Bachelorarbeit im Lehrgebiet Analysis

Differenzial- und Integralrechnung auf Netzwerken

vorgelegt von

Eric Schmiedel

am 16.01.2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo
Zweitgutachterin: Dr. Hafida Laasri

Fakultät für Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Erklärung

Name:	Eric Schmiedel
Matrikel-Nr.:	9394184
Fach:	Mathematik
Modul:	Bachelorarbeit

ich erkläre, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Thema

Differenzial- und Integralrechnung auf Netzwerken

selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum:____________________ **Unterschrift:**______________________________

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Differenzial- und Integralrechnung der eindimensionalen reellen Analysis gehört zur Grundausbildung eines jeden Mathematikers und sind die Basis einer Fülle an Sätzen der Mathematik. Diese Aussagen wurden im Verlauf der Geschichte der Mathematik vielfach aufgenommen, erweitert und perfektioniert.
Wir wollen diese Ergebnisse nun aufgreifen und aus einem neuen Licht betrachten: Nämlich nicht mehr nur einfach auf reellen Intervallen, sondern bildlich gesprochen auf Sammlungen solcher Intervalle, die an ihren Enden „zusammengeklebt" wurden, auf sogenannten Netzwerken.
Mit der Frage, was für Voraussetzungen man für ein Netzwerk braucht und wie sich der unbedarft anmutende Begriff des „Zusammenklebens" mathematisch sinnvoller ausdrücken lässt, sowie welche Ergebnisse der Analysis und Linearen Algebra im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung benötigt werden, befassen sich die im Anschluss an diese Einführung folgenden Grundlagen.
Aufbauend auf diesen klären wir, was ein Netzwerk genau ist, definieren Funktionen auf Netzwerken und erarbeiten uns eine geeignete Metrik, sowie einen brauchbaren Raum für unsere Überlegungen.

Ist dies alles getan geht es beginnend mit der Einführung von Stetigkeit an den eigentlichen Hauptteil dieser Arbeit. Nachdem wir geklärt haben, wie wir uns Differenzierbarkeit auf Netzwerken vorstellen, machen wir uns daran eines der wichtigsten Ergebnisse unserer Ausarbeitung zu erarbeiten: Den Satz von Rolle auf Netzwerken.
Dieser Satz wird einiges an Zeit beanspruchen, die es jedoch wert sein wird, da wir letztlich zwei Ergebnisse beweisen können, die eine gut brauchbare Version des Satzes von Rolle auf Netzwerken sein wird.
Schließlich beenden wir das Kapitel über Differenzierbarkeit mit der Betrachtung des Mittelwertsatzes, für den wir mit etwas weniger Aufwand ebenfalls zwei brauchbare Ergebnisse finden können.

Das Ende der Arbeit bildet die Betrachtung der Integrierbarkeit auf Netzwerken. Auch hier wollen wir zuerst klären, was eine integrierbare Funktion auf Netzwerken überhaupt ist und beweisen daraufhin eine bekannte Klasse integrierbarer Funktionen auf Netzwerken: Die stetigen Funktionen.
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung, sowie der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, die beide nicht so aufwendig sind wie die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt, bilden dann schließlich das Ende unserer Ausführungen.

2 Grundlagen

Um die in dieser Arbeit thematisierte Differenzial- und Integralrechnung auf Netzwerken behandeln zu können, muss als erstes ein grober Rahmen über das nötige mathematische Handwerk abgesteckt werden. Dies soll in diesem Kapitel geschehen.
Welches Ziel die einzelnen Grundlagen erfüllen sei hier kurz abgesteckt:

1. Grundlagen der Analysis:
   In den Grundkursen des Mathematikstudiums wird Differenzial- und Integralrechnung in der Regel auf reellen und komplexen Räumen betrieben. Ein solcher Raum liegt jedoch bei Netzwerken nicht vor. Aus diesem Grund soll hier allgemein ein brauchbarer Raum und zugehörige Sätze vorgestellt werden, auf denen wir dann im späteren Verlauf konkret unsere Überlegungen aufbauen.

2. Grundlagen der Linearen Algebra:
   Hier werden schlicht relativ kurz einige wichtige Ergebnisse des genannten mathematischen Teilgebietes vorgestellt, welche im Kapitel 5 benötigt werden.

3. Grundlagen der Graphentheorie:
   Dieser Punkt leitet direkt in die eigentliche Arbeit und legt das Fundament für Kapitel 3, in dem dann Netzwerke definiert werden.

2.1 Grundlagen der Analysis

Wie bereits erwähnt, können wir in dieser Arbeit nicht einfach auf reellen oder komplexen Räumen arbeiten. Um also Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit definieren zu können, brauchen wir ein allgemeineres Konstrukt. Dies bieten uns die sogenannten topologischen Räume. Eine Einführung dazu findet man zum Beispiel in [1] Abschnitt 2, aus dem wir auch alle unsere folgenden Ergebnisse dieses Abschnitts entnommen haben.
Bevor wir aber die eigentlichen topologischen Räume definieren, brauchen wir noch metrische Räume. Diese wurden auch bereits im Grundkurs Analysis angeschnitten:

2.1.1 Definition (Metrik)**:**
Sei X eine Menge und sei $d : X^2 \to [0, \infty)$ eine Funktion. Dann heißt d eine **Metrik** auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) bezeichnen wir als **metrischen Raum**.

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun allgemein offene Mengen definieren:

2.1.2 Definition (Offene Menge)**:**
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann setzen wir für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Die Menge $U_\varepsilon(x)$ heißt **offene ε-Umgebung** von x.
Entsprechend heißt eine Teilmenge $V \subseteq X$ **offen**, wenn für jedes x aus V ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U_\varepsilon(x)$ nicht leer ist.

Damit können wir nun folgende Definition führen:

2.1.3 Definition (Topologischer Raum)**:**
Sei X eine Menge und sei $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Dann heißt (X, U) ein **topologischer Raum** und U eine **Topologie** auf X, falls gilt:

1. $\emptyset \in U$ und $X \in U$.
2. Für alle $V \subseteq U$ ist $\bigcup V \in U$.
3. Für alle endlichen $V \subseteq U$ ist $\bigcap V \in U$.

Die Elemente von U heißen offen.

Es gibt Sätze, mit denen man topologische Räume erzeugen kann. Das für uns wichtigste Ergebnis ist dabei, dass sich ein topologischer Raum durch eine Metrik erzeugen lässt (wir wollen dies hier nicht ausschweifend aufführen, sondern stattdessen auf [1] Abschnitt 2.4 verweisen, in dem dies näher erläutert wird). Dies ist die Grundlage folgender wichtiger Definition:

2.1.4 Definition (Von einer Metrik erzeugte Topologie)**:**
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$U := \{V \subseteq X \mid V \text{ ist offen in } (X, d)\}.$$

Dann heißt U die **von der Metrik d erzeugte Topologie** auf X.

2.2 Grundlagen der Linearen Algebra

2.2.1 Notation (Einheitsmatrix)**:**
Mit $\mathbb{1}_n$ bezeichnen wir die $\boldsymbol{n \times n}$**-Einheitsmatrix**.

Gemäß [2] Kapitel 17.1 wird die Definitheit einer Matrix folgendermaßen definiert:

2.2.2 Definition (Definitheit)**:**
Sei A eine symmetrische Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Man nennt A

$$\begin{array}{rcl} \textbf{positiv definit} & :\Leftrightarrow & x^t \cdot A \cdot x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \textbf{positiv semidefinit} & :\Leftrightarrow & x^t \cdot A \cdot x \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \textbf{negativ definit} & :\Leftrightarrow & x^t \cdot A \cdot x < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \textbf{negativ semidefinit} & :\Leftrightarrow & x^t \cdot A \cdot x \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \textbf{indefinit} & :\Leftrightarrow & \text{es gibt } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x^t \cdot A \cdot x > 0 \\ & & \text{und } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } y^t \cdot A \cdot y < 0 \end{array}$$

Ein für uns wichtiges Kriterium zur Bestimmung der Definitheit ist das sogenannte Eigenwertkriterium, welches man ebenfalls in [2] Kapitel 17.6 ausgearbeitet und bewiesen findet und hier ohne Beweis aufgeführt sei:

2.2.3 Satz (Eigenwertkriterium)**:**
Eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ ist genau dann

1. **positiv definit**, wenn alle Eigenwerte von A **positiv** sind,
2. **positiv semidefinit**, wenn alle Eigenwerte von A **positiv oder null** sind,
3. **negativ definit**, wenn alle Eigenwerte von A **negativ** sind,
4. **negativ semidefinit**, wenn alle Eigenwerte von A **negativ oder null** sind,
5. **indefinit**, wenn A **positive und negative** Eigenwerte hat.

