenden Kriterien sind wichtige Mittel zur Verkürzung von Formeln.

(1) $\quad E_s\left(\frac{x}{2}\right) + E_s\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-s}E_s(x)$ (*Verdopplungsformel*)

(2) $\quad$ Für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 1$ gilt:
$E_m(1-x) = \overline{E_m(x)}$, d. h. $E_m(1-x)$ ist konjugiert komplex zu $E_m(x)$.

Beweis von (1):

$$2^{1-s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi xk}}{k^s} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi x(2k)}}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\pi xk}}{k^s} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\pi(x+1)k}}{k^s}$$

Beweis: von (2):

Dies folgt unmittelbar aus der Definition 2.1 der LH-Reihe mit der Aufspaltung von $E_m(x)$ für $m \in \mathbb{N}$ in Real- und Imaginärteil. $\square$

Anmerkung zu (1):
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} E_s(\frac{x+k}{n}) = n^{1-s}E_s(x) \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Der Beweis erfolgt mit $\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{n}} = \frac{e^{i2\pi k}-1}{e^{i2\pi\frac{k}{n}}-1} = (0|_{k \bmod n \not\equiv 0} \vee n|_{k \bmod n \equiv 0})$.

3 Riemannsche Zeta-Funktion an den natürlichen Stellen

In diesem Kapitel wird die klassische Formel für $\zeta(2k)$, ein impliziter Ansatz für $\zeta(2k+1)$ und die wohlbekannte Sinus-Produktdarstellung hergeleitet.

3.1 Definition (Bernoulli-Zahlen und -Polynome)

(1) Die Taylorreihe um $z = 0$ der komplex differenzierbaren Funktion $\frac{z}{e^z-1}$, $z \in \mathbb{C}$, wird traditionell $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k$ geschrieben, die B_k werden als Bernoulli-Zahlen bezeichnet.

(2) Die Taylorreihe von $\frac{z}{e^z-1} e^{tz}$ wird $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k(t)$ geschrieben und die $B_k(t)$ mit $t \in \mathbb{C}$ werden als Bernoulli-Polynome bezeichnet.

3.2 Satz (Konvergenzradius einer Taylorreihe mit Bernoulli-Koeffizienten)

Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k$ hat den Konvergenzradius 2π.

Beweis:
Die Polstellen von $\frac{z}{e^z-1}$ sind $i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Vom Nullpunkt aus gesehen tritt die erste Polstelle bei $|z| = 2\pi$ auf, also divergiert die Reihe dort. □

3.3 Korollar (Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen und Polynome)

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

(1) $B_0(x) = 1,$ vgl. [6, Seite 3, (B.0)]

(2) $B_k(x) = \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} B_v x^{k-v}$ (bzw. $B_k(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{k}{v} B_v x^{k-v}$), vgl. [6, Seite 3, (1.4)]

Speziell: $B_k = B_k(0),$ vgl. [6, Seite 3, (1.1)]

(3) $B_{2k+1} = 0$ für $k \in \mathbb{N},$ vgl. [6, Seite 9, Bemerkung 2.5]

(4) $B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{v=0}^{k-1} \binom{k+1}{v} B_v$ für $k > 0,$ vgl. [6, Seite 4, (1.6)]

Speziell für $k = 1$ gilt: $B_1 = -\frac{1}{2}$

(5) $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1},$ vgl. [6, Seite 6, Satz 2.1 a)]

Speziell: $B_k(1) = B_k + 0^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N},$ vgl. [6, Seite 3, (1.3)]

(6) $\int\limits_a^b B_k(x)\, dx = \frac{B_{k+1}(b) - B_{k+1}(a)}{k+1},$ vgl. [6, Seite 3, (B.2)]

Speziell: $\int\limits_0^1 B_k(x)\, dx = 0^k,$ vgl. [6, Seite 3, (B.2)]

(7) $\sum_{v=0}^{n-1} B_k\left(\frac{x+v}{n}\right) = n^{1-k} B_k(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{C}$

Daher gilt mit $(n;x) = (2;0)$: $B_k\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-k} - 1) B_k$

Beweis von (7):
Aus $\frac{t^n-1}{t-1} = \sum_{v=0}^{n-1} t^v$ folgt $\sum_{v=0}^{n-1} \frac{t^v}{t^n-1} = \frac{1}{t-1}$ und mit $t := e^{\frac{z}{n}}$ unmittelbar $\sum_{v=0}^{n-1} \frac{e^{v\frac{z}{n}}}{e^z-1} = \frac{1}{e^{\frac{z}{n}}-1}$.
Die Multiplikation mit $ze^{\frac{x}{n}z}$ ergibt $\sum_{v=0}^{n-1} \frac{ze^{\frac{x+v}{n}z}}{e^z-1} = n\frac{\frac{z}{n}e^{x\frac{z}{n}}}{e^{\frac{z}{n}}-1}$ und liefert mit Definition 3.1 (2) und durch Koeffizientenvergleich bezüglich z die Behauptung. □

Anmerkung: Vgl. Gleichung (7) mit Anmerkung zu Korollar 2.4 (1).

3.4 Lemma (Summenumkehrungsregel mit Bernoullischen Zahlen)

Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ und a_k,$b_k \in \mathbb{C}$.
Des Weiteren sei die Ausgangsgleichung

$$b_{m-1} = \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} a_v$$

mit a_v beliebig gegeben.
Dann gilt mit $m \to m+1$ die Umkehrung

$$a_m = \frac{1}{m+1} \sum_{v=0}^{m} \binom{m+1}{v+1} B_{m-v} b_v \ .$$

Beweis:
Sei $b_j := \sum_{k=1}^{m} c_k k^{j+1}$ mit $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ bei *fest* gewähltem m, da die c_k abhängig von m sind. Die m Gleichungen für b_0 bis b_{m-1} mit m Unbekannten sind wegen der Faktoren k^{j+1} linear unabhängig (Determinante $\neq 0$). Daher gibt es stets c_k, die diese Gleichungen zugleich erfüllen (vgl. hierzu *Lineare Algebra, Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme*). Durch Einsetzen der Umkehrung in die Ausgangsgleichung ergibt sich

$$b_{m-1} = \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^{v} \binom{v+1}{j+1} B_{v-j} b_j$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{m} c_k k^m = \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^{v} \binom{v+1}{j+1} B_{v-j} \sum_{k=1}^{m} c_k k^{j+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^{v} \binom{v+1}{j+1} B_{v-j} k^{j+1} \ .$$

Es ist

$$\sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^{v} \binom{v+1}{j+1} B_{v-j} k^{j+1} = \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{B_{v+1}(k) - B_{v+1}(0)}{v+1} \text{, vgl. Korollar 3.3 (2)}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{v+1}(j+1) - B_{v+1}(j)}{v+1} = \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} \sum_{j=0}^{k-1} j^v \qquad \text{, vgl. Korollar 3.3 (5)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} ((j+1)^m - j^m) = k^m - 0^m$$

und wegen $m > 0$ folgt die Behauptung. □

3.5 Satz (Konvergenz von Taylorreihe und Reihe mit Exponentialfunktion)

Es gilt:

(1) Die Taylorreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k$ konvergiert gleichmäßig für $|z| \in [a,b] \subset [0,2\pi)$.

(2) Sei $\mathrm{Re}(z) > \delta > 0$. Dann konvergiert die polylogarithmische Reihe (mit der Exponentialfunktion e^{-z} als Argument) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-zk}}{k^v}$ für $v \in \mathbb{N}_0$ gleichmäßig.

Beweis von (1):
Wegen Satz 3.2 ist $\frac{z^k}{k!} B_k$ für $|z| < 2\pi$ eine Nullfolge, daher gilt für $|z| \in [a,b] \subset [0,2\pi)$ das Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz.

Beweis von (2):
Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^v}$ ist mit $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^v}{k^v} = 1$ für alle v gegeben. Somit ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$ und daher $|e^{-z}| < 1$ der Term $\frac{e^{-zk}}{k^v}$ eine Nullfolge und es folgt nach dem Cauchy-Kriterium die gleichmäßige Konvergenz für $\mathrm{Re}(z) > \delta > 0$. □

3.6 Satz (Formel für die konjugiert komplexe LH-Reihe $\overline{E_1(x)}$)

Für $0 < x < 1$ gilt

$$\overline{E_1(x)} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi xk}}{k} = -i\pi\left(\frac{1}{2} - x\right) - \ln\left(2\pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \ . \tag{3.1}$$

Beweis:
$\overline{E_1(x)}$ ist das konjugiert Komplexe zu $E_1(x)$ und nach Satz 2.2 für $0 < x < 1$ konvergent.
Es ist $-\ln(1-z)$ eine Stammfunktion zu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ für $|z| < 1$ und mit $z := re^{-i2\pi x}$ folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k e^{-i2\pi xk}}{k} = -\ln\left(1 - re^{-i2\pi x}\right)$ für $0 < x < 1$ und $0 \le r < 1$.
Auf Grund der Stetigkeit der Logarithmusfunktion gilt $\lim_{r\uparrow 1} \ln(1 - re^{-i2\pi x}) = \ln\left(1 - e^{-i2\pi x}\right)$.
Sei $0 < x_0 < x \le \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2} \le x < x_0 < 1$. Dann gilt $\left|e^{i2\pi x} - 1\right| > \left|e^{i2\pi x_0} - 1\right|$. Es folgt

$$\left|\lim_{r\uparrow 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-r^k}{1-r} \frac{e^{-i2\pi xk}}{k}\right| = \left|\frac{1 - e^{-i2\pi xn}}{e^{i2\pi x} - 1}\right| \le \frac{2}{|e^{i2\pi x_0} - 1|}$$

unabhängig von n und auf Grund dieser Beschränkung nun

$$\left|\overline{E_1(x)} - \lim_{r\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k e^{-i2\pi xk}}{k}\right| = \left|\lim_{r\uparrow 1}(1-r) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-r^k}{1-r} \frac{e^{-i2\pi xk}}{k}\right| \le \frac{2}{|e^{i2\pi x_0} - 1|} \lim_{r\uparrow 1}(1-r) = 0 \, .$$

Für $0 < x < 1$ ist daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi xk}}{k} = -\lim_{r\uparrow 1} \ln\left(1 - re^{-i2\pi x}\right) = -\ln\left(1 - e^{-i2\pi x}\right) \ . \tag{3.2}$$

Wegen $\quad 1 - e^{-i2\pi x} = e^{-i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) + i2\pi l} 2\sin(\pi x) \quad$ mit $\quad l \in \mathbb{Z}$ unabhängig von x

und folglich $\quad -\ln\left(1 - e^{-i2\pi x}\right) = i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - i2\pi l - \ln(2\sin(\pi x))$

gilt mit $\quad x := \frac{1}{2}$

unmittelbar $\qquad -\ln 2 = i2\pi l - \ln 2 \quad \text{bzw.} \quad l = 0$

und somit $$-\ln\left(1 - e^{-i2\pi x}\right) = i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \ln(2\sin(\pi x)) \; . \tag{3.3}$$

Die Addition von $0 = \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ zur Gleichung (3.2) mit (3.3) liefert die Behauptung.

□

3.7 Lemma (Summe von Fourier- und Dirichlet-Reihen)

Gegeben sei:

(1) Ein Gebiet $I \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in I$;

(2) ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [0,1[\to [0, z_0[\subset I$ mit $\gamma(0) := 0, \gamma(1) := z_0$;

(3) die innerhalb von I gleichmäßig konvergente Reihe $f(z) := z^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}}$ mit $f(0) \neq 0$, der Größenordnung $r \in \mathbb{R}_0^+$ der Polstellen von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}}$ und den Parametern $z, \varphi_k, a_k, b_k \in \mathbb{C}, \varphi_k \neq 0$.

Damit kann das Kurvenintegral von $f(z)$ über den Weg γ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $m \geq r$ für jedes $z_0 \in I$ explizit wie folgt angegeben werden:

$$\frac{1}{m!} \int\limits_{\gamma} f(z) z^{m-r} dz = -\sum_{v=0}^{m} \frac{z_0^{m-v}}{(m-v)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z_0\varphi_k} \varphi_k^{v+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\varphi_k^{m+1}} \tag{3.4}$$

Beweis:
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $f(z)$ lässt sich die Reihe von $f(z)z^{m-r}$ für $z \in I$ gliedweise integrieren, d. h. Integral und Grenzwertbildung vertauschen, vgl. [7, Seite 269ff, Satz 9.8]. I ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$, somit offen und zusammenhängend. Existiert eine Stammfunktion und sind Anfangs- und Endpunkt gleich, dann verschwindet das Integral und die Integration ist daher innerhalb von I wegunabhängig (*Komplexe Analysis* : Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete impliziert die Wegunabhängigkeit). Zu $e^{-z\varphi_k}$ existiert die Stammfunktion $-\frac{e^{-z\varphi_k}}{\varphi_k}$. Sei nun $z := \gamma(t)$ eine Parametrisierung in I, die auf Grund der Wegunabhängigkeit zugelassen ist. Mittels einer *Summenergänzung* ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z)\frac{z^{m-r}}{m!} = \frac{z^m}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}} &= -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{z^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}\varphi_k^{v+1}} + \sum_{v=0}^{m} \frac{z^{m-v}}{(m-v)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}\varphi_k^{v}} \\ &= -\left(\sum_{v=0}^{m} \frac{z^{m-v}}{(m-v)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{z\varphi_k}\varphi_k^{v+1}}\right)' \end{aligned}$$

und mit der Ableitung $\dot\gamma(t)$ der Wegstrecke $\gamma(t)$ für alle $z_0 \in I$ folglich

$$\frac{1}{m!} \int\limits_{\gamma} f(z) z^{m-r} dz = \frac{1}{m!} \int\limits_0^1 f(\gamma(t))\gamma(t)^{m-r}\dot\gamma(t) dt = \left(-\sum_{v=0}^{m} \frac{\gamma(t)^{m-v}}{(m-v)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{e^{\gamma(t)\varphi_k}\varphi_k^{v+1}}\right)\Bigg|_0^1$$

und damit die Behauptung. □

Anmerkung:
[8, Seite 11, (38)] zeigt ein Beispiel für die Reihe von $f(z)$ und somit zugleich eine Anwendungsmöglichkeit des Lemmas 3.7 .