Zum Schluss der Grundlagen der linearen Algebra sei noch folgende Aussage bewiesen:

2.2.4 Lemma (Eigenwerte von Diagonalmatrizen)**:**
Sei $A := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle Diagonalmatrix, dann sind die Einträge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen die einzigen Eigenwerte dieser Matrix.

Beweis. Nach [3] Kapitel 4.1.1 gilt für $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\lambda \text{ Eigenwert von A } \Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) = 0.$$

Angewandt auf unsere Diagonalmatrix ergibt das die Gleichung

$$(\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = 0.$$

Das heißt, dass λ die Gleichung genau dann erfüllt, wenn $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, womit die Aussage schon bewiesen wäre. $\square$

2.3 Grundlagen der Graphentheorie

Viele der hier genannten Konventionen, wie zum Beispiel das System von Kanten und Ecken, sind bereits aus der linearen Optimierung bekannt und seien hier schlicht noch einmal wiederholt. Jedoch gibt es auch viele andere Ergebnisse der Graphentheorie, die dem Leser eventuell unbekannt sind, wie zum Beispiel Wege oder Teilgraphen. Auch diese werden hier in den Grundlagen aufgeführt und wenn nötig für unsere Anwendungen modifiziert.

Beginnen wir mit der ganz grundlegenden Definition von Graphen, wie man sie (mit eventuellen Abwandlungen) in vielen Lehrbüchern, wie zum Beispiel [4], findet:

2.3.1 Definition (Graphen)**:**
Ein **Graph** $\Gamma = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von **Ecken** oder **Knoten** (englisch „vertices“) und einer Menge E von **Kanten** (englisch „edges“).

Für die in dieser Arbeit betrachteten Graphen werden folgende Definitionen getroffen:

1. Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt **endlicher Graph**, wenn
$$|V|, |E| < \infty.$$
2. Jede Kante $e \in E$ hat zwei Ecken an seinen Endpunkten. Wir schreiben dafür $e = \{v_1, v_2\}$ für $v_1, v_2 \in V$ und meinen damit die Kante mit v_1 und v_2 als Endpunkt.
3. Zwei Kanten $e, \tilde{e} \in E$ heißen **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Ecke haben.
4. Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt **einfach** (oder schlicht), wenn es zwischen je zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$ nicht mehr als eine Kante $e \in E$ gibt mit $e = \{v_1, v_2\}$ und wenn es keine Kante gibt, die an ihren Endpunkten die gleiche Ecke hat.
5. Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt **gerichtet**, wenn jeder Kante $e \in E$ eine Anfangsecke $init(e) \in V$ und eine Endecke $ter(e) \in V$ zugeordnet wird. In diesem Fall heißt die Kante e **von** $init(e)$ **nach** $ter(e)$ **gerichtet**.
Schreiben wir entsprechend unserer Notation bei einem gerichteten Graphen $e = (v_1, v_2) \in E$ für zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$, dann meinen wir damit eine **von** v_1 **nach** v_2 **gerichtete Kante**.
6. Ist ein einfacher Graph $\Gamma = (V, E)$ gerichtet, dann spricht man von einem **orientierten Graphen**.
7. Zwei benachbarte Kanten $e, \tilde{e} \in E$ eines gerichteten Graphen $\Gamma = (V, E)$ heißen **gleichgerichtet**, wenn an ihrer gemeinsamen Ecke $v \in V$
$$\mathrm{init}(e) = v = \mathrm{ter}(\tilde{e}) \quad \text{oder} \quad \mathrm{init}(\tilde{e}) = v = \mathrm{ter}(e)$$
gilt.
8. Ein Graph $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ heißt **Teilgraph** von $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$, wenn $V_1 \subseteq V_2$ und $E_1 \subseteq E_2$ gilt [5].

In dieser Arbeit werden wir im folgenden nur orientierte Graphen behandeln.

Besonders im späteren Verlauf der Arbeit fällt auf, dass die betrachteten Graphen mitunter sehr komplexe Formen annehmen können. Ein Hilfsmittel um dabei die Übersicht zu behalten sind die sogenannten Grade von Ecken, die hier definiert werden sollen. Dabei sei die Quelle aus der der Wortlaut der Aussage entnommen wurde am Ende jedes Unterpunktes genannt:

2.3.2 Definition (Grad einer Ecke)**:**
Sei $\Gamma = (V, E)$ ein orientierter Graph. Für jede Ecke $v \in V$ sei:

1. Der **Eingangsgrad** $id(v)$ von v definiert als die Anzahl der Kanten, die V als Endpunkt haben
$$id(v) := |\{e \in E \mid ter(e) = v\}|. \quad [6]$$

2. Der **Ausgangsgrad** $od(v)$ von v definiert als die Anzahl der Kanten, die V als Anfangspunkt haben
$$od(v) := |\{e \in E \mid init(e) = v\}|. \quad [6]$$

3. Der **Grad** $d(v)$ des Knotens v definiert als die Anzahl der Kanten die v als Anfangs- oder Endecke haben
$$d(v) := |\{e \in E \mid init(e) = v\}| + |\{e \in E \mid ter(e) = v\}|. \quad [7]$$

Eines der wichtigsten Hilfsmittel für unsere Betrachtungen auf Netzwerken sind die sogenannten „Verbindungen“, welche uns ermöglichen werden ein ähnliches Konstrukt wie reelle Intervalle auf Netzwerken zu betrachten. Diese Verbindungen werden wir auf den später näher definierten kontinuierlichen Graphen definieren. Ihr Pendant in der diskreten Graphentheorie sind die sogenannten „Wege“, wie man sie zum Beispiel in [4] findet:

2.3.3 Definition (Weg)**:**
Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$. Man nennt Γ einen **Weg** der Länge n, wenn keine Kante mehrfach durchlaufen wird (also alle Kanten aus E unterschiedlich sind).

Für die so definierten Wege gilt folgende

2.3.4 Definition:
Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Weg mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$:

1. Wir sagen der Graph Γ ist ein **Weg auf dem Graphen** $\tilde{\Gamma} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, wenn Γ ein Teilgraph von $\tilde{\Gamma}$ und ein Weg ist.

2. Wir nennen einen Graphen $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ **zusammenhängend**, wenn es zu zwei beliebigen Ecken $a, b \in V_1$ einen Weg auf Γ gibt, der a als Start- und b als Endpunkt hat.

3 Netzwerke

Da wir nun die Grundlagen für unsere Arbeit soweit abgesteckt haben, können wir uns an den eigentlichen Schwerpunkt dieser Arbeit machen. Hierbei steht als erstes die Definition der maßgeblichen Netzwerke im Vordergrund.
In der Fachliteratur gibt es teils sehr unterschiedliche Definitionen von Netzwerken, teils mit Bedingungen an einen Eingangs- und Ausgangsknoten oder als Gleichsetzung zu sogenannten Quantengraphen geknüpft.
In unserem Fall soll die Basis eines Netzwerks ein orientierter Graph $\Gamma = (V, E)$ sein, der mit Hilfe einer Gewichtsfunktion $\rho : E \to (0, \infty)$, die jeder Kannte $e \in E$ eine positive reelle Zahl zuordnet, zu einem gewichteten Graphen $G = (V, E, \rho)$ erweitert wird.
Ist dies getan, ist es möglich entlang jeder Kante ein reelles Intervall $(0, \rho(e))$ zu definieren, auf denen wir unsere zukünftigen Überlegungen aufbauen werden.
Um hierbei sauber argumentieren zu können, betrachten wir aber vor der eigentlichen Definition von Netzwerken die sogenannten topologischen Kanten, die genau beschreiben, wie das Intervall $(0, \rho(e))$ entlang jeder Kante erzeugt wird.

Klassisch geschieht hierbei die Definition der topologischen Kanten durch eine spezielle Abbildung des Einheitsintervalls $[0,1]$. Um uns aber Arbeit zu ersparen werden wir gleich zu Beginn von unserem Kantenintervall $[0,\rho(e)]$ abbilden.

3.1 Definition von Netzwerken und erste Eigenschaften

Wie bereits beschrieben beginnen wir mit der Definition der gewichteten Graphen:

3.1.1 Definition (gewichteter Graph)**:**
Ein **gewichteter Graph** besteht aus einem zusammenhängenden, orientierten Graphen $\Gamma = (V,E)$ zusammen mit einer Gewichtsfunktion $\rho : E \to (0,\infty)$, die jeder Kante $e \in E$ ein positives Gewicht zuordnet.
Damit kann der Graph Γ zu einem **gewichteten Graphen** erweitert werden und wir schreiben kurz $G = (V,E,\rho)$.

Netzwerke bauen nun auf gewichteten Graphen $G = (V,E,\rho)$ auf. Die Idee ist, dass jeder Kante $e \in E$ eines Netzwerkes entlang der Kantenrichtung mit Hilfe der Gewichtsfunktion ρ ein Kantenintervall zugeordnet wird

$$I_e := (0,\rho(e))$$

und damit jedem Punkt entlang der Kante e ein reeller Wert zugeordnet werden kann, wodurch dann schließlich Funktionen auf den Kanten definiert werden können.
Aus diesem Grund ist die nachfolgende Definition der topologischen Kanten sinnvoll, deren wesentliche Ideen aus dem Kapitel 8.5 von [9] entnommen wurden:

3.1.2 Definition (topologische Kante)**:**
Sei $G = (V,E,\rho)$ ein gewichteter Graph. Zu jeder Kante $e = (\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e))$ fügen wir eine Menge $\mathring{e} = (\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e))$ von kontinuierlich vielen Punkten hinzu, sodass diese Mengen $\mathring{e}$ disjunkt voneinander und von V sind.
Danach sei für jede Kante e eine feste, stetige Bijektion, mit einer stetigen inversen, zwischen $\mathring{e}$ und dem reellen Kantenintervall $(0,\rho(e))$ entlang der Kantenrichtung gewählt und diese Bijektion schließlich erweitert zu einer zwischen $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)] := \{\mathrm{init}(e)\} \cup \mathring{e} \cup \{\mathrm{ter}(e)\}$ und $[0,\rho(e)]$ mit entsprechender Metrik und Topologie.
Wir nennen $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ eine **topologische Kante** mit inneren Punkten $x \in \mathring{e}$.
Es gilt die Ordnung

$$\mathrm{init}(e) < x < \mathrm{ter}(e) \quad \text{für alle } x \in \mathring{e}$$

und wir schreiben der Einfachheit halber $\mathring{e} = (0,\rho(e))$.

3.1.3 Bemerkungen:
Sei $G = (V,E,\rho)$ ein gewichteter Graph und $e \in E$ eine beliebige Kante

1. Nach Definition 3.1.2 ist die topologische Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ also eine Kopie des reellen Intervalls $[0,\rho(e)]$ mit gleicher Metrik und Topologie.

Wir sprechen nun von einem Netzwerk, wenn wir jeder Kante eines gewichteten Graphen mit Hilfe von Definition 3.1.2 eine topologische Kante zuordnen:

3.1.4 Definition (Netzwerk)**:**
Sei $G = (V,E,\rho)$ ein gewichteter Graph. Wir sagen G ist ein **Netzwerk**, wenn jede Kante nach Definition 3.1.2 zu einer topologischen Kante erweitert werden kann.

3.1.5 Bemerkungen:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk:

1. Um zwischen einem Graph als Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ und einem Graph $\Gamma = (V, E)$, wie in 2.3, zu unterscheiden, sprechen wir bei ersterem öfter vom kontinuierlichen und beim zweiten vom diskreten Fall.

2. Aus Vereinfachungsgründen werden wir (wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind) im folgenden öfter von Punkten auf G sprechen (zum Beispiel $a \in G$). Damit ist nicht notwendigerweise wie im Diskreten eine Ecke des Netzwerks gemeint, sondern eben ein Punkt auf einer topologischen Kante.
   Wobei auch hier die Konvention gilt, dass wenn von einem Punkt auf einer Kante gesprochen wird (zum Beispiel $a \in e$ für $e \in E$), dann ist damit ein Punkt auf der topologischen Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ gemeint.
   Liegt der Punkt auf dem Inneren einer Kante (also $a \in \mathring{e}$), dann und nur dann kann man ihm einen reellen Wert zuordnen.

3. Bei Netzwerken muss man sehr darauf achten genau zwischen Punkten auf verschiedenen Kanten zu unterscheiden, da diese zwar unter Umständen den gleichen reellen Wert haben, aber trotzdem durchaus unterschiedlich sind.
   Um einen Überblick zu behalten nutzen wir im weiteren Verlauf folgende Schreibweisen:
   Sei $e \in E$ eine Kante. Ein Punkt auf $\mathring{e}$ wird dargestellt in der Form $a_e = x$, wobei $x \in (0, \rho(e))$ der zugeordnete reelle Wert von a_e ist.
   Eine Variable, die sich nur auf der topologischen Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$, für $e \in E$ bewegen soll, wird durch den Index symbolisiert: $x_e \in [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$

4. Jede topologische Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ ist kompakt, weil sie isomorph zum kompakten Intervall $[0, \rho(e)]$ ist.

Die im vorigen Abschnitt definierten Wege sind ein gutes Hilfsmittel um eine Verbindung von einem Knoten eines diskreten Graphen zu einem anderen herzustellen. Auf einem Netzwerk wollen wir aber nicht nur Wege von einem Knoten zum anderen betrachten, sondern vielleicht auch von einem Punkt auf einer Kante zu einem anderen Punkt auf einer Kante oder Ecke. Um hierbei auf das bekannte Konstrukt des Weges zurückgreifen zu können, benötigen wir die Definition des Unterteilungsgraphs. Die folgende Definition wurde im Großen und Ganzen aus [8] - Definitionen - entnommen:

3.1.6 Definition (Unterteilungsgraph eines Netzwerkes)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und sei a_e ein Punkt auf dem Inneren einer Kante $e = (u, v) \in E$ $(u, v \in V)$ des Netzwerks.
Man versteht unter einer **Unterteilung der Kante** e am Punkt a_e die Ersetzung dieser Kante durch zwei neue Kanten e_1 und e_2, die die beiden Ecken u und v der entfernten Kante mit einem neuen Knoten a_e verbindet.
Auf diese Weise entsteht ein neuer (diskreter) Graph $G' = (V', E')$ mit der neuen Knotenmenge

$$V' := V \cup \{a_e\}$$

und der neuen Kantenmenge

$$E' := (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\},$$

wobei $e_1 = (u, a_e)$ und $e_2 = (a_e, v)$ sind.
Ein **Unterteilungsgraph eines Netzwerkes** ist damit ein Graph, der aus diesem durch (ein- oder mehrmalige) Kantenunterteilung entsteht.

3.2 Funktionen auf Netzwerken

Wie wir bereits kennengelernt haben sind Punkte eines Netzwerkes $G = (V, E, \rho)$ nicht nur dessen Ecken $x_v \in V$ (wie im diskreten Fall), sondern eben auch alle auf dem Inneren der topologischen Kanten $e \in E$ liegenden Punkte $x_e \in \mathring{e}$.

Das bedeutet aber eben, dass man von Werten einer Funktion auf G nicht nur wie im diskreten Fall die Werte der Ecken betrachtet, sondern auch die entlang der Kanten.
Spricht man nun also von einer Funktion f auf einem Netzwerk $G = (V, E, \rho)$, dann ist die Rede von einer Sammlung von Funktionen, die jeweils auf dem Inneren der Kanten **und** deren Anfangs- und Endecken definiert sind:

3.2.1 Definition (Funktionen auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk. Eine **Funktion** $f : G \to \mathbb{R}$ auf dem Netzwerk G ist eine Sammlung von Funktionen f_e, f_v mit

$$f_e : \mathring{e} \to \mathbb{R} \quad \text{für } e \in E \quad \text{und} \quad f_v : \{v\} \to \mathbb{R} \quad \text{für } v \in V$$

Wir sagen f_e, f_v sind **Teilfunktionen** von f.