3.8 **Satz** (Anwendung von Lemma 3.7)

In Lemma 3.7 sei I ein offener Kreis um den Nullpunkt mit Radius 2π. Es sei $m \in \mathbb{N}$.
Für $z := i2\pi x$ mit $0 < x < 1, r := 1, \varphi_k := k$ und $a_k := 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt deshalb

$$(1) \qquad \sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} \frac{v!}{(i2\pi x)^v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{i2\pi xk} k^{v+1}} =$$

$$= \ln\left(1 - e^{-i2\pi x}\right) + \frac{m!}{(i2\pi x)^m} \zeta(m+1) - \frac{1}{m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i2\pi x)^k B_k}{(m+k)k!}\,, \tag{3.5}$$

$$(2) \qquad \sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} \frac{v!}{(i2\pi x)^v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{i2\pi xk} k^{v+1}} - \frac{m!}{(i2\pi x)^m} \zeta(m+1) =$$

$$= i\pi \left(\frac{1}{2} - x\right) + \ln\left(2\pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}\right) - \frac{1}{m} - \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left(\frac{(i2\pi)^k B_k}{(m+k)k!} + \frac{1}{k}\right). \tag{3.6}$$

Beweis von (1):
Mit Satz 3.5 (1) ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k$ in I gleichmäßig konvergent und daher gliedweise integrierbar. Da die Stammfunktion von z^k mit $\frac{z^{k+1}}{k+1}$ existiert, ist die vorgenannte Reihe in I integrierbar und es gilt auf Grund der Wegunabhängigkeit mit der Parametrisierung $z := \gamma(t)$, wie sie in Lemma 3.7 definiert ist, für alle $z_0 \in I$ folglich

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k\right) z^{m-r} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \int_0^1 \gamma(t)^{m-r+k} \dot{\gamma}(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^{m-r+k+1} B_k}{(m-r+k+1)k!} \Bigg|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^{m-r+k+1} B_k}{(m-r+k+1)k!}\,. \tag{3.7}$$

Die Reihenentwicklung $\frac{z}{e^z-1} = \frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}} = z \sum_{k=1}^{\infty} e^{-zk}$ ist auf $|e^z| > 1$ beschränkt, also $\mathrm{Re}(z) > 0$, und erfüllt Lemma 3.7 (3). Zugleich gilt mit Definition 3.1 (1) die Taylorentwicklung $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k$ auf I und daher

$$z \sum_{k=1}^{\infty} e^{-zk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k \tag{3.8}$$

mit $|z| < 2\pi$ und zugleich $\mathrm{Re}(z) > 0$.
Die Kurvenintegration angewendet auf die Gleichung (3.8) bedeutet, dass die Gleichung (3.4) multipliziert mit $m!$ und $(r; a_k; \varphi_k) = (1; 1; k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ der Gleichung (3.7) entspricht, d. h.

$$\int_{\gamma} \left(z \sum_{k=1}^{\infty} e^{-zk}\right) z^{m-1} dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} B_k\right) z^{m-1} dz\,,$$

und mit der Teilung durch $-z^m$, $z \neq 0$, gilt schließlich

$$\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} \frac{v!}{z^v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{zk} k^{v+1}} = \frac{m!}{z^m} \zeta(m+1) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k B_k}{(m+k)k!}\,. \tag{3.9}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{zk} k^{v+1}}$ konvergiert für $v \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ wegen $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{zk} k^{v+1}}\right| \leq \zeta(v+1)$ und für $v = 0$ mit der zusätzlichen Einschränkung $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ wegen Satz 2.2 . Daher kann an Stelle von $\mathrm{Re}(z) = 0$ in Verbindung mit $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ und $|z| < 2\pi$ nun $z := i2\pi x$ mit $0 < |x| < 1$ gesetzt werden. Die Abspaltung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{zk} k^{v+1}}$ in der Gleichung (3.9) mit $v := 0$ und $z := i2\pi x$ ergibt die Behauptung.

Beweis von (2):
Die Gleichung (3.1) eingesetzt in die Gleichung (3.5) liefert unter der Berücksichtigung von Korollar 3.3 (1) und $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ die Behauptung. $\square$

Nachfolgend werden zwei klassische Formeln hergeleitet.

3.9 Korollar (Riemannsche Zeta-Funktion an gerader natürlicher Stelle)

Es gilt:

(1) $$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

(2) $$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

Beweis von (1):
Mit $x \uparrow 1$ und $e^{-i2\pi k} = 1$ bei der Gleichung (3.6) ergibt sich

$$\sum_{v=1}^{m-1} \binom{m}{v} \frac{v!\zeta(v+1)}{(i2\pi)^v} = -\frac{i\pi}{2} + \ln(2\pi) - \frac{1}{m} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(i2\pi)^k B_k}{(m+k)k!} + \frac{1}{k} \right)$$

und für den Imaginärteil davon unter Berücksichtigung von Korollar 3.3 (3) und (4) und mit der Teilung durch $-\pi$ dann

$$\sum_{v=1}^{m-1} \binom{m}{v} a_v = b_{m-1}$$

mit $$a_v := \frac{1-(-1)^v}{2}(-1)^{\frac{v-1}{2}} 2 \frac{v!\zeta(v+1)}{(2\pi)^{v+1}}$$

und $$b_{m-1} := \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} \ .$$

Lemma 3.4 unter Anwendung von Korollar 3.3 (2) und (6) ergibt

$$a_{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} B_{m-v} b_{v-1} = \frac{1}{2m}(B_m(1) - B_m) - \frac{1}{m} \int_0^1 (B_m(x) - B_m)\, dx = \frac{B_m}{m} \ ,$$

so dass mit $m := 2k$ und daher $a_{2k-1} = (-1)^{k-1} 2 \frac{(2k-1)!\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}$ mit der Umstellung nach $\zeta(2k)$ die Behauptung folgt.

Beweis von (2):
Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} = \frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{2} = ix \left(\frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} + \frac{1}{2} \right) = x \left(\frac{\cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right) \ .$$

Mit der Subtraktion von 1, dem Ersetzen von x durch $2\pi x$, der Teilung durch x und der Anwendung der Gleichung (3.10) gilt

$$\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi x)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} \zeta(2k)$$

für $0 < |x| < 1$, wobei linksseitig für $x \to \pm 0$ stetig fortgesetzt werden kann. Für $|x| < 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}\zeta(2k)$ mit $|x| \in [a,b] \subset [0,1)$ nach dem Cauchy-Kriterium gleichmäßig konvergent. Sie kann daher gliedweise von 0 bis x integriert werden, vgl. [7, Seite 269ff, Satz 9.8], und mit $\lim_{x\to\pm 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$ und $\pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ folgt

$$\ln\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k}\zeta(2k)\,. \qquad \text{(„\textit{Logarithmische Sinusreihe}“)} \tag{3.12}$$

Mit $$-\ln\prod_{v=1}^{n}(1-xb_v)^{a_v} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\sum_{v=1}^{n}a_v b_v^k \quad \text{und} \quad (a_v;b_v) := (1;\frac{1}{v^2})$$

gilt $$-\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{v^{2k}}\,.$$

Für $x \to x^2$ und $n \to \infty$ erhält man wegen der Reihe (3.12) unmittelbar

$$\ln\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x}{v}\right)^2\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k}\zeta(2k) = \ln\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{für} \quad |x| < 1\,.$$

Das Exponenzieren ergibt die Sinus-Produktdarstellung, Gleichung (3.11), für $|x| \le 1$.
Die periodische Fortsetzung des Sinus ist $\sin(\pi(1\pm x)) = \mp\sin(\pi x)$.
Mit

$$\left(1\mp\frac{x}{n}\right)(1\pm x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1\pm x}{k}\right)^2\right) = \left(1+\frac{1\pm x}{n}\right)(\mp x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)$$

und $n \to \infty$ folgt die zur Sinus-Funktion identische Fortsetzung für $\pi x\prod_{k=1}^{\infty}(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2)$ je Intervall zwischen zwei ganzen Zahlen und daher die Erweiterung der Sinus-Produktdarstellung auf $x \in \mathbb{R}$.

□

4 Q_m-Funktion als Verallgemeinerung der Γ-Funktion

Das Ziel in diesem Kapitel ist es, Beispiele der Periodischen Dirichlet-Reihe herauszugreifen und für diese Formeln zu entwickeln. Zuerst wird eine Q_m-Funktion in Satz 4.2 (1) als Verallgemeinerung der Gammafunktion definiert. Motiviert wird dies durch den Realteil der Gleichung (3.6) in Satz 3.8, der zeigt, dass alle $\zeta(2m+1)$ durch Terme, die aus Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i2\pi x)^{v+k} B_k}{(v+k)k!}$ mit $0 \leq v \leq 2m+1$ bestehen, ausgedrückt werden können. Wird $\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$ durch $\zeta(2k)$ ersetzt, so erhält man eine Verallgemeinerung von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}\zeta(2k)}{2k}$ und äquivalent dazu von $\ln \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Da diese Reihen von logarithmischer Natur sind, macht es Sinn, vorrangig die dazugehörige Produktdarstellung der o. g. Q_m-Funktion zu diskutieren.Es werden einige Eigenschaften dieser Funktion einschließlich einer Erweiterung des Definitionsbereichs (vgl. 4.5 (2)) verifiziert, Verbindungen zur Literatur hergestellt und $\zeta(2m+1)$ mit den Konstanten $Q_m(1)$ ausgedrückt.
Hinweis: Es ist die Ergänzung (letzter Absatz) in der Einleitung zu beachten.

4.1 Definition ($Q_{m,n}$-Funktion)

Definiert wird ein endliches Produkt, das als unendliches Produkt konvergent sein soll:

$$Q_{m,n}(x) := \frac{e^{p_{m,n}(x)} n^{r_m(x)}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k^m}} \quad \text{für} \;\; m, n \in \mathbb{N}_0, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, ..., -n\}, \;\; p_{0,n}(x) := 0\,,$$

$$\text{mit den Polynomen } p_{m,n}(x) := \sum_{v=1}^{m} \frac{(-1)^{v-1} x^v}{v} \sum_{k=1}^{n} k^{m-v} \text{ und } r_m(x) := (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1}\,.$$

Weiter sei $r_m := r_m(1)$, $p_{m,n} := p_{m,n}(1)$ und $Q_{m,n} := Q_{m,n}(1)$.
Bei ausschließlich positiven Argumenten im Logarithmus ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = p_{m,n}(x) + r_m(x) \ln n - \ln Q_{m,n}(x) \tag{4.1}$$

zulässig; diese Gleichung wird jedoch der Übersichtlichkeit wegen im gesamten Text *formal* auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ erweitert verwendet. Siehe hierzu auch den Abschnitt *Ergänzung* in der Einleitung.

4.2 Satz (Definition und Eigenschaften einer Funktion $Q_m(x)$)

Sei $m, n \in \mathbb{N}_0$, $x \in (-1, 1]$ und $Q_{m,n}(x)$, $p_{m,n}(x)$ und $r_m(x)$ aus der Definition 4.1 .

Dann gilt:

(1) Die Funktionenfolge $Q_{m,n}(x)$ konvergiert gegen

$$Q_m(x) := \exp\left(\frac{(-x)^{m+1}}{m+1}\gamma + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v}\zeta(v)\right) \quad \text{mit} \quad Q_m := Q_m(1), \tag{4.2}$$

insbesondere für $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ gleichmäßig. Vgl. [9, Seite 527, (4.26)].

(2) $$Q_0(x) \equiv \Gamma(x+1) \qquad (\textit{Gammafunktion}) \tag{4.3}$$

(3) $$(\ln Q_m(x))' = (-x)^m (\ln Q_0(x))' \qquad (\textit{Differentiationsregel}) \tag{4.4}$$

(4) Es sind $K_m(x) := -\gamma r_m(-x) + (-1)^m \ln Q_m(x)$ und $e^{K_m(x)}$ für $0 < x \leq 1$ streng konvex.

(5) Sei $\psi(x+1) := (\ln Q_0(x))'$ mit $x \geq 0$. Dann wird $\psi(x)$ Digamma-Funktion genannt.

Es gilt: $\int\limits_0^x t^m \psi(t)dt = r_{m-1}(-x) + (-1)^m \ln Q_m(x)$ für $m \in \mathbb{N}$, vgl. [9, Seite 527, (4.27)]

(6) $$\ln Q_m(x) + (-1)^m \ln Q_m(-x) = 2\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-x)^{m+2v}\zeta(2v)}{m+2v} \tag{4.5}$$

(*„Verallgemeinerte Logarithmische Sinusreihe“*, vgl. Gleichung (3.12))

(7) Für $p_{m,n}(x)$ ist eine Erweiterung der Definition z. B. auf $n \in \mathbb{Z}$ möglich:

$$p_{m,n}(x) := \sum_{v=1}^{m} \frac{(-1)^{v-1}x^v}{v} \left(\frac{B_{m-v+1}(n+1) - B_{m-v+1}(0)}{m-v+1} - 0^{m-v} \right)$$

Spezialfälle: $p_{m,0}(x) = 0$, $p_{m,-1}(x) = -r_{m-1}(x)$ für $m \in \mathbb{N}$ und $p_{0,-1}(x) = 0$

Beweis von (1):

$$\begin{aligned}
\ln Q_{m,n}(x) &= p_{m,n}(x) + r_m(x)\ln n - \sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= p_{m,n}(x) + r_m(x)\ln n + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-x)^v}{v} \sum_{k=1}^{n} k^{m-v} \\
&= p_{m,n}(x) + \sum_{v=1}^{m} \frac{(-x)^v}{v} \sum_{k=1}^{n} k^{m-v} + r_m(x)\ln n + \frac{(-x)^{m+1}}{m+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\qquad + \sum_{v=m+2}^{\infty} \frac{(-x)^v}{v} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{v-m}} \\
&= (r_m(x) + \frac{(-x)^{m+1}}{m+1})\ln n + \frac{(-x)^{m+1}}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^v} \\
&= \frac{(-x)^{m+1}}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^v}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^v} - \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v}\zeta(v) \right| = \left| \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^v} - \zeta(v) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^v} \right| \overset{\frac{1}{k^v} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{|x|^{m+v}}{m+v} \leq \frac{1}{n} \frac{|x|^{m+2}}{m+2} \frac{1}{1-|x|} \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

gilt $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{m,n}(x) = Q_m(x)\,.$

Der Konvergenzradius von $Q_m(x)$ ist mit $\lim_{v\to\infty} \frac{\zeta(v)(m+v+1)}{\zeta(v+1)(m+v)} = 1$ gegeben, so dass die Reihe $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v}\zeta(v)$ nach dem Cauchy-Kriterium für $x \in [a,b] \subset (-1,1)$ gleichmäßig konvergiert. Für $x = 1$ konvergiert diese Reihe ebenfalls, da es sich bei $\frac{\zeta(v)}{m+v}$ wegen $\frac{\zeta(v+1)}{m+v+1} < \frac{\zeta(v)}{m+v}$ um eine streng monoton fallende reelle Nullfolge handelt, die Reihe alternierend ist, und somit das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen erfüllt.

Beweis von (2):

Mit $p_{0,n}(x) = 0$, $r_0(x) = x$ und dem Vergleich der Produktdarstellungen folgt die Behauptung.

Beweis von (3):

Die 1. Ableitung in der Gleichung (4.2) ergibt die Behauptung.

Beweis von (4):
Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$. Es ist $H(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}$ mit dem Cauchy-Kriterium gleichmäßig konvergent; somit sind Summe und Integral bei der Integration von $H(x)$ vertauschbar. Wegen der Gleichungen (4.2) und (4.4) gilt für $x \in [0,1]$ nun

$$\left(\sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-x)^{m+v}}{m+v}\zeta(v)\right)' = (r_m(x)\gamma + \ln Q_m(x))' = (-x)^m(x\gamma + \ln Q_0(x))' = (-1)^m H(x)\,.$$

Die Integration von 0 bis x und die Multiplikation mit $(-1)^m$ ergibt

$$K_m(x) = \int_0^x t^m H(t)\,dt\ .$$

Auf Grund von $H(x) > 0$ für $x > 0$ und $H'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} > 0$ gilt unmittelbar $(\int_0^x t^m H(t)\,dt)'' = mx^{m-1}H(x) + x^m H'(x) > 0$, d. h. die 2. Ableitung ist positv, so dass $K_m(x)$ streng konvex ist. Mit $(e^{K(x)})'' = e^{K(x)}(K''(x) + K'(x)^2) > 0$ folgt die Behauptung.

Beweis von (5):
Die Gleichung (4.4) liefert den Zusammenhang der ψ-Funktion und der Q_m-Funktion durch Integration von 0 bis x, also $\ln Q_m(x) = \int_0^x (-t)^m \psi(t+1)\,dt$ für $m \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $\psi(x+1) - \psi(x) = (\ln Q_0(x) - \ln Q_0(x-1))' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ kann $\psi(x+1)$ für $x \neq 0$ durch $\psi(x) + \frac{1}{x}$ ersetzt werden, so dass die Behauptung folgt.