Betrachtet man hier explizit $\text{init}(e), \text{ter}(e) \in V$ für $e \in E$, dann erhät mann mit

$$\tilde{f}_e(x) := \begin{cases} f_v(\text{init}(e)) & ,\text{für } x = \text{init}(e) \\ f_e(x) & ,\text{für } x \in \mathring{e} \\ f_v(\text{ter}(e)) & ,\text{für } x = \text{ter}(e) \end{cases}$$

eine Funktion auf der topologischen Kante $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$.

3.3 Metrik und Topologie auf Netzwerken

Wie wir bereits in den Grundlagen angedeutet haben ist es nicht möglich einfach Aussagen der reellen Analysis auf Netzwerke zu übertragen. Wir brauchen eine Topologie auf Netzwerken, auf der unsere künftigen Ergebnisse aufbauen sollen.
Wir beginnen damit uns eine Metrik zu erarbeiten, die wiederum auf sogenannten Verbindungen basiert. Diesen Verbindungen liegt folgender Gedankengang zugrunde:
Auf Netzwerken ist es nicht möglich allgemein Intervalle zwischen zwei Punkten $a, b \in G$ zu erstellen. Liegen die Punkte beide auf einer Kante $e \in E$ kann natürlich ein Intervall als Teilmenge des Kantenintervalls $I_e = (0, \rho(e))$ in bekannter Weise definiert werden, jedoch ist dies zwischen zwei Punkten, die nicht beide auf der selben Kante liegen nicht mehr so einfach zu bewerkstelligen, da man unterschiedlichste Wege auf einem Netzwerk von dem einen Punkt zum anderen gehen kann.

Ziel ist es eine Menge zu bestimmen, die alle Punkte auf einer „Verbindung“ von einem Punkt $a \in G$ zu einem Punkt $b \in G$ enthält und intuitiv einen ähnlichen Zweck erfüllt wie Intervalle auf $\mathbb{R}$. Um dieses Ziel zu erreichen wird das Netzwerk wenn nötig unterteilt und dann auf die in Definition 2.3.3 definierten Wege von diskreten Graphen zurückgegriffen.
Die wesentliche Idee für die folgende Definition stammt aus Definition 3.13 [10]:

3.3.1 Definition (Verbindungen)**:**
Seien a, b zwei Punkte auf einem Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ mit $a \neq b$.
Eine **Verbindung** L von a nach b wird entsprechend einem der drei Fälle definiert:

1. Sind $a, b \in V$, also beide Punkte jeweils auf einer Ecke:
   Sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ein Weg auf dem diskreten Graphen $G = (V, E)$ mit Eckenmenge $\tilde{V} = \{a, v_1, \ldots, v_n, b\} \subseteq V$, Kantenmenge $\tilde{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq E$, sowie mit Startpunkt a und Endpunkt b. Eine Verbindung L von a nach b ist dann die Menge, die die Punkte aller topologischen Kanten entlang des Weges $\tilde{G}$ enthält:
   $$L := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_n} [\mathrm{init}(e_i), \mathrm{ter}(e_i)]$$

2. Liegen a und b beide auf einer Kante, dann gilt:
   Sei $G' = (V', E')$ der Unterteilungsgraph von G an den Punkten a und b, wie in Definition 3.1.6. Sei dann $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ein Weg auf G' mit Eckenmenge
   $$\tilde{V} = \{a, v_1, \ldots, v_n, b\}$$
   und Kantenmenge
   $$\tilde{E} = \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_n, b\}\},$$
   wobei gilt, dass
   $$(\tilde{V} \setminus \{a, b\}) \subseteq V \quad \text{und} \quad (\tilde{E} \setminus \{\{a, v_1\}, \{v_n, b\}\}) \subseteq E,$$
   dann ist die Verbindung L von a nach b die Menge, die alle Punkte der topologischen Kanten entlang des Weges $\tilde{G}$ enthält:
   $$L := [a, v_1] \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n-1}} [v_i, v_{i+1}] \right) \cup [v_n, b]$$
   Liegen a und b beide auf der gleichen Kante und gilt für die Eckenmenge des Weges $\tilde{V} = \{a, b\}$ und für die Kantenmenge $\tilde{E} = \{\{a, b\}\}$, dann gilt natürlich
   $$L := [a, b]$$

3. Liegt ein Punkt auf einer Kante und der andere auf einer Ecke:
   Sei a der Punkt, der auf einer Kante liegt und dementsprechend $b \in V$ (andernfalls kann man die Bezeichnungen einfach tauschen). Sei $G' = (V', E')$ der Unterteilungsgraph von G an der Stelle a. Sei dann $\tilde{G} = (\tilde{E}, \tilde{V})$ ein Weg auf G' mit Eckenmenge
   $$\tilde{V} = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\}$$
   und Kantenmenge
   $$\tilde{E} = \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_n, b\}\},$$
   wobei gilt, dass
   $$(\tilde{V} \setminus \{a\}) \subseteq V \quad \text{und} \quad (\tilde{E} \setminus \{\{a, v_1\}\}) \subseteq E,$$
   dann ist eine Verbindung L von a nach b die Menge, die alle Punkte der topologischen Kanten entlang des Weges $\tilde{G}$ enthält:
   $$L := [a, v_1] \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n-1}} [v_i, v_{i+1}] \right) \cup [v_n, b]$$

Wir schreiben wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind $\boldsymbol{L(a,b) \subseteq G}$ oder einfach nur $\boldsymbol{L(a,b)}$ und meinen damit eine **Verbindung $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$ auf dem Netzwerk $\boldsymbol{G}$**.
Die **Menge aller Verbindungen** von a nach b bezeichnen wir dabei mit $\boldsymbol{\mathcal{L}(a,b)}$ und diese sei wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}(a,b) := \{L(a,b) \subseteq G \mid L \text{ ist Verbindung von } a \text{ nach } b\}$$

Verbindungen sind ein wichtiges Werkzeug für unsere Arbeit auf Netzwerken, aus diesem Grund empfiehlt es sich noch einige Klarstellungen zu treffen:

3.3.2 Bemerkungen:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ mit $a \neq b$:

1. Eine Verbindung L von a nach b ist im Allgemeinen nicht eindeutig, das heißt es kann durchaus mehrere verschiedene geben.
2. Jedem Punkt in $L(a,b) \subseteq G$ wird (wenn vorhanden) der gleiche reelle Wert zugeordnet wie dessen Vertreter in G.

Um nun im weiteren Verlauf der Arbeit sauber argumentieren zu können sind nun noch einige Definitionen nötig. Die Erste sei dabei die

3.3.3 Definition (Vollständige Durchlaufung)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G. Sei weiter L eine Verbindung von a nach b und $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der Weg , der für die Konstruktion von L, wie in Definition 3.3.1 - $1, 2$ oder 3 genutzt wird. Man sagt eine Kante $e \in E$ wird in L genau dann **vollständig durchlaufen**, wenn $e \in \tilde{E}$.

Eine weitere wichtige Definition ist die sogenannte Kantenabschnittsmenge $K(L)$ einer gegebenen Verbindung L. Die Menge $K(L)$ ist Teilmenge der Verbindung L von zwei Punkten a und b auf einem Netzwerk, die grob gesagt jene Punkte der Verbindung enthält, die auf nicht vollständig durchlaufenen (topologischen) Kanten liegen:

3.3.4 Definition (Kantenabschnittsmenge)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G mit $a \neq b$. Sei $L \subseteq G$ eine Verbindung von a nach b. Für die Definition der **Kantenabschnittsmenge** $K(L) \subseteq L$ werden wieder folgende drei Fälle unterschieden:

1. Liegen a und b beide auf einer Ecke, dann gilt:
$$K(L) := \emptyset$$
2. Liegen a und b beide auf einer Kante, dann gilt:
Seien $a \in e$ und $b \in \tilde{e}$ ($e, \tilde{e} \in E$, nicht notwendigerweise verschieden), dann sei die Hilfsmenge $\tilde{L} := [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)] \cup [\mathrm{init}(\tilde{e}), \mathrm{ter}(\tilde{e})]$ und damit
$$K(L) := L \cap \tilde{L}$$
3. Liegt einer der Punkte a oder b auf einer Kante und der andere auf einer Ecke, dann gilt:
Sei $a \in e$ für ein $e \in E$ der Punkt, der auf einer Kante liegt und b der Punkt, der auf einer Ecke liegt (ansonsten gilt das Folgende entsprechend), dann ist die Hilfsmenge $\tilde{L} := [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ und es gilt:
$$K(L) := L \cap \tilde{L}$$

Wir wollen nun mithilfe der bisherigen Ergebnisse und Definitionen einen Abstand und damit dann schließlich eine Metrik auf Netzwerken definieren. Dafür benötigen wir allerdings noch eine weitere Definition:

3.3.5 Definition (Länge von Kantenabschnittsmengen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G mit $a \neq b$. Sei $L \subseteq G$ eine Verbindung von a nach b und $K(L)$ die zugehörige Kantenabschnittsmenge. Die **Länge $\boldsymbol{\lambda(K(L))}$ einer Kantenabschnittsmenge** wird entsprechend ihrer Definition in 3.3.4−1 bis 3 folgendermaßen definiert:

1. Gilt $K(L) = \emptyset$, dann ist
$$\lambda(K(L)) := 0.$$

2. Betrachten wir den zweiten Fall, dann gibt es mehrere Möglichkeiten, wie $K(L)$ aussehen kann. Seien $a = a_e = \alpha$ und $b = b_{\tilde{e}} = \beta$, wobei α und β die zugehörigen reellen Werte von a und b sind und $e, \tilde{e} \in E$ ist (das heißt a liegt auf der Kante e und b liegt auf der Kante $\tilde{e}$, wobei diese Kanten nicht notwendigerweise verschieden sein müssen).

   (a) Liegen a und b auf einer Kante und gilt $K(L) = [a, b]$, dann ist
$$\lambda(K(L)) := |\beta - \alpha|.$$

   (b) Gilt hingegen $K(L) \neq [a, b]$, dann sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der Weg, der zur Konstruktion von $L(a, b)$ genutzt wurde. Hierbei sei $\tilde{V} = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist
$$\lambda(K(L)) := |\alpha - \tilde{v}_1| + |\beta - \tilde{v}_n|,$$
   wobei gilt, dass
$$\tilde{v}_1 := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } v_1 = \operatorname{init}(e) \\ \rho(e) & \text{, wenn } v_1 = \operatorname{ter}(e) \end{cases} \quad , \qquad \text{und} \qquad \tilde{v}_n := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } v_n = \operatorname{init}(\tilde{e}) \\ \rho(\tilde{e}) & \text{, wenn } v_n = \operatorname{ter}(\tilde{e}) \end{cases} \quad .$$

3. Der dritte Fall ist wieder etwas einfacher. Sei wie in Definition 3.3.4−3 der Punkt a derjenige, der auf einer Kante $e \in E$ liegt und b der Punkt, der auf einer Ecke liegt (ansonsten gilt das folgende einfach entsprechend). Sei $\alpha \in (0, \rho(e))$ der zugeordnete reelle Wert von a, dann ist
$$\lambda(K(L)) := |\alpha - \tilde{v}|,$$
   wobei gilt, dass
$$\tilde{v} := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } K(L) = [\operatorname{init}(e), a] \\ \rho(e) & \text{, wenn } K(L) = [a, \operatorname{ter}(e)] \end{cases} \quad .$$

Mit Hilfe der Definitionen 3.3.4 und 3.3.5 ist es nun möglich eine Länge einer Verbindung zwischen zwei Punkten des Netzwerkes $G = (V, E, \rho)$ und einen Abstand zwischen zwei Punkten anzugeben:

3.3.6 Definition (Länge und Abstand)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf diesem Netzwerk mit $a \neq b$.
Sei $\mathcal{L}(a, b)$ die Menge aller Verbindung von a nach b und $L \in \mathcal{L}$ eine spezielle Verbindung. Sei weiter $\tilde{E}(L)$ die Menge aller Kanten, die auf der Verbindung L vollständig durchlaufen werden und λ sei die in Definition 3.3.5 definierte Länge der Kantenabschnittsmenge. Die **Länge** $\mathrm{l} : \mathcal{L} \to (0, \infty)$ **der Verbindung** L ist gegeben durch:
$$\mathrm{l}(L) := \left(\sum_{e \in \tilde{E}(L)} \rho(e) \right) + \lambda(K(L))$$

Der **Abstand** $\mathrm{dist} : G \times G \to [0, \infty)$ von zwei Punkten auf G ist die Länge einer kürzesten Verbindung dieser beiden Punkte und damit wie folgt definiert:

$$\mathrm{dist}(a,b) := \min \{\mathrm{l}(L) \mid L \in \mathcal{L}(a,b)\}$$

für zwei Punkte $a, b \in G$.
Dabei sei definiert, dass

$$\mathrm{dist}(a,a) := 0$$

Um nun schließlich eine Topologie auf Netzwerken definieren zu können und damit endlich die eigentliche Arbeit beginnen zu können, müssen wir nur noch zeigen, dass es sich bei der in Definition 3.3.6 definierten Abbildung $\mathrm{dist}(,)$ um eine Metrik handelt, wie der folgende Satz zeigen soll:

3.3.7 Satz (Metrik auf Netzwerken)**:**
Bei der in Definition 3.3.6 eingeführten Abbildung $\mathrm{dist}(,)$ handelt es sich um eine **Metrik** auf $G = (V, E, \rho)$.

Beweis. Um die Aussage zu beweisen, werden wir die drei Metrikaxiome aus Definition 2.1.1 (für alle $a, b, c \in G = (V, E, \rho)$)

1. $\mathrm{dist}(a,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$,
2. $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(b,a)$
3. $\mathrm{dist}(a,c) \leq \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,c)$

einzeln auf Echtheit überprüfen:

1. „$\Rightarrow$“:
   Es gelte also $\mathrm{dist}(a,b) = 0$. Da nach Definition 3.3.6 für alle $a \neq b$ gilt, dass $\mathrm{l}(L) > 0$ für alle $L \in \mathcal{L}(a,b)$ ist, muss gelten, dass $a = b$ ist.
   „$\Leftarrow$“:
   Diese Richtung gilt bereits nach Definition 3.3.6.

2. Diese Aussage folgt direkt aus der Definition 3.3.6, da hier angenommen wird, dass es sich bei $\mathrm{dist}(,)$ um die Länge einer kürzesten Verbindung von zwei Punkten handelt. Bei Verbindungen spielen aber Durchlaufrichtungen keine Rolle.
   Angenommen also es gelte $\mathrm{dist}(a,b) < \mathrm{dist}(b,a)$ (für $\mathrm{dist}(a,b) > \mathrm{dist}(b,a)$ gilt das folgende entsprechend), dann könnte man die für $\mathrm{dist}(a,b)$ genutzte Verbindung einfach „rückwärts“ durchlaufen und hätte damit eine Verbindung $L(b,a)$ von b nach a, für die gelten würde

   $$\mathrm{l}(L(b,a)) = \mathrm{dist}(a,b) < \mathrm{dist}(b,a),$$

   was aber der Definition des Abstandes widersprechen würde.

3. Auch dieses Axiom folgt aus der Definition 3.3.6. Sei $L_1(a,c)$ eine Verbindung von a nach c mit $\mathrm{l}(L_1(a,c)) = \mathrm{dist}(a,c)$, $L_2(a,b)$ eine Verbindung von a nach b mit $\mathrm{l}(L_2(a,b)) = \mathrm{dist}(a,b)$ und $L_3(b,c)$ eine Verbindung von b nach c mit $\mathrm{l}(L_3(b,c)) = \mathrm{dist}(b,c)$.
   Wir betrachten nun die Aussage

   $$\mathrm{dist}(a,c) > \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,c)$$

   und führen diese auf einen Widerspruch:
   Betrachten wir die Menge $M := L_2(a,b) \cup L_3(b,c)$, dann muss es eine Verbindung $\tilde{L}_1(a,c) \in \mathcal{L}(a,c)$ geben mit $\tilde{L}_1(a,c) \subseteq M$ (siehe Bemerkung 3.3.8). Für die Länge dieser Verbindung würde dann aber gelten, dass

   $$\mathrm{l}(\tilde{L}_1(a,c)) \leq \mathrm{l}(L_2(a,b)) + \mathrm{l}(L_3(b,c)) = \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,c) < \mathrm{dist}(a,c) = \mathrm{l}(L_1(a,c))$$

ist, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $L_1(a,c)$ eine kürzeste Verbindung von a nach c ist.