Beweis von (6):
Der Fall $m = 0$ entspricht – unter Berücksichtigung der Produktdarstellung des Sinus – der Gleichung (3.12). Die Anwendung der Gleichung (4.2) liefert die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis von (7):
Die Erweiterung auf $n \in \mathbb{Z}$ kann zum Beispiel mit den Bernoulli-Polynomen erfolgen, indem in Satz 3.3 (5) über x von 0 bis n summiert wird:

$$\sum_{j=0}^{n} j^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$$

Eingesetzt in die Definition von $p_{m,n}(x)$ folgt die Behauptung.
Daher ist $p_{m,0}(x) = 0$ und $p_{m,-1}(x) \overset{\mathrm{m}\geq 0}{=} \sum_{v=1}^{m} \frac{(-1)^{v-1}x^v}{v}(-0^{m-v}) \overset{\mathrm{m}\geq 0}{=} \frac{(-x)^m}{m} = -r_{m-1}(x)$.
Auf Grund der ersten Gleichung für $p_{m,-1}(x)$ ist $p_{0,-1}(x) = 0$. □

Anmerkung 1:
Die Partielle Integration von $(\ln Q_{m+1}(x))' = -x\,(\ln Q_m(x))'$, vgl. Gleichung (4.4), liefert die Integrationsregel $\int_0^x \ln Q_m(t)dt = x \ln Q_m(x) + \ln Q_{m+1}(x)$. Diese Regel gilt mit der Taylorreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für alle $f_m(x) := \int_0^x (-t)^m f(t)dt$ (*logarithmische Taylorreihe*), $m \in \mathbb{N}_0$.

Anmerkung 2:
Für $|x| < 1$ ist $\ln Q_m(x) + (-1)^m \ln Q_m(-x) = (-1)^m \int_0^x t^m(\frac{1}{t} - \pi\cot(\pi t))dt$,
vgl. die Gleichungen (3.12) und (4.5).

Anmerkung 3:
Formeln mit der Digamma-Funktion siehe z. B. [9, Seite 527, (4.26) und (4.29)].

Anmerkung 4:
Die Konstante Q_m ist Bestandteil der Stirlingformel für die folgende Verallgemeinerung der Gammafunktion für $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{mx}}{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k^m})^{k^m-(k-1)^m}} = Q_m^m \frac{x^{x-r_m}}{e^x} \lim_{n\to\infty} e^{-mp_{m,n}} \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{(k+1)^m-k^m}{k^m+x})^{k^m+x-r_m}$$

Den wohlbekannten Standardfall erhält man mit $m := 1$.

Anmerkung 5:
Eine Funktion, durch die $Q_m(x)$ ersetzbar aber auch auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ erweiterbar ist, ist die als Weierstraßsches Produkt formulierte Funktion $G_r(z)$ in [11, S.62] mit $Q_0(z) = G_1(z+1)\sqrt{2\pi}$ und $Q_m(z) = G_{m+1}(z)\exp(\frac{(-z)^m}{2m} + \frac{(-z)^{m+1}}{m+1}\gamma)$ für $m \in \mathbb{N}$. Vgl. hierzu auch [11, S.62, $G_r(z)$ und $F_r(z)$] mit der Sinusvariante $F_r(z) \equiv S_r(z)$ in [14, S.1258, $S_r(x)$]. Die Q_m-Funktion wird zum Weierstraß-Produkt, wenn die Summenzeichen des Polynoms $p_{m,n}(x)$ beim Produkt $Q_{m,n}(x)$ vertauscht werden.

4.3 Satz (Zusammenhang der LH-Reihe mit $Q_m(\pm x)$)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le x < 1$ mit $x \neq 0$ bei $m = 0$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{E_{m+1}(x)}{(i2\pi)^m} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{(i2\pi)^m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi xk}}{k^{m+1}} = \\ &= \sum_{v=1}^{m}\frac{x^{m-v}}{(m-v)!}\frac{\zeta(v+1)}{(i2\pi)^v} + \sum_{v=0}^{m}\frac{x^{m-v}}{v!(m-v)!}(\ln Q_v(x) + (-1)^v \ln Q_v(-x)) \\ &+ \frac{x^m}{m!}(-\ln(2\pi x) + H_m) - i\pi\left(\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{x^m}{2\cdot m!}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Beweis mit Unterscheidung zwischen $m := 0$ und $m \in \mathbb{N}$:

(1) $m := 0$:

Es ist $-\ln\left(1-e^{i2\pi x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi xk}}{k}$, und wegen der Gleichungen (3.3), (3.11) und (4.3)

gilt $-\ln\left(1-e^{i2\pi x}\right) = \ln Q_0(x) + (-1)^0 \ln Q_0(-x) + \frac{x^0}{0!}(-\ln(2\pi x) + H_0) - i\pi\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^0}{2\cdot 0!}\right)$.

(2) $m \in \mathbb{N}$:

Mit den Gleichungen (3.10) und (4.5) eingesetzt in das konjugiert Komplexe der Gleichung (3.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{v=1}^{m}\binom{m}{v}\frac{v!}{(-i2\pi x)^v}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi xk}}{k^{v+1}} = \\ &= \ln\left(1-e^{i2\pi x}\right) + \frac{m!\zeta(m+1)}{(-i2\pi x)^m} - \frac{1}{m} - \frac{i\pi x}{m+1} + \frac{1}{(-x)^m}(\ln Q_m(x) + (-1)^m \ln Q_m(-x)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

vgl. [10, Seite 14, (5.11)], [11, Seite 62, (4)] ohne die Gleichung (3.2).

In der Äquivalenz $b_m = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v}(-1)^v a_v \Leftrightarrow a_m = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v}(-1)^v b_v$ für $a_v, b_v \in \mathbb{C}$ beliebig sei

$$a_0 = b_0 := 0 \ \ , \ \ a_m := \frac{m!}{(i2\pi x)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi xk}}{k^{m+1}} \ \ \text{und}$$

$$b_m := \ln\left(1 - e^{i2\pi x}\right) + \frac{m!\zeta(m+1)}{(-i2\pi x)^m} - \frac{1}{m} - \frac{i\pi x}{m+1} + \frac{1}{(-x)^m}(\ln Q_m(x) + (-1)^m \ln Q_m(-x))$$

gesetzt, so dass sich als Umkehrung

$$\frac{m!}{(i2\pi x)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi xk}}{k^{m+1}} =$$
$$= \sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v \left(\ln(1 - e^{i2\pi x}) + \frac{v!\zeta(v+1)}{(-i2\pi x)^v} - \frac{1}{v} - \frac{i\pi x}{v+1} + \frac{1}{(-x)^v}(\ln Q_v(x) + (-1)^v \ln Q_v(-x)) \right)$$

ergibt. Mit der Verwendung von

$$\sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} \frac{(-1)^{v-1}}{v} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^m}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-t^m}{1-t} dt = H_m \ , \tag{4.8}$$

$$\sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} \frac{(-1)^v}{v+1} = \int_0^1 ((1-t)^m - 1)\, dt = -\left.\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 - 1 = -\frac{m}{m+1} \ ,$$

$$\sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v \ln\left(1 - e^{i2\pi x}\right) = -\ln\left(1 - e^{i2\pi x}\right) =$$
$$= -i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \ln(2\pi x) + \ln Q_0(x) + (-1)^0 \ln Q_0(-x) \ \ , \text{ vgl. Satz 4.3 (1) } ,$$

und der abschließenden Multiplikation mit $\frac{x^m}{m!}$ folgt die Behauptung. □

4.4 Lemma („Grenzwertgleichung")

Sei $k, n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden , $\mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -a_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}\}$, $b_k \in \mathbb{C}$,
$x, x_n \in \mathbb{D}$, $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$, Folge (x_n) streng monoton steigend und unbeschränkt.
Sei

$$f(x) := p(x)x \ln x + q(x)x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ln(x + a_k) + r(x) \tag{4.9}$$

mit einer stetigen Funktion $r(x)$, die bezüglich der Folge (x_n) beschränkt ist. Seien fast alle $b_k := 0$, d. h. es gibt keine oder eine *endliche* Anzahl $b_k \neq 0$. Sei

$$f(x_n) = 0 \qquad \qquad \textit{(„Grenzwertgleichung")} \tag{4.10}$$

erfüllt für (fast) alle n .
Dann gilt:

(1) $p(x)$ und $q(x)$ sind Nullpolynome

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 0$

(3) (a) $r(x) = 0$ für höchstens ein $b_k \neq 0$

 (b) $\lim_{n\to\infty} r(x_n) = 0$ für mehr als ein $b_k \neq 0$

Beweis von (1):
Mit $f(x_n) = 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty}(p(x_n)\ln x_n + q(x_n))$.
Dies ist für $p(x_n) \neq 0$ unmöglich, da
bei $Grad(q) \leq Grad(p)$ nun $\lim_{n\to\infty}(\ln x_n + \frac{q(x_n)}{p(x_n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n + Konstante) \neq 0$,
bei $Grad(q) > Grad(p)$ mit $g := Grad(q) - Grad(p) \geq 1$ und $q(x_n) \neq 0$
nun $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x_n^{g-1}}\frac{\ln x_n}{x_n} + \frac{q(x_n)}{x_n^g p(x_n)}) = \lim_{n\to\infty}\frac{q(x_n)}{x_n^g p(x_n)} \neq 0$ gilt.
Daher ist $p(x_n) = 0$ und es folgt $q(x_n) = 0$. Und weil die Nullstellen von Polynomen endlich viele sind, n bzw. die Folge (x_n) aber unbegrenzt ist, folgt die Behauptung.

Beweis von (2):
Trivial, wenn alle $b_k = 0$ sind. Sei also mindestens ein $b_k \neq 0$. Wegen (1) bleibt vom Term (4.9) mit der Bedingung (4.10) nur $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ln(x_n + a_k) + r(x_n) = 0$ übrig.
Die Teilung durch $\ln(x_n + a_l)$ mit $x_n > -a_l$ und anschließender Grenzwertbildung mittels $n \to \infty$ liefert wegen $\frac{\ln(x_n+a_k)}{\ln(x_n+a_l)} = 1 + \frac{\ln\frac{x_n+a_k}{x_n+a_l}}{\ln(x_n+a_l)} \to 1$ und $\frac{r(x_n)}{\ln(x_n+a_l)} \to 0$ die Behauptung.

Beweis von (3):
(a) Sind alle $b_k = 0$, so folgt mit (2) unmittelbar $r(x) = 0$.
Die Annahme, dass genau ein $b_k \neq 0$ gilt, führt mit (2) zum Widerspruch und es gilt daher $r(x) = 0$, so dass die Behauptung erfüllt ist.
(b) Wegen (2) folgt
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_n) &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ln(x_n + a_k)\\ &= -\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)\ln(x_n+a_l) - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\ln(x_n+a_k) - \ln(x_n+a_l))\\ &= -0 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_n+a_k}{x_n+a_l} = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$ □

4.5 Satz („Q-Produktgleichung“)

Sei $m, w_2 \in \mathbb{N}_0$ und $w_1 \in \mathbb{N}$.

(1) Eine (logarithmierte) Multiplikationsformel der Q_m-Funktion („Q-Produktgleichung“) ist
$$\ln Q_m(x) = p_{m,w_2}(x) + r_m(x)\ln w_1 - \sum_{k=1}^{w_2} k^m \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) +$$
$$+ \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2 - j)^{m-v}\left(\ln Q_v\left(\frac{x + w_2 - j}{w_1}\right) - \ln Q_v\left(\frac{w_2 - j}{w_1}\right)\right) \tag{4.11}$$
für $x \in (-1, 1]$ und $x + w_2 - j$, $w_2 - j \in (-w_1, w_1]$ für alle j.

(2) (a) Der Definitionsbereich der Q_m-Funktion ist auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ erweiterbar und daher auch die Q-Produktgleichung.
(b) $Q_m(x)$ ist wegen der Gleichung (4.11) auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ differenzierbar und $\ln Q_m(x)$ auf $x \in (-1, \infty)$ integrierbar.

Beweis von (1):
Um Zusammenhänge von $Q_m(x)$ mit rationalen Argumenten untereinander dazustellen, eignet sich der Ansatz
$$\sum_{k=1}^{w_1 n + w_2} k^m \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{w_2} k^m \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) + \sum_{j=0}^{w_1-1}\sum_{k=1}^{n}(w_1 k + w_2 - j)^m \ln\left(1 + \frac{x}{w_1 k + w_2 - j}\right)$$
mit $$\sum_{j=0}^{w_1-1}\sum_{k=1}^{n}(w_1 k + w_2 - j)^m \ln\left(1 + \frac{x}{w_1 k + w_2 - j}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{w_1-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (w_1 k)^v (w_2 - j)^{m-v} \right) \left(\ln \left(1 + \frac{x + w_2 - j}{w_1 k} \right) - \ln \left(1 + \frac{w_2 - j}{w_1 k} \right) \right)$$

$$= \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(\sum_{k=1}^{n} k^v \ln \left(1 + \frac{x + w_2 - j}{w_1 k} \right) - \sum_{k=1}^{n} k^v \ln \left(1 + \frac{w_2 - j}{w_1 k} \right) \right) .$$

Die Anwendung von der Gleichung (4.1) führt zu

$$p_{m,w_1 n + w_2}(x) + r_m(x) \ln(w_1 n + w_2) - \ln Q_{m,w_1 n + w_2}(x) = \sum_{k=1}^{w_2} k^m \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) +$$

$$+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(p_{v,n} \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) + r_v \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) \ln n - \ln Q_{v,n} \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) \right)$$

$$- \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(p_{v,n} \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) + r_v \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) \ln n - \ln Q_{v,n} \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) \right) .$$

Im Term (4.9) sei mit $\frac{p_{m,w_1 n + w_2}(x) - p_{m,w_2}(x)}{n} \in \mathbb{R}[n]$ daher

$$q(n) := p_{m,w_1 n + w_2}(x) - p_{m,w_2}(x) -$$

$$- \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(p_{v,n} \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) - p_{v,n} \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) \right) ,$$

$$p(n) := 0 \, , \; b_1 := r_m(x) \, , \; a_1 := \frac{w_2}{w_1} \, ,$$

$$b_2 := - \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(r_v \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) - r_v \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) \right) , \quad a_2 := 0 \, ,$$

$$r(n) := p_{m,w_2}(x) + r_m(x) \ln w_1 - \ln Q_{m,w_1 n + w_2}(x) - \sum_{k=1}^{w_2} k^m \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) +$$

$$+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1-1} (w_2 - j)^{m-v} \left(\ln Q_{v,n} \left(\frac{x + w_2 - j}{w_1} \right) - \ln Q_{v,n} \left(\frac{w_2 - j}{w_1} \right) \right)$$

gesetzt, so dass mit der Bedingung (4.10) für $x_n := n$ und $n \to \infty$ die Behauptung folgt.

Beweis von (2) mit $v \in \{0, 1, ..., m\}$:

(a) Mit $(w_1; w_2) := (2; 0)$ in der Gleichung (4.11) ergibt sich die Erweiterung rekursiv mit $x \to x+1$ von $x \in [0, 1]$ auf $x \in \mathbb{R}_0^+$ unter Verwendung der Werte $Q_v(-\frac{1}{2})$.
Mit $(w_1; w_2) := (2; 1)$ in der Gleichung (4.11) ergibt sich exponenziert die Erweiterung rekursiv mit $x \to x - 1$ von $x \in (-1, 0]$ auf $x \in \mathbb{R}_0^- \setminus \mathbb{Z}^-$ unter Verwendung der Werte $Q_v(\frac{1}{2})$.