□

3.3.8 Bemerkungen:
Um die im Beweis zu Satz 3.3.7 Punkt 3 gemachte Aussage zu verdeutlichen, die angibt, dass im Allgemeinen nicht $\tilde{L}_1(a,c) = M$ gilt, betrachten wir das Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ mit $V = \{a, b, c, v\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\rho(e_i) = 1$ für $i = 1, 2, 3$. Dabei gilt $e_1 := (a, v)$, $e_2 := (v, b)$ und $e_3 := (v, c)$.
In diesem Fall wäre die Menge $M = L_2(a,b) \cup L_3(b,c) = [a,v] \cup [v,b] \cup [v,c]$. Diese Menge kann aber nach Definition 3.3.1 keine Verbindung von a nach b sein. Stattdessen muss hier also wie im Beweis angedeutet die Verbindung $\tilde{L}_1(a,c) = [a,v] \cup [v,c] \subseteq M$ betrachtet werden.

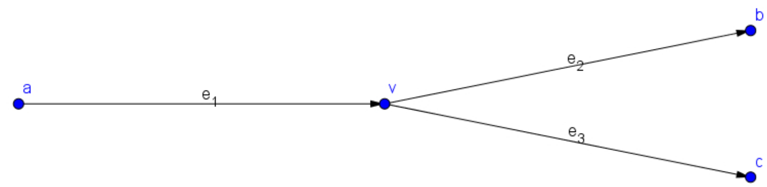

Abbildung 1: Visualisierung des Netzwerks aus der Bemerkung 3.3.8.

Und nun können wir endlich eine auf der Metrik dist(,) basierende Topologie nach Definition 2.1.4 definieren:

3.3.9 Definition (Topologie auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $\mathrm{dist} : G \times G \to [0, \infty)$ die in Definition 3.3.6 eingeführte Metrik auf G.
Die Menge

$$|G| := \{W \subseteq G \mid W \text{ ist offen in } (G, \mathrm{dist})\}$$

ist dann nach Definition 2.1.4 eine **Topologie** auf G.

3.3.10 Bemerkungen:
Der Einfachheit halber werden wir im folgenden, wenn wir ein Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ betrachten, immer gleichzeitig dessen topologischen Raum $|G|$ annehmen, auch wenn dies nicht explizit genannt wird.

Abschließend soll noch eine Eigenschaft von Kantenabschnittsmengen und Verbindungen gezeigt werden, die uns im Bereich der Stetigkeit dienlich sein wird und die wir hier vorweg nehmen und beweisen wollen:

3.3.11 Lemma (Kompaktheit von Verbindungen und Kantenabschnittsmengen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk, $a, b \in G$ zwei Punkte auf G und $L(a,b)$ eine beliebige Verbindung von a nach b.
Die **Kantenabschnittsmenge** $K(L)$ und die **Verbindung** $L(a,b)$ sind **kompakt**.

Beweis. Zum Beweis der Kompaktheit der Kantenabschnittsmenge arbeiten wir die drei Fälle der Definition 3.3.4 durch, seien hierfür also alle Eigenschaften der Fälle entsprechend gegeben:

1. Ist $K(L) = \emptyset$, so ist $K(L)$ automatisch kompakt.

2. Per Definition ist

$$\begin{aligned} K(L) &= L \cap \tilde{L} \\ &= L \cap ([\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)] \cup [\mathrm{init}(\tilde{e}), \mathrm{ter}(\tilde{e})]) \\ &= (L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]) \cup (L \cap [\mathrm{init}(\tilde{e}), \mathrm{ter}(\tilde{e})]). \end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, dass $(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)])$ und $(L \cap [\mathrm{init}(\tilde{e}), \mathrm{ter}(\tilde{e})])$ kompakt sind und damit ist $K(L)$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt (einen Beweis zu dieser Aussage findet man zum Beispiel in [1] Abschnitt 2.6).
Es genügt die Kompaktheit von $(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)])$ zu beweisen, da für $(L \cap [\mathrm{init}(\tilde{e}), \mathrm{ter}(\tilde{e})])$ alles äquivalent abläuft:
Sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der Weg, der für die Konstruktion von L, wie in Definition 3.3.1 −2 genutzt wird, insbesondere ist dann $\tilde{V} = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\}$ die Menge der Ecken, die entlang des Weges durchlaufen werden.
Für $e = \tilde{e}$ gilt für $(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)])$ nun entweder

$$(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]) = [a, b],$$

oder (insofern $a < b$, ansonsten gilt entsprechend vertauscht)

$$(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]) = [v_1, a] \cup [b, v_n].$$

In diesem Fall haben wir durch die Konstruktion der topologischen Kanten 3.1.2 die Kopie eines abgeschlossenen (und beschränkten) Intervalles (beziehungsweise die Vereinigung zweier solcher) und können damit die Kompaktheit auf die gleiche Weise beweisen, wie für bekannte abgeschlossene reelle Intervalle auf $\mathbb{R}$. Einen solchen Beweis findet man zum Beispiel in [11] Kapitel 1.3 Beispiel 7 für das Intervall $[0, 1]$, der sich auf Intervalle $[a, b]$ übertragen lässt.
Gilt nun der Fall $e \neq \tilde{e}$, dann gilt (falls $a > v_1$, ansonsten werden die Bezeichnungen vertauscht)

$$(L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]) = [v_1, a]$$

was ebenfalls die Kopie eines abgeschlossenen Intervalles und damit wie bereits begründet kompakt ist.

3. Bei diesem Fall gilt $K(L) = L \cap [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$, was bedeutet, dass man die Argumentation im Punkt 2 hier erneut aufgreifen und zeigen kann, dass es sich um eine kompakte Menge handelt.

Zum Nachweis der Kompaktheit der Verbindung L gilt nun:
Sei $\tilde{E}(L)$ die Menge aller Kanten, die auf der Verbindung $L(a, b)$ vollständig durchlaufen werden. Nach unserer Voraussetzung gilt $|\tilde{E}(L)| \leq |E| < \infty$. Nach 3.1.5 −4 sind die topologischen Kanten $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ für alle $e \in \tilde{E}(L)$ kompakt (was auch im Punkt 2 noch einmal begründet wurde) und auch die Kantenabschnittsmenge $K(L)$ ist nach unseren vorhergehenden Überlegungen kompakt.
Damit ist die Menge

$$L(a, b) = K(L) \cup \left(\bigcup_{e \in \tilde{E}(L)} [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)] \right)$$

als endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt. □

4 Stetigkeit

In diesem Kapitel soll nun die Frage geklärt werden, inwiefern auf Netzwerken definierte Funktionen einer Stetigkeitsbedingung genügen und darüber hinaus sollen noch einige wichtige Aussagen für unsere weiteren Differenzial- und Integralaussagen bewiesen werden.

4.1 Definition

Zu Beginn müssen wir natürlich zuallererst einmal definieren, wie Stetigkeit auf Netzwerken überhaupt aussieht. Mit Definition 3.3.9 haben wir auf jedem Netzwerk eine Topologie definiert und können daher schon einmal die zum Beispiel aus [2] Kapitel 19.2 bekannte Stetigkeitsbedingung zwischen zwei topologischen Räumen nutzen:

4.1.1 Definition (Allgemeine Stetigkeitsbedingung auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf G. Wir nennen f **stetig**, wenn das Urbild von f unter jeder in $\mathbb{R}$ offenen Menge auch in G nach Definition 2.1.2 offen ist.

Diese Aussage ist zwar durchaus in seiner allgemeinen Form (das heißt zwischen allgemeinen Topologien) gängig und bekannt, jedoch ist sie für unsere Zwecke wenig dienlich, da wir versuchen wollen eine Stetigkeitsaussage zu formulieren, die möglichst nahe an den bekannten Aussagen der reellen Analysis und damit praktischer zu handhaben ist.

Wir kennen aus der klassischen Analysis verschiedene Bedingungen, die hinreichend für die Stetigkeit einer Funktion sind. Da es sich bei den topologischen Kanten um Isomorphismen reeller Intervalle handelt kann man diese Kriterien ohne weiteres auch auf dem Inneren der topologischen Kanten anwenden, was uns also ein Kriterium für die Stetigkeit der inneren Punkte $x \in \mathring{e}$ einer Kante $e \in E$ gibt.

Betrachtet man jedoch die Ecken des Netzwerks, beziehungsweise insgesamt die in Definition 3.3.9 definierte Topologie auf Netzwerken, sieht die Situation etwas anders aus, denn es muss nicht nur jede Funktion auf dem Inneren der Kante $e \in E$ eine stetige Fortsetzung auf die Ecken $\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e) \in V$ für $e \in E$ haben, sondern auch jede benachbarte Kante $\tilde{e} \in E$ von e muss an der gemeinsamen Ecke die gleiche stetige Fortsetzung haben.

Beachtet man dies, liefert der folgende Satz ein Kriterium für die Stetigkeit auf Netzwerken:

4.1.2 Satz (Stetigkeit auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf G mit $f_e : (0, \rho(e)) \to \mathbb{R}$ und $f_v : \{v\} \to \mathbb{R}$ für alle $e \in E$ und $v \in V$.
f ist genau dann **stetig auf dem Netzwerk** $G = (V, E, \rho)$, wenn f_e für alle $x \in \mathring{e}$ im klassischen Sinne stetig ist und wenn gilt, dass $\lim_{x \downarrow 0} f_e(x) = f_v(\mathrm{init}(e))$ und $\lim_{x \uparrow \rho(e)} f_e(x) = f_v(\mathrm{ter}(e))$ für jede Kante $e \in E$ ist.

Beweis. Wir teilen den Beweis in Hin- und Rückrichtung auf:

1. „$\Rightarrow$“:
   Die erste Aussage folgt, da f stetig ist und auf dem Inneren jeder topologischen Kante gilt, dass das Urbild einer offenen Menge in $\mathbb{R}$ unter f auf dieser Kante wieder offen und damit auch (klassisch) stetig ist.
   Für die zweite Aussage führen wir einen Gegenbeweis: Sei $a \in V$ eine beliebige Ecke und sei $\lim_{x_e \to a} f_e(x_e) \neq f_v(a)$, für jede Kante $e \in E$, die a als Start- beziehungsweise Endpunkt haben.
   Dann können wir für ein $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ um $f(a)$ finden, sodass das Urbild dieser Umgebung in einer Umgebung um a $U_\delta(a)$, für ein möglicherweise sehr kleines $\delta > 0$, nur den Punkt a enthält und damit $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ nicht offen ist, was der Stetigkeit von f widersprechen würde.

2. „$\Leftarrow$“:
Sei W offen in $\mathbb{R}$ und $a \in U := f^{-1}(W)$ ein beliebiger Punkt, dann gibt es wegen der Offenheit von W eine offene Umgebung $\widetilde{W}$ von $f(a)$, für die gilt $\widetilde{W} \subseteq W$.
Ist $a \in U \setminus V$, dann muss es wegen der klassischen Stetigkeit von f auf dem Inneren der Kanten eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von a mit $\tilde{U} \subseteq \mathring{e}$, für ein $e \in E$ (das heißt $\tilde{U}$ liegt vollständig auf dem Inneren einer topologischen Kante) geben, für den auch $f(\tilde{U}) \subseteq \widetilde{W}$ gilt.
Ist dagegen $a \in U \cap V$, dann muss es wegen $\lim\limits_{x_e \to a} f_e(x_e) = f_v(a)$, für jede Kante $e \in E$, die a als Start- beziehungsweise Endpunkt haben, eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von a geben, für die ebenso $f(\tilde{U}) \subseteq \widetilde{W}$ gilt.
Daraus folgt $\tilde{U} \subseteq U$ und da diese Argumentation für alle $a \in U$ gilt, ist U offen und somit ist f nach Definition 4.1.1 stetig.

$\square$

Um uns in Zukunft etwas Arbeit zu ersparen, soll von nun an folgende Notation gelten:

4.1.3 Notation:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf G, sowie $v \in V$ eine Ecke. Wenn wir kurz für ein $a \in \mathbb{R}$ schreiben, dass

$$\lim_{x_e \to v} f_e(x_e) = a$$

gilt, dann meinen wir damit, dass sowohl

$$\lim_{x_e \downarrow v} f_e(x_e) = a \text{ für alle } e \in E \text{ mit } e = (v, \mathrm{ter}(e)),$$

als auch

$$\lim_{x_e \uparrow v} f_e(x_e) = a \text{ für alle } e \in E \text{ mit } e = (\mathrm{init}(e), v)$$

gilt.

4.1.4 Bemerkungen:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf G.
Man beachte, dass die oben genannte Stetigkeitsbedingung tatsächlich gewährleistet, dass die auf zwei benachbart liegenden Kanten $e, \tilde{e} \in E$ definierten Funktionsabschnitte f_e und $f_{\tilde{e}}$ von f in ihrem gemeinsamen Knoten den gleichen Grenzwert haben und somit bei Stetigkeit ineinander übergehen, entsprechend unserer Notation gilt also

$$\lim_{x'_e \to v} f_{e'}(x_{e'}) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

für alle $v \in V$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch eine Stetigkeitsbedingung für Verbindungen geben, wobei kaum verwunderlich sein dürfte, dass diese mit der Bedingung für ganze Netzwerke Hand in Hand geht:

4.1.5 Satz (Stetigkeit auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ mit $a \neq b$ und f eine Funktion auf G. Sei weiter $L(a, b) \subseteq G$ eine beliebige Verbindung von a nach b. Wir sagen f ist **stetig auf** L, wenn f für jeden Punkt $x \in L$ im Sinne von Satz 4.1.2 stetig ist.

Beweis. Der Beweis geht im Grunde genauso wie der von Satz 4.1.2, indem wir die Verbindung aufteilen in die Punkte, die auf dem Inneren der topologischen Kanten von G liegen und die, die auf den Ecken des Netzwerkes liegen. $\square$

4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Nun, da wir Stetigkeit auf Netzwerken erfolgreich definiert haben und mithilfe der Sätze 4.1.2 und 4.1.5 gut anwendbare Stetigkeitsbedingungen kennengelernt haben, können wir in diesem Abschnitt verschiedene für Differenzial- und Integralrechnung wichtige Sätze beweisen.
Wir beginnen mit dem aus der reellen Analysis bekannten

4.2.1 Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G. Sei f eine Funktion auf G, die auf einer Verbindung $L(a, b)$ von a nach b stetig ist.
Die Funktion f nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an mindestens einer Stelle $c \in L(a, b)$ an: $\gamma = f(c)$.

Beweis. Der Beweis des Satzes stammt im Grundlegenden aus dem Beweis seiner „normalen“ Form aus [12] Kapitel 7.4 und wurde in diesem Fall für Netzwerke übernommen und angepasst:
Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $f(a) < f(b)$. Man kann dann mit $L(a_1, b_1) := L(a, b)$ beginnend sukzessive die Verbindung halbieren: Dies geschieht so, dass man einen Punkt $\tilde{h} \in L(a, b)$ wählt, sodass $\mathrm{l}(L(a, \tilde{h})) = \mathrm{l}(L(\tilde{h}, b)) = \frac{1}{2}\mathrm{l}(L(a, b))$ mit $L(a, \tilde{h}), L(\tilde{h}, b) \subseteq L(a, b)$ ist. Die entstandenen Verbindungen $L(a, \tilde{h})$ und $L(\tilde{h}, b)$ sind dann Verbindungshalbierungen.
Dadurch lässt sich eine Folge von Verbindungshalbierungen $L(a_n, b_n)$ mit den beiden Eigenschaften i) $L(a_{n+1}, b_{n+1}) \subseteq L(a_n, b_n)$ und ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $L(a_n, b_n)$ mit $\mathrm{l}(L(a_n, b_n)) < \varepsilon$ konstruieren, sodass $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$, für $n = 1, 2, ...,$ gilt.
Die Folgen a_n und b_n konvergieren gegen den in allen Verbindungen $L(a_n, b_n)$ liegenden Punkt c; nach dem Folgenkritierium, beziehungsweise der Definition 4.1.2, ist dort $f(c) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \leq \gamma$ und $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq \gamma$. Also gilt $f(c) = \gamma$. □

Eine direkte Folgerung des Zwischenwertsatzes ist der folgende

4.2.2 Satz (Nullstellensatz von Bolzano)**:**
Seien $a, b \in G = (V, E, \rho)$ zwei Punkte auf dem Netzwerk G mit $a \neq b$ und sei $L \subseteq G$ eine beliebige Verbindung von a nach b.
Sei weiter f eine Funktion auf dem Netzwerk $G = (V, E, \rho)$.
Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$) und ist f stetig auf L, dann gibt es mindestens ein $x \in L$ mit $f(x) = 0$.