(b) Damit überträgt sich zugleich auf Grund des linearen Zusammenhangs der $Q_v(x)$, $x \in (-1, 1]$, mit $Q_m(x)$ mittels Rekursion auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ und der Differenzierbarkeit aller $\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k^m}$ für $x \in \mathbb{R}$ die Differenzierbarkeit der $Q_v(x)$ auf $Q_m(x)$. Des Weiteren überträgt der o. g. lineare Zusammenhang mittels Rekursion und der Integrierbarkeit aller $\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ für $x > -1$ die Integrierbarkeit der $\ln Q_v(x)$ auf $\ln Q_m(x)$. □

Anmerkung 1:
$Q_m(x)$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ hängt eng mit der Multiplen Gammafunktion $G_n(z)$ zusammen, für die $G_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt, vgl. [9, S.517, (1.5) bis (1.9)]. Es ist z. B. $G_1(x+1) = Q_0(x)$, $G_2(x+1) = Q_1^x / (Q_1(x) e^{\frac{1}{2}x(x-1)})$ und $G_3(x+1) = \alpha \cdot \sqrt{(Q_1^{x(x-2)} Q_1(x) Q_2(x)) / (Q_2^x e^{\frac{1}{4}x(x-1)(2x-3)})}$ mit dem Vorzeichen $\alpha = -1$ für $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (2 - 4k, 3 - 4k)$ und sonst $\alpha = +1$.

Anmerkung 2:
Die Q-Produktgleichung verallgemeinert die Gaußsche Multiplikationsformel, indem in der Gleichung (4.11) nun $(m; w_2) := (0; 0)$ gesetzt und $(\prod_{j=0}^{w_1-1} Q_0(\frac{-j}{w_1}))^2 = \prod_{j=1}^{w_1-1} Q_0(\frac{-j}{w_1})Q_0(-1+\frac{j}{w_1}) = \prod_{j=1}^{w_1-1} \frac{i2\pi}{e^{i\frac{j\pi}{w_1}}(1-e^{-i\frac{j2\pi}{w_1}})} = (2\pi)^{w_1-1} \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{x-1}{x^{w_1}-1} = \frac{(2\pi)^{w_1-1}}{w_1}$ berücksichtigt wird.

4.6 Satz („$\ln Q$-Differenzengleichungen")

Sei $m, w \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > -1\}$ bzw. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ bei exponenzierter Schreibweise. Differenzengleichungen der $\ln Q_m$-Funktion sind die nachfolgenden Formeln (1) und (3).

(1)
$$\ln Q_m(x+w) = \sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + \ln Q_m(w) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} (\ln Q_v(x) - p_{v,w}(x)) \tag{4.12}$$

(2) Ergänzung zu (1): Die strenge Konvexität von $K_m(x)$ in Satz 4.2 (4) und daher auch von $e^{K_m(x)}$ ist von $0 < x \le 1$ auf $x \in \mathbb{R}^+$ erweiterbar.

(3)
$$\ln Q_m(x-w) = -r_m(x-w)\ln w + \ln Q_{m,w}(x-w) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} (\ln Q_v(x) - \ln Q_v(w))$$

mit $x - w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

(4) Ergänzung zu (3): Es existiert $\lim\limits_{x\to -w} \left(\left(1+\frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_m(x) \right)$ für $w \in \mathbb{N}$.

Beweis von (1):
Wegen

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1+\frac{x+w}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1+\frac{w}{k}\right) + \sum_{k=1+w}^{n+w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1+\frac{w}{k}\right) - \sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n+w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n} k^m \ln\left(1+\frac{w}{k}\right) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} \sum_{k=1}^{n+w} k^v \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)
\end{aligned}$$

und der Gleichung (4.1) gilt

$$\begin{aligned}
&p_{m,n}(x+w) + r_m(x+w)\ln n - \ln Q_{m,n}(x+w) = \\
&= -\sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + p_{m,n}(w) + r_m(w)\ln n - \ln Q_{m,n}(w) \\
&\quad + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} (p_{v,n+w}(x) + r_v(x)\ln(n+w) - \ln Q_{v,n+w}(x)) \,.
\end{aligned}$$

Im Term (4.9) sei mit $\dfrac{p_{v,n+w}(x) - p_{v,w}(x)}{n} \in \mathbb{R}[n]$ daher

$$p(n) := 0 \,,$$

$$q(n) := p_{m,n}(x+w) - p_{m,n}(w) - \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} (p_{v,n+w}(x) - p_{v,w}(x)) \,,$$

$$b_1 := r_m(x+w) - r_m(w) \,,\ a_1 := 0 \,,\ b_2 := \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} r_v(x) \,,\ a_2 := w \,,$$

$$\begin{aligned} r(n) := &- \ln Q_{m,n}(x+w) + \sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big) + \ln Q_{m,n}(w) \\ &+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} \Big(\ln Q_{v,n+w}(x) - p_{v,w}(x) + r_v(x) \ln\Big(1+\frac{w}{n}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{4.13}$$

gesetzt. Mit der Bedingung (4.10) für $x_n := n$ und $n \to \infty$ kann die Behauptung nun mit Vollständiger Induktion, bezogen auf die Gleichung (4.13), bewiesen werden:

$(x; w) := (1; 1)$: $\quad Q_m(2) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(2)$ existiert wegen der Gleichung (4.2), da damit $Q_m(1) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(1)$ und $Q_v(1) = \lim_{n\to\infty} Q_{v,n+1}(1)$ vorgegeben sind.

Annahme: $\quad$ Es gilt $Q_m(w) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(w)$ für ein bestimmtes $w \in \mathbb{N}$.

Induktion mit $x := 1$ und $w \to w+1$:

Auf Grund von $Q_m(w) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(w)$, $Q_v(1) = \lim_{n\to\infty} Q_{v,n+w}(1)$ und $\lim_{n\to\infty} \ln\Big(1+\dfrac{w}{n}\Big) = 0$ ist $Q_m(w+1) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(w+1)$ konvergent.

Da $\lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(w)$ für alle $w \in \mathbb{N}_0$ konvergiert, existiert wegen der Gleichung (4.13) und $Q_v(x) = \lim_{n\to\infty} Q_{v,n+w}(x)$, $x \in (-1, 1]$, auch $Q_m(x+w) = \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(x+w)$.

Beweis von (2):
Mit $w = 1$ und $\frac{(x+1)^m-1}{m}|_{m:=0} := \lim_{m\to\pm 0} \frac{(x+1)^m-1}{m} = \ln(x+1)$ lässt sich die Gleichung (4.12) zu

$$\ln Q_m(x+1) = (-1)^m \frac{(x+1)^m - 1}{m} + \ln Q_m + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^{m-v} \ln Q_v(x)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ verkürzen, da $\ln Q_0(x+1) = \ln(x+1) + Q_0(x)$ und für $m > 0$ die Vereinfachung $\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^{m-v} (-p_{v,1}(x)) = \frac{(x+1)^m-1}{m}$ gilt. Mit der Definition von $K_m(x)$ in Satz 4.2 (4) folgt für die vorangegangene Gleichung für $\ln Q_m(x+1)$ eine prägnantere Schreibweise:

$$K_m(x+1) = K_m(1) + \frac{(x+1)^m - 1}{m} + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} K_v(x)$$

Da $K_v''(x) > 0$ für alle v und außerdem $(\ln(x+1))'' > 0$ und $(\frac{(x+1)^m-1}{m})'' > 0$ für $x > 0$ gilt, folgt $K_m''(x+1) > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Rekursiv mit $x \to x+1$ sind daher $K_m(x)$ und $e^{K_m(x)}$ streng konvex für $x \in \mathbb{R}^+$.

Beweis von (3):

Die Umkehrung zu $\quad b_m = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v a_v$ mit $a_v, b_v \in \mathbb{C}$ beliebig

ist $\quad a_m = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v b_v$.

Der (einfache) Beweis hierfür kann methodisch wie in Lemma 3.4 geführt oder z.B. in der Literatur für *Diskrete Mathematik* nachgesehen werden.

Die Gleichung (4.12) lässt sich bei $w \neq 0$

in der Form $\qquad b_m = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v a_v$

schreiben mit $\qquad a_m := w^{-m}(\ln Q_m(x) - p_{m,w}(x))$

und $\qquad b_m := (-w)^{-m} \left(\ln Q_m(x+w) - \ln Q_m(w) - \sum_{k=1}^{w} (k-w)^m \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right).$

Die dazugehörige Umkehrung ist somit

$$\ln Q_m(x) - p_{m,w}(x) = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} \left(\ln Q_v(x+w) - \ln Q_v(w) - \sum_{k=1}^{w} (k-w)^v \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right),$$

die auf triviale Weise auch für $w = 0$ gültig ist.
Mit

$$\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} \sum_{k=1}^{w} (k-w)^v \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{w} \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} (k-w)^v \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{w} k^m \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) = p_{m,w}(x) + r_m(x) \ln w - \ln Q_{m,w}(x)$$

folgt schließlich

$$\ln Q_m(x) = -r_m(x) \ln w + \ln Q_{m,w}(x) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} (\ln Q_v(x+w) - \ln Q_v(w)) \ , \tag{4.14}$$

und da wegen Satz 4.5 (2) nun x durch $x - w$ mit $w - x \notin \mathbb{N}$ ersetzt werden kann, die Behauptung.

Beweis von (4):
Gleichung (4.14) um $w^m \ln \left(1 + \frac{x}{w}\right), x \neq -w$, beidseitig ergänzt ergibt

$$\ln \left(\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_m(x) \right) = -r_m(x) \ln w + \ln \left(\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_{m,w}(x) \right)$$
$$+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w^{m-v} (\ln Q_v(x+w) - \ln Q_v(w)) \, .$$

Damit hängt die Konvergenz von $\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_m(x)$ für $x \to -w \pm 0$ nur von $\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_{m,w}(x)$ ab. Es ist

$$\lim_{x \to -w} \left(1 + \frac{x}{w}\right)^{w^m} Q_{m,w}(x) = \frac{e^{p_{m,w}(-w)} w^{r_m(-w)}}{\prod_{k=1}^{w-1} \left(1 - \frac{w}{k}\right)^{k^m}} \lim_{x \to -w \pm 0} \left(\frac{x+w}{x+w} \right)^{w^m}$$

mit $\lim_{x \to -w \pm 0} \frac{x+w}{x+w} = \lim_{x \to -w} \frac{(x+w)'}{(x+w)'} = \frac{1}{1} = 1$ nach der Grenzwertregel von L'Hôpital. $\square$

Anmerkung 1:
Die Produktdarstellung für die Funktion $Q_m(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Denn für $x > -1$ wird dies über den Ansatz mit der Gleichung (4.1) der Beweisführung für die Gleichung (4.12) begründet; wird die Gleichungsumkehrung im Beweis von Satz 4.6 (3) auf die Gleichung (4.13) angewendet (und das Ergebnis dann exponenziert), so kann die Gültigkeit von $Q_m(x) = \lim_{n \to \infty} Q_{m,n}(x)$ mit

$-w < x \leq 0$ und $x \notin \mathbb{Z}^-$ rekursiv und wegen beliebig groß wählbarem $w \in \mathbb{N}$ für $x \in \mathbb{R}_0^- \setminus \mathbb{Z}^-$ begründet werden.

Anmerkung 2:
Unter Berücksichtigung der Gleichung (4.1) erhält man für die Gleichung (4.12) mit $w \in \mathbb{N}$ auch

$$\ln Q_m(x+w) =$$
$$= (-1)^m \frac{(x+w)^{m+1} - w^{m+1}}{m+1} \ln w + \ln Q_m(w) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w)^{m-v} (\ln Q_v(x) - \ln Q_{v,w}(x)) \ .$$

Anmerkung 3 (als Konstruktionsanleitung):
Die Q_m-Funktionen einerseits nach Index und andererseits nach Argument variiert lassen sich ineinander umrechnen: Die Darstellung von $\ln Q_{v_0}(x)$ durch $\ln Q_m(x+w_j) - \ln Q_m(w_j)$ mit $0 \leq v_0, j \leq m$ ergibt sich mit der Teilung der Gleichung (4.12) durch w^m, dem Ersatz von w durch $w_j \in \mathbb{N}$, der Multiplikation mit einer Unbekannten a_j, der Summierung über j von 0 bis m, dem Auflösen des *Linearen Gleichungssystems* $\sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{w_j^v} = \delta_{v,v_0}$ nach a_j mit $0 \leq v \leq m$, geeigneten w_j (Lösbarkeit nur bei Determinante $\neq 0$) und dem Kronecker-Delta $\delta_{v,v_0} = (1|_{v=v_0} \vee 0|_{v \neq v_0})$. Anwendungsbeispiel siehe [12, Seite 538, (2)].

4.7 Korollar (Erweiterung von Satz 4.6)

Die Erweiterung der Gleichung (4.12) um $x := -w_2$ im Sinne von $x \to -w_2 \pm 0$ mit $w_2 \in \mathbb{N}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ und $w_1 \in \mathbb{N}_0$ ist:

(1) $w_2 \leq w_1$:

$$\ln Q_m(x+w_1) = \sum_{k=1,\, k\neq w_2}^{w_1} (k-w_1)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + \ln Q_m(w_1)$$
$$+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w_1)^{m-v} \left(\ln\left(\left(1+\frac{x}{w_2}\right)^{w_2^v} Q_v(x) \right) - p_{v,w_1}(x) \right) \qquad (4.15)$$

(2) $w_2 > w_1$:

$$\ln\left(\left(1+\frac{x+w_1}{w_2-w_1}\right)^{(w_2-w_1)^m} Q_m(x+w_1) \right) =$$
$$-(w_2-w_1)^m \ln(1-\frac{w_1}{w_2}) + \sum_{k=1}^{w_1} (k-w_1)^m \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) + \ln Q_m(w_1)$$
$$+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w_1)^{m-v} \left(\ln\left(\left(1+\frac{x}{w_2}\right)^{w_2^v} Q_v(x) \right) - p_{v,w_1}(x) \right)$$

Beweis:
In der Gleichung (4.12) wird w durch w_1 ersetzt und entweder für $w_2 \leq w_1$ nun $0 = -(w_2-w_1)^m \cdot \ln(1+\frac{x}{w_2}) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w_1)^{m-v} \ln((1+\frac{x}{w_2})^{w_2^v})$ oder für $w_2 > w_1$ nun $(w_2-w_1)^m \ln(1+\frac{x}{w_2}) = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-w_1)^{m-v} \ln((1+\frac{x}{w_2})^{w_2^v})$ addiert, wobei diese Gleichungen auf der trivial veränderten Binomialformel $(a+b)^m \ln c = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} a^{m-v} b^v \ln c$ beruhen. Für Fall (1) verschwindet $(w_2 - w_1)^m \ln(1+\frac{x}{w_2})$, da dieser Term in der Summe $\sum_{k=1}^{w_1} (k-w_1)^m \ln(1+\frac{x}{k})$ enthalten ist und für Fall (2) beinhaltet die linke Seite der Gleichung den Term $(1+\frac{x}{w_2})^{(w_2-w_1)^m} Q_m(x+w_1)$ mit $1+\frac{x}{w_2} = (1-\frac{w_1}{w_2})(1+\frac{x+w_1}{w_2-w_1})$, der mittels stetiger Fortsetzung in $x \to -w_2 \pm 0$ den Pol $w_1 - w_2$ annulliert, vgl. Satz 4.6 (4), und daher wohldefiniert ist. Analog dazu gilt wegen Satz 4.6 (4) für beide Fälle die Existenz von $\lim\limits_{x \to -w_2 \pm 0} (1+\frac{x}{w_2})^{w_2^v} Q_v(x)$, so dass die Behauptung folgt. $\square$

4.8 Definition (Q_m^*-Funktion)

Sei $\quad Q_m^*(x) := (x+1)Q_m(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \cup \{-1\}$

mit $\quad Q_m^* := Q_m^*(-1) = \lim\limits_{x \to -1 \pm 0}((x+1)Q_m(x))$.

Vgl. Satz 4.6 (4), $w := 1$.

4.9 Korollar (Regeln für die Q_m^*-Konstante)

Es gilt:

(1) $$\sum_{v=1}^{m} \binom{m}{v} (-1)^v \ln Q_v^* = \frac{1}{m} - (-1)^m \ln Q_m \text{ für } m \in \mathbb{N} \tag{4.16}$$

(2) $$Q_0^* = 1 \text{ und } \ln Q_m^* = \frac{\gamma}{m+1} - H_{m+1} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\zeta(v)-1}{m+v} \text{ für } m \in \mathbb{N}_0$$

Beweis von (1):
In der Gleichung (4.15) sei $(w_1; w_2; x) = (1; 1; -1)$ gesetzt, also $x \to -1 \pm 0$. Dann ist

$$0 = \ln Q_m(1) + \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^{m-v} (\ln Q_v^*(-1) - p_{v,1}(-1))$$

und wegen

$$\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-1)^{m-v} p_{v,1}(-1) = \frac{(-1)^{m-1}}{m}(0^m - 1) = \frac{(-1)^m}{m}$$

folgt für $m \in \mathbb{N}$ die Behauptung.

Beweis von (2):
Es ist

$$Q_0^*(-x) = (1-x)Q_0(-x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{-x}}{\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right)} \text{ mit } \frac{n^{-1}}{\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{n} \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} = 1 \,.$$

Und die Gleichung (4.2) mit $-1 < x \le 1$ liefert für $m \in \mathbb{N}_0$ nun

$$\ln Q_m^*(-x) = \ln((1-x)Q_m(-x)) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\gamma - x + \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{x^{m+v}}{m+v}\zeta(v) - \frac{x^v}{v} \right) .$$

Mit $Q_m^* = \lim_{x \to 1 \pm 0}((1-x)Q_m(-x))$ und $H_m = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{m+k})$ folgt die Behauptung. □

4.10 Satz (Riemannsche Zeta-Funktion an den ungeraden Stellen)

Sei $k \in \mathbb{N}$. In Satz 4.3 (2) kann der Definitionsbereich $0 < x < 1$ auf $0 < x \le 1$ erweitert werden und es gilt für $x \uparrow 1$ die Gleichung

$$\frac{\zeta(2k+1)(2k)!}{(-1)^k (2\pi)^{2k}} = -\frac{2}{2k+1} \sum_{v=0}^{2k} \binom{2k+1}{v+1} B_{2k-v} \left(\frac{1}{v+1} + (-1)^v \ln Q_{v+1} \right) , \tag{4.17}$$

vgl. [12, Seite 538, (1.4), Gleichung für $\zeta(2n+1)$] und Anmerkung 5 zu Satz 4.2 .

Beweis:
Zur Gleichung (4.6) wird $\frac{(1-x)^m}{m!}\ln(1-x) = \sum_{v=0}^{m} \frac{(-1)^v x^{m-v}}{v!(m-v)!}\ln(1-x)$ addiert:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(i2\pi)^m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i2\pi xk}}{k^{m+1}} + \frac{(1-x)^m}{m!}\ln(1-x) = \\
&= \sum_{v=1}^{m}\frac{x^{m-v}}{(m-v)!}\frac{\zeta(v+1)}{(i2\pi)^v} + \sum_{v=0}^{m}\frac{x^{m-v}}{v!(m-v)!}(\ln Q_v(x) + (-1)^v\ln((1-x)Q_v(-x))) \\
&+ \frac{x^m}{m!}(-\ln(2\pi x) + H_m) - i\pi\left(\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{x^m}{2\cdot m!}\right)
\end{aligned}$$

Linksseitig gilt $\lim_{x\uparrow 1}((1-x)^m\ln(1-x)) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$ und $e^{i2\pi xk}|_{x=1} = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$, rechtsseitig nun $\lim_{x\uparrow 1}((1-x)Q_v(-x)) = \lim_{x\uparrow 1} Q_v^*(-x) = Q_v^*$. Somit kann beidseitig der Limes für $x \uparrow 1$ ermittelt werden, wobei anschließend noch $\frac{\zeta(m+1)}{(i2\pi)^m}$ subtrahiert und zuletzt mit $m!$ multipliziert wird:

$$\sum_{v=1}^{m-1}\binom{m}{v}\frac{v!\zeta(v+1)}{(i2\pi)^v} + \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\ln Q_v + (-1)^v\ln Q_v^*) + H_m - \ln(2\pi) + \frac{i\pi}{2}\frac{m-1}{m+1} = 0 \tag{4.18}$$

Es gilt $\ln Q_0 = 0 = \ln Q_0^*$ und mit der Anwendung der Gleichung (4.16) auf den *Realteil* der Gleichung (4.18) und der Berücksichtigung der Gleichung (4.8) folgt nach einer Umstellung

$$\sum_{v=1}^{m-1}\binom{m}{v}\left(\left.\frac{v!\zeta(v+1)}{(-i2\pi)^v}\right|_{v \bmod 2 \,\equiv\, 0} + \ln Q_v - \frac{(-1)^v}{v}\right) = -(1-(-1)^m)\left(\ln Q_m + \frac{1}{m}\right) + \ln(2\pi)\,.$$

In Lemma 3.4 sei

$$a_v := \frac{1+(-1)^v}{2}\frac{v!\zeta(v+1)}{(-i2\pi)^v} + \ln Q_v - \frac{(-1)^v}{v}$$

und $$b_{m-1} := -(1-(-1)^m)\left(\ln Q_m + \frac{1}{m}\right) + \ln(2\pi)\ ,$$

so dass sich mit $$\frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v} = \int_0^1 B_m(x)\,dx = 0\,,\quad \text{vgl. Korollar 3.3 (6)}\,,$$

die Umkehrung

$$\frac{(-1)^m}{m} - \ln Q_m - \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(1+(-1)^v)\left(\frac{1}{v+1} + \ln Q_{v+1}\right) = \frac{1+(-1)^m}{2}\frac{m!\zeta(m+1)}{(-i2\pi)^m}$$

ergibt und für $m := 2k$ unmittelbar

$$\frac{(2k)!\zeta(2k+1)}{(-1)^k(2\pi)^{2k}} = \frac{1}{2k} - \ln Q_{2k} - \frac{1}{2k+1}\sum_{v=0}^{2k}\binom{2k+1}{v+1}B_{2k-v}(1+(-1)^v)\left(\frac{1}{v+1} + \ln Q_{v+1}\right)$$

folgt, das mit $B_{2k+1} = 0$, vgl. Korollar 3.3 (3), für $k \in \mathbb{N}$ die Behauptung liefert. □

Als Abschluss von Kapitel 4 folgen Formeln für sechs bekannte Beispiele der Periodischen Dirichlet-Reihe, Beispiele (1) bis (5) mit der Gleichung (4.6), Beispiel (5) auch mit der Gleichung (4.17) und Beispiel (6) mit der Gleichung (4.7).

4.11 Korollar (Formeln für spezielle Periodische Dirichlet-Reihen)

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.11) und (4.3), d. h. $Q_0(x)Q_0(-x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$, gilt:

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{5k-4} = \frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\pi}{50}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$
$$\approx 0,888313572651788638040755227\ldots$$

(2) Catalansche Konstante , vgl. [10, Seite 6, (2.23)]
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\ln 2}{2} + 4 \ln \frac{Q_1(\frac{1}{4})}{Q_1(-\frac{1}{4})}\right)$$
$$\approx 0,915965594177219015054603514 9\ldots$$

(3) Gieseking-Konstante (*maximales Volumen eines hyperbolischen Tetraeders*)
$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln(2\cos\frac{x}{2})\,dx = \pi\left(1 - \frac{\ln 3}{2} + 3\ln\frac{Q_1(\frac{1}{3})}{Q_1(-\frac{1}{3})}\right)$$
$$\approx 1,014941606409653625021202554\ldots$$

(4) (a) $$\mathrm{Re}(i^m E_m(x)) = (-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^m}{2\cdot m!}B_m(x) \quad \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \le x < 1$$
und zugleich $x \neq 0$ für $m = 1$

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m+1}}{2\cdot(2m+1)!}B_{2m+1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0$$

(5) Apéry-Konstante $\zeta(3)$

(a) $$\zeta(3) = \frac{(2\pi)^2}{18}\left(\frac{1}{6} + \ln Q_1 + 3\ln Q_2 + 2\ln Q_3\right)$$

(b) $$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7}\left(-1 + 2\ln 2 + 8\ln\left(Q_2\left(-\frac{1}{2}\right)Q_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$
$$\approx 1,202056903159594285399738161 5\ldots$$

(6) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^m 2^{4m+2}\pi^{2m}}{2^{2m}-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{(2^{2k}-1)b_{2k}}{2^{2k}(2k)!}\sum_{v=k}^{m}\frac{(2^{2v-2k+2}-1)B_{2v-2k+2}B_{2m-2v}(\frac{1}{2})}{(2^{2v+1}-1)(2v-2k+2)!(2m-2v)!}$$
mit $$b_{2k} := \frac{1}{2k} - \ln 2 - 2^{2k}\ln\left(Q_{2k}\left(-\frac{1}{2}\right)Q_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Beweis von (1):
In der Gleichung (2.1) sei $(w;p) := (1;10)$, $(a_{k \bmod p \equiv 1}; a_{k \bmod p \equiv 6}) := (1;-1)$ und sonst $a_k := 0$ gesetzt. Daraus folgt
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} = \sum_{v=1}^{10} b_v E_1\left(\frac{v-1}{10}\right)$$
mit $$b_2 = \frac{1}{5}e^{-\frac{i\pi}{5}}\,,\ b_{10} = \overline{b_2}\,,\ b_4 = -\frac{1}{5}e^{\frac{i2\pi}{5}}\,,\ b_8 = \overline{b_4}\,,\ b_6 = -\frac{1}{5}\,,\ b_{2k-1} = 0 \text{ für } 1 \le k \le 5\,.$$

Wegen Korollar 2.4 (2) gilt $E_1\left(\frac{11-v}{10}\right) = \overline{E_1(\frac{v-1}{10})}$ für $2 \leq v \leq 5$ und mit der Anwendung der Gleichung (4.6), aufgelöst nach $E_m(x)$, für $m := 1$ gilt daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5k+1} &= -\frac{1}{5}E_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\mathrm{Re}\left(e^{-\frac{i\pi}{5}}E_1\left(\frac{1}{10}\right)\right) - \frac{2}{5}\,\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i2\pi}{5}}E_1\left(\frac{3}{10}\right)\right) \\ &= -\frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)\ln\left(\sin\frac{\pi}{10}\right) + \frac{4\pi}{25}\sin\frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)\ln\left(\sin\frac{3\pi}{10}\right) + \frac{2\pi}{25}\sin\frac{2\pi}{5}\;\;;\end{aligned}$$

die Wurzelausdrücke für $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{10}$ etc. sind in (fast) jeder guten Formelsammlung nachzulesen, so dass die Behauptung folgt.

Beweis von (2):
In der Gleichung (2.1) sei $(w;p) := (1;4)$ und $a_k := \sin\frac{\pi k}{2}$ gesetzt. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} = \sum_{v=1}^{4} b_v E_2\left(\frac{v-1}{4}\right) \;\text{ mit }\; b_1 = b_3 = 0\,,\; b_2 = -\frac{i}{2} \;\text{ und }\; b_4 = \overline{b_2}\;.$$

Wegen Korollar 2.4 (2) gilt $E_2(\frac{3}{4}) = \overline{E_2(\frac{1}{4})}$. Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} = -\frac{i}{2}E_2\left(\frac{1}{4}\right) + \overline{-\frac{i}{2}E_2\left(\frac{1}{4}\right)} = \mathrm{Im}\,E_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

und mit der Anwendung der Gleichung (4.6), aufgelöst nach $E_m(x)$, die Behauptung.

Anmerkung 1:
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}$ wird als Catalansche Konstante nach Eugène Catalan (1814 - 1894) bezeichnet.

Anmerkung 2:
Die Gleichung (4.5) mit $(m;x) := (1;\frac{1}{4})$ liefert

$$\ln\frac{Q_1(\frac{1}{4})}{Q_1(-\frac{1}{4})} = -2\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\zeta(2v)}{4^{2v+1}(2v+1)} < 0\,.$$

Definition 4.1 und Satz 4.2 (1) ergeben die Produktdarstellung

$$\frac{Q_1(\frac{1}{4})}{Q_1(-\frac{1}{4})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{e}\left(\frac{4k-1}{4k+1}\right)^k\right) \approx 0{,}98257740913899380762 5\ldots.$$

Beweis von (3):
Mit [13, Seite 232f, $\pi \ln \beta$] gilt:

$$G := \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln(2\cos\frac{x}{2})\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k-2)^2} - \frac{1}{(3k-1)^2}\right)$$

In der Gleichung (2.1) sei $(w;p) := (1;3)$ und $a_k := \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi k}{3}$ gesetzt. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} = \sum_{v=1}^{3} b_v E_2\left(\frac{v-1}{3}\right) \;\text{ mit }\; b_1 = 0\,,\; b_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{3} \;\text{ und }\; b_3 = \overline{b_2}\;.$$

Wegen Korollar 2.4 (2) gilt $E_2(\frac{2}{3}) = \overline{E_2(\frac{1}{3})}$. Damit folgt

$$G = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{i\sqrt{3}}{3}E_2\left(\frac{1}{3}\right) + \overline{-\frac{i\sqrt{3}}{3}E_2\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = \frac{3}{2}\operatorname{Im} E_2\left(\frac{1}{3}\right)$$

und mit der Anwendung der Gleichung (4.6), aufgelöst nach $E_m(x)$, die Behauptung.

Anmerkung 1:
Das Integral $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln(2\cos\frac{x}{2})\,dx$ wird als Gieseking Konstante nach Hugo Gieseking (1887 - 1915) und ggfs. auch als Lobatschewski-Konstante nach Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856) bezeichnet.

Anmerkung 2:
Die Gleichung (4.5) mit $(m;x) := (1;\frac{1}{3})$ liefert

$$\ln\frac{Q_1(\frac{1}{3})}{Q_1(-\frac{1}{3})} = -2\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\zeta(2v)}{3^{2v+1}(2v+1)} < 0\,.$$

Definition 4.1 und Satz 4.2 (1) ergeben die Produktdarstellung

$$\frac{Q_1(\frac{1}{3})}{Q_1(-\frac{1}{3})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3k-1}{3k+1}\right)^k\right) \approx 0,95834960431350868899245 9\ldots\,.$$

Beweis von (4) (a):
Gesucht ist die Fourier-Entwicklung der Bernoulli-Polynome. Vergleicht man die Imaginärteile von der Gleichung (4.6) und berücksichtigt

$$B_m(x) = \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}B_v x^{m-v} = x^m - \frac{mx^{m-1}}{2} + \sum_{v=1}^{\lfloor m/2\rfloor}\binom{m}{2v}B_{2v}x^{m-2v}\,,$$

so erhält man rechtsseitig

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{v=1}^{m}\frac{x^{m-v}}{(m-v)!}\frac{\zeta(v+1)}{(i2\pi)^v} - i\pi\left(\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{x^m}{2\cdot m!}\right)\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{(m+1)!}\left(x^{m+1} - \frac{(m+1)x^m}{2}\right) - \frac{1}{m!}\sum_{v=1}^{\lfloor (m+1)/2\rfloor}\binom{m}{2v-1}(-1)^{v-1}\frac{(2v-1)!\zeta(2v)}{(2\pi)^{2v-1}}x^{m-2v+1}$$
$$= -\frac{\pi}{(m+1)!}\left(x^{m+1} - \frac{(m+1)x^m}{2} + \sum_{v=1}^{\lfloor (m+1)/2\rfloor}\binom{m+1}{2v}B_{2v}x^{m-2v+1}\right) = -\pi\frac{B_{m+1}(x)}{(m+1)!}\,.$$

Die Multiplikation der Gleichung (4.6) mit $(-2\pi)^m$ ergibt für den Imaginärteil $\operatorname{Im}(i^m E_{m+1}(x))$ nun

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left(i^m e^{i2\pi xk}\right)}{k^{m+1}} = \frac{(-2\pi)^{m+1}B_{m+1}(x)}{2\cdot(m+1)!}\,.$$

Mit $m\to m-1$ folgt die Behauptung.

Beweis von (4) (b):
Diese wohlbekannte Formel ergibt sich für $x := \frac{1}{4}$ und $m\to 2m+1$ in (4) (a).

Anmerkung:
In der Literatur werden an Stelle von $-\frac{4^{2m+1}}{2m+1}B_{2m+1}(\frac{1}{4})$ die Eulerschen Zahlen E_{2m} verwendet, die durch $\frac{1}{\cosh(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}E_k$ definiert sind.

Beweis von (5) (a):
Die Gleichung (4.17) liefert mit $k=1$ und der Umstellung nach $\zeta(3)$ die Behauptung.

Beweis von (5) (b):
In Korollar 2.4 (1) sei $s := 2$ gesetzt, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} = -\frac{3}{4}\zeta(3)$ gilt. Dies eingesetzt in die Gleichung (4.6) mit $x := \frac{1}{2}$ und nach $\zeta(3)$ umgeformt ergibt

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{7}{4}\zeta(3)\right) = \frac{1}{8}\left(-\ln\pi + \frac{3}{2}\right) + \sum_{v=0}^{2} \frac{1}{2^{2-v}v!(2-v)!}\left(\ln Q_v\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^v \ln Q_v\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Die Berechnung von $\frac{Q_1(\frac{1}{2})}{Q_1(-\frac{1}{2})}$ wird wie folgt durchgeführt:

Die Gleichung (4.11) mit $(m;x;w_1;w_2) := (1;1;2;0)$ ergibt den Wert $\sqrt{Q_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$.

Die Gleichung (4.12) mit $(m;x;w) := (1;-\frac{1}{2};1)$ ergibt den Wert $Q_1\sqrt{\frac{e}{\pi}}$.

Zusammengefasst gilt daher $\frac{Q_1(\frac{1}{2})}{Q_1(-\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{e}}$.

Durch Einsetzen in die o. g. Gleichung für $\zeta(3)$ folgt die Behauptung.

Anmerkung:
Der Wert von $\zeta(3)$ wird als Apéry-Konstante bezeichnet, da Roger Apéry (1916 - 1994) im Jahre 1979 seine Irrationalität nachgewiesen hatte.

Beweis von (6):
Die Gleichung (4.7) mit $x := \frac{1}{2}$ und $m \to 2m$ ergibt

$$\sum_{v=1}^{2m}\binom{2m}{v}\frac{v!}{(-i\pi)^v}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{v+1}} =$$
$$= \ln 2 + (-1)^m\frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{\pi^{2m}} - \frac{1}{2m} - \frac{i\pi}{2(2m+1)} + 2^{2m}\ln\left(Q_{2m}\left(-\frac{1}{2}\right)Q_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Der Vergleich der Realteile, Korollar 2.4 (1) mit $s := 2v+1$ und daher $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{2v+1}} = (1-\frac{1}{2^{2v}})\cdot \zeta(2v+1)$, des Weiteren die Definitionen

$$a_m := (-1)^m\frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{\pi^{2m}} \quad \text{und} \quad b_{2m} := \frac{1}{2m} - \ln 2 - 2^{2m}\ln\left(Q_{2m}\left(-\frac{1}{2}\right)Q_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

führen zu

$$a_m + \sum_{v=1}^{m}\binom{2m}{2v}\left(1-\frac{1}{2^{2v}}\right)a_v = b_{2m},$$

einer rekursiven Berechnungsmöglichkeit von $\zeta(2m+1)$, vgl. [11, Seite 63, $\zeta(2m+1)$]. Mit der Teilung durch $(2m)!$ und $a_0 = b_0 := 0$ gilt daher

$$\frac{a_m}{(2m)!} + \sum_{v=0}^{m}\frac{1}{(2m-2v)!}(1-\frac{1}{2^{2v}})\frac{a_v}{(2v)!} = \frac{b_{2m}}{(2m)!}. \tag{4.19}$$

Es seien nun die erzeugenden Funktionen

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}a_k \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}b_k$$

definiert, wobei $f(x)$ eine Funktion mit Achsensymmetrie ist. Wegen der Gleichung (4.19) gilt

$$\frac{g(x)+g(-x)}{2} = f(x) + \cosh(x)\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) .$$

Die noch frei wählbaren b_k mit $k \bmod 2 \equiv 1$ können nun mit der punktsymmetrischen erzeugenden Funktion

$$\frac{g(x)-g(-x)}{2} := \sinh(x)\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

festgelegt werden. Mit $B_{2m-1}(\frac{1}{2}) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, vgl. Korollar 3.3 (7), folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(1-\frac{1}{2^{2k}})a_k = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)-g(-x)}{e^x - e^{-x}} = \\
&= e^x \frac{2x}{e^{2x}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} b_{2k+1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} B_k\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} b_{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{v=0}^{k} \binom{2k+1}{2v+1} \frac{b_{2v+1}}{2^{2v}} B_{2k-2v}\left(\frac{1}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_k = \frac{2^{4k}}{(2^{2k}-1)(2k+1)} \sum_{v=0}^{k} \binom{2k+1}{2v+1} \frac{b_{2v+1}}{2^{2v}} B_{2k-2v}\left(\frac{1}{2}\right) . \tag{4.20}$$

Gesucht wird also eine Darstellung der b_{2k+1} durch b_{2v} mit $v \in \{1, ..., k\}$.

Die Gleichungen

$$g(x) = (e^x+1)f(x) - e^x f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g(-x) = (e^{-x}+1)f(x) - e^{-x} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

als Lineares Gleichungssystem nach $f(\frac{x}{2})$ und $f(x)$ aufgelöst ergeben

$$(e^x - 1)f\left(\frac{x}{2}\right) = e^x g(-x) - g(x) \quad \text{und} \quad (e^{2x}-1)f(x) = e^{2x} g(-x) - g(x) .$$

Der Vergleich bezüglich $f(x)$ führt durch Umformung zu der Achsensymmetrie

$$e^x\left(g(-2x) - g(-x)\right) = e^{-x}\left(g(2x) - g(x)\right) . \tag{4.21}$$

Mit der logischen Äquivalenz

$$a(d-f) = b(c-e) \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)((c+d)-(e+f)) = (a+b)((c-d)-(e-f))$$

und der Substitution $(a;b;c;d;e;f) := (e^x; e^{-x}; g(2x); g(-2x); g(x); g(-x))$ lassen sich die Koeffizienten b_k wegen der Gleichung (4.21) nach geraden und ungeraden Indizes sortieren:

$$\frac{(g(2x)-g(-2x)) - (g(x)-g(-x))}{(g(2x)+g(-2x)) - (g(x)+g(-x))} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tilde{B}_k$$

mit $\quad \tilde{B}_k = \frac{2^{2k+2}-1}{2k+2} 2^{2k+2} B_{2k+2}$ und $\sum_{v=0}^{k} \binom{2k+1}{2v+1} \tilde{B}_v = 1$

Die Multiplikation mit dem Nenner, die Teilung durch $x \neq 0$ und der Koeffizientenvergleich ergeben

$$b_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}-1} \sum_{v=1}^{k} \binom{2k+1}{2v} \tilde{B}_{k-v} (2^{2v}-1) b_{2v} \ .$$

Dies eingesetzt in die Gleichung (4.20) mit den Variablenänderungen von k nach m und von v nach k, a_m entsprechend der Definition durch $(-1)^m \frac{(2m)!\zeta(2m+1)}{\pi^{2m}}$ ersetzt und unter Verwendung der Summenvertauschung

$$\sum_{k=0}^{m} d_k \sum_{v=0}^{k} e_{k,v} b_{2v} = \sum_{k=0}^{m} b_{2k} \sum_{v=k}^{m} d_v e_{v,k}$$

mit $\qquad d_k := \binom{2m+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k}(2^{2k+1}-1)} B_{2m-2k}(\frac{1}{2})$

und $\qquad e_{k,v} := \binom{2k+1}{2v} \tilde{B}_{k-v}(2^{2v}-1)$

ergibt schließlich

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^m 2^{4m} \pi^{2m}}{(2^{2m}-1)(2m+1)!} \sum_{k=1}^{m} (2^{2k}-1) b_{2k} \sum_{v=k}^{m} \binom{2m+1}{2v+1} \binom{2v+1}{2k} \frac{\tilde{B}_{v-k} B_{2m-2v}(\frac{1}{2})}{2^{2v}(2^{2v+1}-1)} \ .$$

Mit der Berücksichtigung der Definition von $\tilde{B}_k$ und Kürzungen bei Zähler und Nenner folgt die Behauptung. $\square$

5 Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante

Das Ziel in diesem Kapitel ist es, eine bekannte und sehr einfache Formel für $\zeta(2k+1)$ mit der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante A_m herzuleiten. Hierfür wird ein Zusammenhang zwischen den Konstanten A_m und Q_m verifiziert.
Hinweis: Es ist die Ergänzung (letzter Absatz) in der Einleitung zu beachten.

5.1 Definition (Verallgemeinerte Hyperfakultät)

Sei $m, n \in \mathbb{N}_0$. Das Produkt $\prod_{k=1}^{n} k^k$ wird als Hyperfakultät bezeichnet, eine Verallgemeinerung ist

$$M_n(m) := \prod_{k=1}^{n} k^{k^m} \quad \text{mit} \quad M_0(m) := 1\,.$$

Eine Erweiterung davon mit $x \in \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq -1\}$ sei

$$M_n(m;x) := \prod_{k=1}^{n} (k+x)^{(k+x)^m}\,.$$

Speziell für $x \in \mathbb{N}_0$ gilt $M_{x+n}(m) = M_x(m)M_n(m;x)$.
Daher kann $M_n(m;x)$ für $x \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}$ und $n \geq -x$ in folgender Form erweitert definiert werden:

$$M_n(m;x) := \frac{M_{x+n}(m)}{M_x(m)}$$

5.2 Satz (Verallgemeinerte Hyperfakultät und Funktion $Q_{m,w}(x)$)

Sei $m, w \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > -1\}$. Dann gilt:

$$\ln M_w(m;x) = \frac{1}{x(m+1)} \sum_{v=0}^{m} \binom{m+1}{v+1} B_{m-v} (-x)^{m-v} \mu_{v+1,w}(x) \tag{5.1}$$

mit $\quad \mu_{k,0}(x)|_{k\in\mathbb{N}} := 0$

und $\quad \mu_{k,w}(x)|_{k,w\in\mathbb{N}} := \ln \dfrac{M_w(k;x)}{M_w(k)} - p_{k,w}(x) - r_k(x)\ln w + \ln Q_{k,w}(x)$

Beweis:
Für $w \in \mathbb{N}$ wird die Gleichung (4.1) als Ansatz verwendet; der Fall $w = 0$ ist trivial. Es ist

$$\begin{aligned}
&p_{m,w}(x) + r_m(x)\ln w - \ln Q_{m,w}(x) = \\
&= \sum_{k=1}^{w} k^m \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{w} ((k+x-x)^m \ln(k+x) - k^m \ln k) \\
&= \sum_{k=1}^{w} \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (-x)^{m-v} (k+x)^v \ln(k+x) - \sum_{k=1}^{w} k^m \ln k \\
&= \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} (-x)^{m-v} \ln M_w(v;x) + \ln \frac{M_w(m;x)}{M_w(m)}\,.
\end{aligned}$$

Nach der Summe umgeformt und durch $(-x)^m$, $x \neq 0$, geteilt ergibt sich

$$\sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} a_v = b_{m-1}$$

mit $\quad a_m := (-x)^{-m} \ln M_w(m;x)$

und $\quad b_{m-1} := (-x)^{-m} \left(-\ln \frac{M_w(m;x)}{M_w(m)} + p_{m,w}(x) + r_m(x) \ln w - \ln Q_{m,w}(x) \right)$

Lemma 3.4 liefert die Umkehrung und diese mit $(-x)^m$ multipliziert ergibt die Behauptung für alle $x \neq 0$. Sei nun $x = 0$. Wegen $\frac{r_{v+1}(x)}{x}|_{x=0} = 0$, $\frac{\ln Q_{v+1,w}(x)}{x}|_{x=0} = 0$ und der Grenzwertregel von L'Hôpital für $x \to \pm 0$ ergibt sich ein Trivialfall für die Gleichung (5.1) :

$$
\begin{aligned}
(m+1) \ln M_w(m;0) &= \lim_{x \to \pm 0} \frac{\mu_{m+1,w}(x)}{x} \\
&= -\frac{p_{m+1,w}(x)}{x}|_{x=0} + (\ln M_w(m+1;x))'|_{x=0} \\
&= -\sum_{k=1}^{w} k^m + ((m+1) \sum_{k=1}^{w} (k+x)^m \ln(k+x) + \sum_{k=1}^{w} (k+x)^m)|_{x=0} \\
&= (m+1) \sum_{k=1}^{w} k^m \ln k
\end{aligned}
$$

Damit gilt die Behauptung für alle x. □

5.3 Definition (Konstante $A_{m,n}$)

Sei $\quad m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}$

und $\quad A_{m,n} := M_n(m) \cdot e^{-p_m^*(n)}$

mit $\quad p_m^*(n) := \frac{1}{m+1} \sum_{v=0}^{m} \binom{m+1}{v+1} B_{m-v} (-1)^{m-v} ((n^{v+1} - r_{v+1}) \ln n - p_{v+1,n-1} + p_{v+1,-1})\,.$

5.4 Definition (Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante A_m)

Sei $\quad m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}$

und $\quad A_m := \lim_{n\to\infty} M_n(m) \cdot e^{-p_m(n)}$

mit $\quad p_0(n) := (n + \frac{1}{2}) \ln n - n$

und $\quad p_m(n) := \left(\frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{B_{m+1}}{m+1} \right) \ln n - \frac{n^{m+1}}{(m+1)^2} +$

$$+ \frac{1}{m+1} \sum_{v=1}^{m-1} \binom{m+1}{v+1} B_{v+1} n^{m-v} (\ln n + H_m - H_{m-v}) \ \text{ für } m > 0\,.$$

Anmerkung:
In der Literatur wird A_1 als Glaisher-Kinkelin-Konstante A, gelegentlich auch als Glaisher-Kinkelin-Bendersky-Konstante, bezeichnet und A_m als ihre Verallgemeinerung, vgl. [13, Seite 136f, 2.15.1]. Der ursprüngliche Ansatz für die Definition von A ist in [15, Seite 44, §3, (4)] nachzulesen.

5.5 Satz („Q-A-Produktgleichung Typ I“ – für Konstanten)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \ln A_{m,n} = \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}(r_v + \ln Q_{v+1}) \tag{5.2}$$

(2) (a) $p_m^*(n) = p_m(n)$ bzw. $\ln A_{m,n} = \ln M_n(m) - p_m(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $$A_m = \lim_{n\to\infty} A_{m,n} \qquad \text{(„}Q\text{-}A\text{-Produktgleichung Typ I“)} \tag{5.3}$$

(3) Umkehrung der Q-A-Produktgleichung Typ I :

$$\ln Q_m = -r_{m-1} + \sum_{v=0}^{m-1}\binom{m}{v}(-1)^{m-1-v}\ln A_v$$

Beweis von (1):
Für $x := 1$ und $w := n-1$ in der Gleichung (5.1) und mit $\ln \frac{M_n(v;1)}{M_{n-1}(v)} = n^v \ln n$ folgt

$$\ln M_n(m) = \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}(n^{v+1}\ln n - p_{v+1,n-1} - r_{v+1}\ln(n-1) + \ln Q_{v+1,n-1})\,.$$

Also ist wegen Definition 5.3 und Satz. 4.2 (7) nun

$$\begin{aligned}
\ln A_{m,n} &= \ln M_n(m) - p_m^*(n)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}(n^{v+1}\ln n - p_{v+1,n-1} - r_{v+1}\ln(n-1) + \ln Q_{v+1,n-1})\\
&\quad - \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}((n^{v+1} - r_{v+1})\ln n - p_{v+1,n-1} + p_{v+1,-1})\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}\left(-r_{v+1}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + r_v + \ln Q_{v+1,n-1}\right)\;.
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung.

Beweis von (2) für $m = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ getrennt:
(i) $m = 0$: Es ist $p_0^*(n) \equiv p_0(n)$ und daher $\lim_{n\to\infty} A_{0,n} = A_0$.
(ii) $m \in \mathbb{N}$:
Die Differenz $\ln A_{m,n} - (\ln M_n(m) - p_m(n)) =: -r(n)$ ist beschränkt, da $\lim_{n\to\infty} |\ln A_{m,n}| < \infty$ wegen der Gleichung (5.2) und $\lim_{n\to\infty} |\ln M_n(m) - p_m(n)| < \infty$ mit dem Literaturhinweis in Definition 5.4 gilt. Außerdem hat sie als Term die Form $p(n)n\ln n + q(n)n + b_1 \ln n$ in Anlehnung an Term (4.9) und die in Lemma 4.4 definierte Folge (x_n) ist hier mit $x_n := n$ gegeben. Damit lässt sich die Bedingung (4.10) als Grenzwertgleichung $f(x_n) = 0$ wie folgt aufbauen:

$$p(n) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{1}{m+1}\sum_{v=1}^{m-1}\binom{m+1}{v+1}B_{v+1}n^{m-v} - \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}n^{v+1}\,,$$

$$\begin{aligned}
q(n) &= -\frac{n^{m+1}}{(m+1)^2} + \frac{1}{m+1}\sum_{v=1}^{m-1}\binom{m+1}{v+1}B_{v+1}n^{m-v}(H_m - H_{m-v})\\
&\quad + \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}(p_{v+1,n-1} - p_{v+1,-1})\,,
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{B_{m+1}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-1)^{m-v}r_{v+1}$$

Da mit Lemma 4.4 nun $p(n) = 0$, $q(n) = 0$ und $b_1 = 0$ gilt, womit auch Lemma 4.4 (3) (a) erfüllt ist, folgt sogleich $r(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher die Behauptung (2)(a). Mit der Definition 5.4 folgt für $n \to \infty$ die Behauptung (2)(b).

Beweis von (3):
Das Setzen von $a_m := (-1)^m \ln A_m$ und $b_{m-1} := (-1)^{m-1}(r_{m-1} + \ln Q_m)$ in Lemma 3.4 ergibt für $m \in \mathbb{N}$ die Behauptung. Der Trivialfall $m = 0$ kann durch die Definition $r_{-1} := -p_{0,-1} = 0$ ergänzt werden. □

Anmerkung:
Es ist $M_n(m) \simeq A_m e^{p_m(n)}$ eine Verallgemeinerung der Stirling-Formel $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.
$p_m(n)$ ist über die Euler-Maclaurin-Formel herleitbar.

5.6 Satz (Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante mit geradem Index)

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\zeta(2k+1) = (-1)^{k-1} 2 \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \ln A_{2k}$$

Vgl. [9, Seite 520, (2.12) und (2.13)] und [4, Seite 475, (12)] .

Beweis:
Die Q-A-Produktgleichung Typ I, d. h. die Gleichungen (5.2) und (5.3), mit $r_v = \frac{(-1)^v}{v+1}$ und $m := 2k$ ergibt

$$\begin{aligned}
\ln A_{2k} &= \frac{1}{2k+1} \sum_{v=0}^{2k} \binom{2k+1}{v+1} B_{2k-v} (-1)^{2k-v} (r_v + \ln Q_{v+1}) \\
&= \frac{1}{2k+1} \sum_{v=0}^{2k} \binom{2k+1}{v+1} B_{2k-v} (\frac{1}{v+1} + (-1)^v \ln Q_{v+1})
\end{aligned}$$

und die Gleichung (4.17) verlängert sich daher zu

$$\frac{\zeta(2k+1)(2k)!}{(-1)^k (2\pi)^{2k}} = -\frac{2}{2k+1} \sum_{v=0}^{2k} \binom{2k+1}{v+1} B_{2k-v} (\frac{1}{v+1} + (-1)^v \ln Q_{v+1}) = -2 \ln A_{2k} \,.$$

Die Umstellung nach $\zeta(2k+1)$ ergibt die Behauptung. □

Anmerkung:
Der Zusammenhang zwischen der Ableitung der analytischen Erweiterung der Riemannschen Zeta-Funktion über deren Funktionalgleichung mit der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante ist $\zeta'(-m) + \ln A_m = \frac{B_{m+1} H_m}{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}_0$, vgl. [9, Seite 520, (2.10)]. Die Ableitung dieser Funktionalgleichung liefert außerdem $\zeta(2m+1) = (-1)^m \frac{2^{2m+1}\pi^{2m}}{(2m)!} \zeta'(-2m)$ für $m \in \mathbb{N}$.

5.7 Definition (A_m-Funktion)

In Anlehnung an die Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante A_m sei

$$A_m(x) := \exp\left(\frac{1}{x(m+1)} \sum_{v=0}^{m} \binom{m+1}{v+1} B_{m-v} (-x)^{m-v} (r_v(x) + \ln Q_{v+1}(x)) \right)$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Anmerkung:
Es ist $A_m(1) \equiv A_{m,n}|_{n\to\infty} = A_m$ und $\frac{\ln A_m(x)}{(-x)^m}|_{x=0} = \int_0^1\int_0^1 B_m(xt)\,dt\,dx$.
Die Erweiterung von $x \in (-1,1]$ auf $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ kann z. B. über Satz 4.5 erfolgen.

5.8 Satz („Q-A-Produktgleichung Typ II“ – variabel)

Sei $x, w_1 \in \mathbb{N}$, $w_2 \in \mathbb{Z}$ und $m, w_2 + x \in \mathbb{N}_0$.
Eine Produktgleichung für $A_m(x)$ und $Q_m(t)$ mit $t \in \mathbb{Q}$ ist

$$\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2+x-j)^{m-v}\left(\ln A_v - \ln Q_v\left(\frac{w_2+x-j}{w_1}\right)\right) =$$

$$= \ln A_m(x) - \ln M_{w_2}(m;x) + \frac{1}{x(m+1)}\sum_{v=0}^{m}\binom{m+1}{v+1}B_{m-v}(-x)^{m-v}\mu_{v+1,w_1,w_2}(x) \tag{5.4}$$

mit $\mu_{k,w_1,w_2}(x)|_{k\in\mathbb{N}} :=$

$$-\,p_{k,w_2}(x) + p_{k,-1}(x) - r_k(x)\ln w_1 + (\ln w_1 + H_k)\sum_{j=1}^{x}(w_2+j)^k - \ln M_x(k)\,.$$

Der **Beweis** ist in **3** Schritte unterteilt.

1. Entwicklung von $\ln M_{w_1n+w_2}(m)$ *mit* Summation nach w_1:

$$\ln M_{w_1n+w_2}(m) = \sum_{k=1}^{w_1n+w_2}k^m\ln k = \sum_{k=1}^{w_2}k^m\ln k + \sum_{j=0}^{w_1-1}\sum_{k=1}^{n}(w_1k+w_2-j)^m\ln(w_1k+w_2-j)$$

$$= \ln M_{w_2}(m) + \sum_{j=0}^{w_1-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(w_1k)^v(w_2-j)^{m-v}\right)\left(\ln w_1 + \ln k + \ln\left(1+\frac{w_2-j}{w_1k}\right)\right)$$

$$= \ln M_{w_2}(m) + (\ln w_1)\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\sum_{k=1}^{n}k^v$$

$$+ \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\sum_{k=1}^{n}k^v\ln\left(1+\frac{w_2-j}{w_1k}\right) + \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\sum_{k=1}^{n}k^v\ln k$$

$$= \ln M_{w_2}(m) + (\ln w_1)\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\sum_{k=1}^{n}k^v$$

$$+ \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\left(p_{v,n}\left(\frac{w_2-j}{w_1}\right) + r_v\left(\frac{w_2-j}{w_1}\right)\ln n - \ln Q_{v,n}\left(\frac{w_2-j}{w_1}\right)\right)$$

$$+ \sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v(\ln M_n(v))\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{n}\,p_{v,n}\left(\frac{w_2-j}{w_1}\right) \in \mathbb{R}[n]$$

Sei nun w_2 durch $w_2 + x$ ersetzt, d. h. *keine* Trennung von w_2 und x. Des Weiteren wird $\sum_{k=1}^n k^v$ durch $\frac{B_{v+1}(n+1)-B_{v+1}(1)}{v+1}$, vgl. Korollar 3.3 (5), und $\ln M_n(v)$ durch $p_v(n) + \ln A_{v,n}$, vgl. Satz 5.5 (2) (a), ersetzt. $p_v(n)$ ist strukturiert wie Term (4.9) *ohne* beschränktem Anteil und es ist $\frac{1}{n}\frac{B_{v+1}(n+1)-B_{v+1}(1)}{v+1} \in \mathbb{R}[n]$.

2. Die Entwicklung von $\ln M_{w_1n+w_2+x}(m)$ *ohne* Summation nach w_1 und *mit* Trennung von w_2 und x erfolgt über die Gleichung (5.1). Zu diesem Zweck wird einerseits zu dieser Gleichung beidseitig $\ln M_x(m)$ addiert, andererseits der Term $\ln\frac{M_{w+x}(k)}{M_w(k)}$, vgl. $\ln\frac{M_w(k;x)}{M_w(k)}$ von $\mu_{k,w}(x)$ in Satz 5.2, mit $w := w_1 n + w_2$ wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{M_{w_1 n + w_2 + x}(k)}{M_{w_1 n + w_2}(k)} &= \sum_{l=1}^{x} (w_1 n + w_2 + l)^k \ln(w_1 n + w_2 + l) \\
&= \sum_{l=1}^{x} (w_1 n + w_2 + l)^k \left(\ln w_1 + \ln n + \ln \left(1 + \frac{w_2 + l}{w_1 n} \right) \right) \\
&= (\ln w_1 + \ln n) \sum_{l=1}^{x} (w_1 n + w_2 + l)^k + \sum_{l=1}^{x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (w_2 + l)^{k-j} w_1^j n^j \ln \left(1 + \frac{w_2 + l}{w_1 n} \right)
\end{aligned}$$

Die Differenz $\ln Q_{j,n}(x) - \ln Q_{j,n-1}(x)$ bezogen auf die Gleichung (4.1) ergibt mit $n > 1$ nun

$$n^j \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = p_{j,n}(x) - p_{j,n-1}(x) - r_j(x) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln Q_{j,n}(x) + \ln Q_{j,n-1}(x),$$

wobei zu beachten ist, dass $\frac{p_{j,n}(x) - p_{j,n-1}(x) + p_{j,-1}(x)}{n} \in \mathbb{R}[n]$ gilt.

3. Mit dem 1. und 2. Schritt liegen nun zwei Gleichungen für $\ln M_{w_1 n + w_2 + x}(m)$ vor, die durch Zusammenfügen und Umstellung eine Gleichung analog zum Term (4.9) und der Bedingung (4.10) mit $x_n := n$ ergibt. Auf Grund des Umfangs sei hier auf die Darstellung von $p(n)$, $q(n)$, a_k und b_k verzichtet und lediglich der relevante Teil $r(n)$ wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
r(n) = \ln M_{w_2+x}(m) &+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v \sum_{j=0}^{w_1 - 1} (w_2 + x - j)^{m-v} \left(-\ln Q_{v,n} \left(\frac{w_2 + x - j}{w_1} \right) \right) \\
&+ \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} w_1^v (\ln A_{v,n}) \sum_{j=0}^{w_1 - 1} (w_2 + x - j)^{m-v} \\
&- \ln M_x(m) - \frac{1}{x(m+1)} \sum_{v=0}^{m} \binom{m+1}{v+1} B_{m-v} (-x)^{m-v} \mu_{v+1, w_1, w_2, n}(x)
\end{aligned}$$

mit $\quad \mu_{k,w_1,w_2,n}(x)|_{k \in \mathbb{N}} := -\ln M_x(k) - p_{k,w_2}(x) - r_k(x) \ln \left(w_1 + \frac{w_2}{n} \right) + \ln Q_{k, w_1 n + w_2}(x)$

$$+ (\ln w_1) \sum_{l=1}^{x} (w_2 + l)^k + \sum_{l=1}^{x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (w_2 + l)^{k-j} w_1^j \eta_{j,n}(\frac{w_2 + l}{w_1})$$

und $\quad \eta_{j,n}(x) := -p_{j,-1}(x) - r_j(x) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \ln Q_{j,n}(x) + \ln Q_{j,n-1}(x)\,,$

d. h. $\quad \lim_{n \to \infty} \eta_{j,n}(x) = -p_{j,-1}(x)$

Interessanterweise verschwindet w_1 in der letzten Summe von $\mu_{v+1,w_1,w_2,n}(x)$ für $n \to \infty$, denn es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (w_2 + l)^{k-j} w_1^j \left(-p_{j,-1} \left(\frac{w_2 + l}{w_1} \right) \right) &= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (w_2 + l)^{k-j} w_1^j \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{w_2 + l}{w_1} \right)^j \\
&= (w_2 + l)^k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = (w_2 + l)^k H_k\,,
\end{aligned}$$

so dass mit $\lim_{n \to \infty} r(n) = 0$, vgl. Lemma 4.4 (3), die Behauptung folgt. □

Anmerkung 1:

Sei $(x + w_3; w_2 - w_3)$, $w_3 \in \mathbb{Z}$, an Stelle von $(x; w_2)$ in der Gleichung (5.4) gesetzt. Von dieser

Gleichung nun die Gleichung (5.4) subtrahiert ergibt eine Beziehung zwischen $A_m(x+w_3)$ und $A_m(x)$ ohne die Funktionen $Q_v(x)$ und den Konstanten A_v.

Anmerkung 2:
Da $M_x(k)$ und $\sum_{j=1}^{x}(w_2+j)^k$ als holomorphe Funktionen bzgl. x formuliert werden können, ist die Gleichung (5.4) exponenziert und in polstellenfreier Darstellung auf $x \in \mathbb{C}$ erweiterbar; der Beweis hierfür sprengt aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Als eine Konsequenz der Erweiterung kann mit $x \to 0 \pm 0$ und in Abhängigkeit der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante eine Formel für $\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}w_1^v\sum_{j=0}^{w_1-1}(w_2-j)^{m-v}\ln Q_v(\frac{w_2-j}{w_1})$ erstellt werden, die eingesetzt in die Produktgleichung (4.11) zu einer Verallgemeinerung der Gaußschen Multiplikationsformel führt.

Als Beispiel sei mit $(m;w_2) := (0;0)$ die Gaußsche Multiplikationsformel selbst erwähnt, denn wird $\sum_{j=1}^{x} j$ durch $\frac{x(x+1)}{2}$ ersetzt, $\ln M_x(1) := -x\ln A_0 + \frac{x(x+1)}{2} + x\ln Q_0(x) + \ln Q_1(x)$ mit $A_0 = \sqrt{2\pi}$ (s. Korollar 5.9) definiert und $\ln A_0(0) = 1$, siehe Anmerkung zu Definition 5.7, berücksichtigt, so existieren alle Grenzwerte in der Gleichung (5.4) für $x \to 0$. Zugleich wird die Multiplikationsformel in Anmerkung 2 zu Satz 4.5 erneut verifiziert. Erwähnt sei noch der Zusammenhang von $M_x(1)$ mit der Multiplen Gammafunktion $G_n(z)$ in [9], denn mit der o. g. Definition von $\ln M_x(1)$ gilt $M_x(1)G_2(x+1) \equiv Q_0^x(x)$, siehe Anmerkung 1 zu Satz 4.5 .

5.9 Korollar (Ergänzung zur Apéry-Konstante in Korollar 4.11)

Im Gegensatz zu Beispiel (5) von Korollar 4.11 können die Konstanten $Q_1(\pm\frac{1}{2})$ mit der Gleichung (5.4) explizit durch die Glaisher-Kinkelin-Konstante ausgedrückt und hieraus ebenso $\frac{Q_1(\frac{1}{2})}{Q_1(-\frac{1}{2})}$ berechnet werden. Sei $(x;w_1) := (1;2)$ gesetzt. Die Parameter m und w_2 werden variiert und dies ergibt folgende einfache Zusammenhänge:

m	w_2	Ergebnis
0	-1	$A_0 = \sqrt{2\pi}$
1	-1	$Q_1(-\frac{1}{2}) = A_1^{\frac{3}{2}} 2^{-\frac{7}{24}}$
1	0	$Q_1(\frac{1}{2}) = A_1^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{5}{24}} e^{-\frac{1}{2}}$

Beweis:
Die Konstantengleichungen in der Spalte „Ergebnis“ ergeben sich durch das Einsetzen der Werte für die Variablen x, w_1, w_2, m und ausschließlich elementaren Umformungen. □

Anmerkung 1:
Ein zu $Q_1(-\frac{1}{2})$ äquivalentes Ergebnis ist [9, Seite 521, (3.5)] wegen [9, Seite 517, (1.7), $G_2(z) = G(z)$] und der Anmerkung 1 zu Satz 4.5 mit $Q_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}$, vgl. Satz 5.5 (3) für $m := 1$.

Anmerkung 2:
Glaisher verwendete für die Konstante A (siehe Anmerkung zu Definition 5.4) als erste Berechnungsformel [15, Seite 46, §4, (7)]. Dies entspricht der Gleichung

$$A = 2^{\frac{1}{36}}\pi^{\frac{1}{6}}Q_1^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)Q_1^{-\frac{1}{3}}$$

unter Berücksichtigung der Reihenentwicklungen für $\ln Q_1$ und $\ln Q_1(\frac{1}{2})$ mittels Gleichung (4.2) .

6 Zusammenfassung und Ausblick

Anlass für die Q_m-Funktion

Mit der Aufteilung der Gleichung (3.6) für $x \uparrow 1$ in Real- und Imaginärteil ist ersichtlich, dass die Anzahl der Reihenglieder für die Formel von $\zeta(2k)$ von der Anzahl der Bernoulli-Zahlen mit ungeradem Index, die einen Wert ungleich 0 haben (d. h. die Anzahl ist 1) und die Anzahl der Reihenglieder für die Formel von $\zeta(2k+1)$ von der Anzahl der Bernoulli-Zahlen mit geradem Index, die einen Wert ungleich 0 haben (d. h. die Anzahl ist unendlich), abhängt. Letzteres war die Motivation für die Definition einer Verallgemeinerung der Gammafunktion, die in dieser Arbeit als Q_m-Funktion bezeichnet wird.

Zielerreichung

Über ein Lineares Gleichungssystem konnten die Periodischen Dirichlet-Reihen auf die Linearkombination von Lerch-Hurwitz Periodische Zeta-Funktionen, hier LH-Reihen genannt, zurückgeführt werden (Kap. 2). Diese Reihen lassen sich mit der Riemannschen Zeta-Funktion und der Verallgemeinerung der Logarithmischen Sinusreihe, hier: $\ln Q_m(-x) + (-1)^m \ln Q_m(x)$, darstellen und daher auch die o. g. Dirichlet-Reihen (Kap. 3 und 4). Ein Teil dieser Reihen lässt sich mit der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante ausdrücken (Kap. 5).

Ein wesentlicher Unterschied zu einer einfachen Reihenumstellung, wie sie z. B. durch $f(x) := \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ und somit bei Vertauschbarkeit der Summationsreihenfolge $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta(k)$ erreicht wird, ist, dass die o. g. Verallgemeinerung der Logarithmischen Sinusreihe die Riemannsche Zeta-Funktion nur an den geraden natürlichen Stellen und somit nur mit rationalen Zahlen multiplizierte Potenzen von π verwendet.

Literaturbezug

Der Bezug zur Literatur erfolgte mit der Definition der Digamma-Funktion, mit dem Hinweis auf Zeta Regularisierte Produkte, mit der Formelbildung für $\zeta(2k+1)$ über die Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante und mit bekannten Beispielen der Periodischen Dirichlet-Reihe.

Verwendbarkeit der Q_m-Funktion

Der Definitionsbereich der Q_m-Funktion kann unter Beibehaltung der Produktdarstellung für $Q_{m,n}(x)$ und $Q_m(x) := \lim_{n\to\infty} Q_{m,n}(x)$ mit Hilfe des Weierstraßschen Produktsatzes für $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ erweitert werden, siehe Anmerkung 5 zu Satz 4.2 . Eine besonders einfache Anwendung ist $(m; w_1; w_2; x) := (0; 2; 0; i\sqrt{3})$ eingesetzt in die Q-Produktgleichung (4.11) und der Addition des konjugiert Komplexen dieser Gleichung, so dass als bekanntes Ergebnis

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}\right)$$

folgt. Ergänzend sei noch erwähnt, dass mit der Anwendung von Lemma 3.4 auf Korollar 4.9 und der verkürzten Form der Gleichung (4.12) für $w := 1$, wie sie im Beweis (2) von Satz 4.6 zu finden ist, sich eine allgemeine Beziehung zwischen $Q_m Q_m(e^{i\frac{2\pi}{3}}) Q_m(e^{i\frac{4\pi}{3}})$ und $Q_m^* Q_m^*(e^{i\frac{\pi}{3}}) Q_m^*(e^{i\frac{5\pi}{3}})$ herstellen lässt. Die einfachsten Beispiele mit $m \in \{0, 1, 2\}$ in etwas modifizierter Form sind:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = 3 \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right) \quad , \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right)^{k-1} = 3 \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)^{k} \quad ,$$

$$e^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right)^{(k-1)^2} = 3 \lim_{n\to\infty} n \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)^{k^2}$$

Der erweiterte Definitionsbereich ermöglicht es, eine Vielzahl an Funktionen in Termen aus der Q_m-Funktion darzustellen: Vignéras Multiple Gammafunktion wie z. B. die Barnessche G-Funktion, die Clausen-Funktion und die Hurwitzsche Zeta-Funktion jeweils mit natürlichen Potenzen im Nenner, verschiedene alternierende Q_m-ähnliche Produkte wie z. B. die Borwein-Dykshoorn-Funktion und das Produkt $\lim_{n\to\infty} e^{\tilde{p}_{m,n}(z)} n^{\tilde{r}_m(z)} \prod_{k=1}^{n} \left(1-(-1)^k \frac{z}{k}\right)^{-k^m}$, die Periodische Dirichlet-Reihe mit natürlichen Potenzen im Nenner, modifizierte Formen der Riemannschen Zeta-Funktion wie z. B. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v!}{v^m Q_0(v+x)}$, bestimmte Produkte wie die Multiple Sinusfunktion, die Q_m-Funktion erweiternde Produkte wie z. B. $\lim_{n\to\infty} e^{p_{m,n}(x;y)} n^{r_m(x;y)} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}+\frac{y}{k^2}\right)^{-k^m}$, und nicht zuletzt das Integral $\int_0^x t^m \ln\sin t\,dt$, das bereits von Euler diskutiert worden war.

Des Weiteren ist es möglich, mit den Funktionswerten der Q_m-Funktion sehr viele Konstanten zueinander in Bezug zu stellen, wie es mit den Korollaren 4.11, 5.6 und 5.9 allerdings nur angedeutet werden konnte. Hilfreich sind hier die Formeln für $Q_m(x)$, z. B. die Sätze 4.5 und 4.6 . Neben Reihen und Produkte sind als Konstanten auch bestimmte Integrale gemeint, z. B. $\int_0^\infty (\frac{t}{e^t-1})^m\,dt$. Darüber hinaus lassen sich viele Produkte, die auf der Q_m-Funktion basieren, mit Hilfe der Gleichung (5.4), die die Q_m-Funktion mit rationalen Argumenten mit einer erweiterten Form der Verallgemeinerten Glaisher-Kinkelin-Konstante verbindet und gemäß der Anmerkung 2 zu Satz 5.8 auf die komplexen Zahlen erweiterbar ist, entweder vollständig durch die Verallgemeinerte Glaisher-Kinkelin-Konstante oder (meist) in Verbindung mit der Q_m-Funktion vereinfacht ausdrücken. Als Beispiel sei hier die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^m} a_{k \bmod p}$ für $m\in\mathbb{N}$ mit p-periodischer Koeffizientenfolge genannt, deren Beispiele in [16, Seite 1 bis 16] und [17, Seite 21 und 26] auf der Formel in [16, Seite 3, §6] bzw. in [17, Seite 25, 64.-66.] bzw. auf

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \sin(2\pi kx) = \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{Q_0(x-1)}{Q_0(-x)} - (1-2x)(\gamma+\ln(2\pi))\right)$$

mit $0<x<1$ beruhen. Für die m-fache Integration mit $0\le x<1$ für $m\in\mathbb{N}$ sei unter Berücksichtigung von $Q_0(x)=x\,Q_0(x-1)$ auf die Anmerkung 1 zu Satz 4.2 verwiesen.

Eigenschaften der LH-Reihe $E_s(z)$ und folglich auch der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^m} e^{i2\pi kx} = \frac{d}{ds}E_s(x)|_{s:=m}$ mit $m\in\mathbb{N}$ sind in der Literatur über die Lerchsche Zeta-Funktion und dem Polylogarithmus nachzulesen.

Grenzwertgleichung

Das verbindende Element zwischen der Grenzwertgleichung und der Ableitung der Riemannschen Zeta-Funktion ist die Verallgemeinerte Hyperfakultät, womit die Verwendbarkeit der Grenzwertgleichung begründet werden kann. Ihre Effektivität verdankt sie der Eigenschaft als Katalysator, weil nur noch der beschränkte Term $r(x)$ berücksichtigt werden muss.

Außerdem lässt sich die Grenzwertgleichung unbegrenzt erweitern und ergänzt die Zeta Regularisierten Produkte insofern sinnvoll, als dass auch für Verallgemeinerungen der Q_m-Funktion, z. B. für konvergente Produkte der Form $\lim_{n\to\infty} e^{p_{a,b,n}(z)} n^{r_{a,b}(z)} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k^b}\right)^{-k^a}$, Eigenschaften und Werte ermittelt werden können, ohne zuvor auf die Ableitung der analytisch fortgesetzten Riemannschen Zeta-Funktion zurückgreifen zu müssen, und sie daher als arbeitserleichternde Methode einsetzbar ist.

7 Literaturverzeichnis

[1] R. Ayoub
Euler and the Zeta function
American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10 (Dec., 1974), pp. 1067-1086
Text im Internet:
`http://www.math.wvu.edu/~mays/745/Euler%20and%20the%20zeta%20function.pdf`

[2] R. Remmert, G. Schumacher
Funktionentheorie 2, Springer Verlag, 3. neu bearbeitete Auflage (2007)

[3] J. R. Quine, S. H. Heydari and R. Y. Song
Zeta Regularized Products
Transactions of the american mathematical society, Volume 338, Number 1, July 1993
Text im Internet:
`http://www.ncatlab.org/nlab/files/QuineZetaRegularization.pdf`

[4] N. Kurokawa and M. Wakayama
Zeta Regularized Product Expressions for Multiple Trigonometric Functions
Tokyo Institute of Technology and Kyushu University,
Tokyo J. Math. Vol. 27, No. 2, 2004
Text im Internet:
`http://projecteuclid.org/euclid.tjm/1244208402`

[5] R. E. Crandall
Reed's Center for Advanced Computation, March 26, 2012
Online(At)Perfscipress.Com/algorithmic-reflections-selected-works
Text im Internet:
`http://www.marvinrayburns.com/UniversalTOC25.pdf`

[6] A. Zern
Bernoullipolynome und Bernoullizahlen
Ausarbeitung zum Vortrag im Proseminar Analysis an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg im Sommersemester 2009 unter der Leitung von Prof. Dr. Eberhard Freitag.
Text im Internet:
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~theiders/PS-Analysis/Bernoullische_Polynome.pdf`

[7] C. Kanzow (Universität Würzburg)
Analysis II, SS 2011
Satz 9.8 *(Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz)*
Text im Internet:
`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis2/Kapitel9.pdf`

[8] L. Tizzano and J. Winding
Multiple Sine, Multiple Elliptic Gamma Functions and Rational Cones
Cornell University Library, Report number: UUITP-22/14 (19. Dec 2014)
Text im Internet:
`http://arxiv.org/pdf/1502.05996v1.pdf`

[9] J. Choi, H.M. Srivastava, V.S. Adamchik
Multiple Gamma and related functions
Applied Mathematics and Computation 134 (2003) 515–533

[10] H.M. Srivastava, M. L. Glasser, V.S. Adamchik
Some Definite Integrals Associated with the Riemann Zeta Function (2000)
Carnegie Mellon University, Research Showcase @ CMU, Computer Science Department
Text im Internet:
`http://repository.cmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1092&context=compsci&sei-redir=1&referer=http%3A%2F%2Fscholar.google.de%2Fscholar%3Fq%3DSome%2BDefinite%2BIntegrals%2BAssociated%2Bwith%2Bthe%2BRiemann%2BZeta%2BFunction%26btnG%3D%26hl%3Dde%26as_sdt%3D0%252C5%26as_vis%3D1#search=%22Some%20Definite%20Integrals%20Associated%20Riemann%20Zeta%20Function%22`

[11] N. Kurokawa
Multiple Sine Functions and Selberg Zeta Functions
Proc. Japan Acad., 67, Ser. A (1991)
Text im Internet:
`http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195512182`

[12] S.-Y. Koyama and N. Kurokawa
Zeta functions and normalized multiple sine functions
Kodai Math. J. 28 (2005), 534–550
Text im Internet:
`https://projecteuclid.org/euclid.kmj/1134397767`

[13] S. R. Finch
Mathematical Constants (2003)
Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 94, Cambridge University Press

[14] S.-Y. Koyama and N. Kurokawa
Euler's Integrals and Multiple Sine Functions (2004)
Proceedings of the American Mathematical Society
Volume 133, Number 5, Pages 1257–1265, S 0002-9939(04)07863-3
Text im Internet:
`http://www.ams.org/journals/proc/2005-133-05/S0002-9939-04-07863-3/S0002-9939-04-07863-3.pdf`

[15] J. W. L. Glaisher
On the product $1^1 2^2 3^3 ... n^n$.
The Messenger of Mathematics., Vol. VII, 1878
Text im Internet:
`http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN599484047_0007&DMDID=DMDLOG_0013`

[16] J. W. L. Glaisher
On the constant which occurs in the formula for $1^1 2^2 3^3 ... n^n$.
The Messenger of Mathematics., Vol. XXIV, 1895
Text im Internet:
`http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN599484047_0024&DMDID=DMDLOG_0003`

[17] C. J. Malmstén
De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis. (Upsaliae D. 1. Maji 1846.)
Journal für Mathematk, Bd. 38, 1-39, (1849).
Text im Internet:
`http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0038&DMDID=DMDLOG_0004`
Übersetzung im Internet von A. Aycock (2013):
`http://arxiv.org/pdf/1309.3824.pdf`