Beweis. Der Satz ist eine direkte Folgerung des Satzes 4.2.1:
O.b.d.A. gilt $f(a) < f(b)$. Dann ist $f(a) < 0 < f(b)$ und nach 4.2.1 existiert ein $c \in L(a, b)$ mit $f(c) = 0$. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch eine Aussage über Extrema einer stetigen Funktion treffen.
Der Trick besteht hierbei darin, das Extremum jeder Kante zu bestimmen und dann aus all diesen Extrema das größte (für Maxima), beziehungsweise kleinste (für Minima) auszuwählen. Hierfür benötigen wir also als erstes einen Satz, der uns ein Minimum und ein Maximum auf einer topologischen Kante (beziehungsweise einer kompakten Teilmenge) garantiert. Anschließend wird dieser Satz erweitert für Verbindungen und schließlich für ganze Netzwerke. Aussagen und Beweis des Satzes stammen im Groben aus [12] Kapitel 7.5.

4.2.3 Satz (Minimums- und Maximumsaussagen auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk, $a, b \in G$ zwei Punkte und f eine Funktion auf diesem Netzwerk.

1. Minimum und Maximum auf Kanten:
Sei $e \in E$ eine beliebige Kante, sowie $K \subseteq [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ eine kompakte Teilmenge der topologischen Kante.
Ist f stetig auf K, so nimmt f auf K ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

2. Minimum und Maximum auf Verbindungen:
Sei $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b
Ist f stetig auf allen Punkten von $L(a, b)$, so nimmt f auf $L(a, b)$ ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

3. Minimum und Maximum auf Netzwerken:
Ist f stetig auf allen Punkten von G, so nimmt f auf G ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

Beweis.

1. Da f stetig auf K ist, ist $\mathrm{Bild}(f(K))$ wieder eine kompakte Menge und damit beschränkt durch ein Supremum M und ein Infimum m. Da $\mathrm{Bild}(f(K))$ als kompakte Menge auch abgeschlossen ist, gilt $m, M \in \mathrm{Bild}(f(K))$, womit bereits alles bewiesen ist.

2. Nach Lemma 3.3.11 ist die Verbindung $L(a, b)$ kompakt. Mit der gleichen Argumentation wie in 1 gilt damit die Aussage.

3. Die in 3.1.2 definierten topologischen Kanten enthalten nach Definition die Anfangs- und Endecke jeder Kante. Damit ist die Menge aller Punkte von G durch $\bigcup\limits_{e \in E} [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ gegeben. Nach 3.1.5−4 ist jede topologische Kante kompakt und da nach Voraussetzung $|E| < \infty$ ist, ist die Menge aller Punkte von G als endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt (siehe hierzu auch [1] Abschnitt 2.6).
Mit der gleichen Argumentation wie in 1 gilt damit die Aussage.

□

5 Differenzierbarkeit

Mit diesem Kapitel wollen wir nun endlich den Hauptteil dieser Arbeit beginnen und uns verschiedene Versionen bekannter Sätze der reellen Analysis bezüglich der Differenzialrechnung auf Netzwerken erarbeiten. Wie schon im vorangegangenen Kapitel über Stetigkeit beginnen wir dabei mit der Definition eines Differenzierbarkeitsbegriffs auf Netzwerken und bauen darauf verschiedene Sätze und Erkenntnisse auf.

5.1 Definition

Wie schon im letzten Abschnitt sind aus Grundkursen der Analysis bereits einige Kriterien bekannt, die Differenzierbarkeit für offene Mengen gewährleisten und im Weiteren als bekannt vorausgesetzt werden.
Im letzten Kapitel waren es die Ecken des Netzwerkes, die uns vor eine gewisse Herausforderung gestellt haben, jedoch sieht es in diesem Abschnitt mit deren Einbeziehung etwas anders aus: Aus Vereinfachungsgründen betrachten wir Differenzierbarkeit nur im Inneren der topologischen Kanten. Darauf aufbauend werden wir dann im Folgenden verschiedene Bedingungen dafür kennenlernen, um einige auf Differenzierbarkeit beruhende Ergebnisse der Analysis auf Netzwerken anwenden zu können.

In fortgeschritteneren Arbeiten wird stattdessen oft das Prinzip der „schwachen Ableitung“ auf Netzwerken definiert, welches eleganter mit der Einbeziehung der Ecken auf Netzwerken umgeht, was wir hier aber nicht aufgreifen wollen und uns stattdessen mit folgender Definition begnügen:

5.1.1 Definition (Differenzierbarkeit auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf diesem Netzwerk. Wir sagen, dass f **differenzierbar auf dem Netzwerk** G ist, wenn f für alle $x \in \mathring{e}$ für alle $e \in E$ differenzierbar ist.
Wir nennen f **stetig differenzierbar auf dem Netzwerk** G, wenn f auf $\mathring{e}$ für alle $e \in E$ stetig differenzierbar ist und eine stetige Fortsetzung auf alle Ecken $v \in V$ besitzt, also wenn gilt

$$\lim_{x_e \to v} f'_e(x_e) = a$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.

5.2 Satz von Rolle auf Netzwerken

Aus Definition 5.1.1 kann man erkennen, dass sich die meisten auf Differenzierbarkeit beruhenden Sätze innerhalb einer Kante problemlos anwenden lassen. So gilt der Satz von Rolle auf dem Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ auf jeder topologischen Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ mit $e \in E$ und sei hier zur Verdeutlichung noch einmal wiederholt (die Version des Satzes auf reellen Intervallen findet man in Grundkursen zur Analysis):

5.2.1 Satz (Satz von Rolle auf Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $\tilde{f}_e$ eine wie in Definition 3.2.1 auf der topologischen Kante $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ für $e \in E$ definierte Funktion.
Sei $I := [a, b] \subseteq [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ und $\tilde{f}_e : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf dem Inneren von I und sei weiter $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0$$

Dies gewährleistet uns eine erste Anwendbarkeit des Satzes von Rolle, jedoch ist der Satz aufgrund der fehlenden Differenzierbarkeit in den Ecken des Netzwerks $G = (V, E, \rho)$ im Allgemeinen nicht gültig, selbst dann nicht, wenn die Funktion stetig ist:

5.2.2 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $E := \{e_1, e_2\}$, $V := \{v_1, v_2, v_3\}$, wobei gilt, dass $e_1 = (v_1, v_2)$ und $e_2 = (v_2, v_3)$ ist. Die zwei Kanten e_1, e_2 sind also gleichgerichtet mit gemeinsamer Ecke v_2. Sei weiter $\rho(e_1) = 1 = \rho(e_2)$ und damit $\mathring{e}_1 = (0, 1) = \mathring{e}_2$.
Wir betrachten die Funktion f auf G, die gegeben ist durch die Teilfunktionen

$$f_{v_1} = 0, \quad f_{e_1}(x_{e_1}) = x_{e_1}, \quad f_{v_2} = 1, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) = -x_{e_2} + 1 \quad \text{und} \quad f_{v_3} = 0.$$

Wegen $\lim\limits_{x_e \to v_2} f_e(x_e) = 1 = f_{v_2}$ und $\lim\limits_{x_{e_1} \downarrow 0} f_{e_1}(x_{e_1}) = f_{v_1} = 0 = \lim\limits_{x_{e_2} \uparrow 1} f_{e_2}(x_{e_2}) = f_{v_3}$ ist f stetig auf ganz G.
Sei $a_{e_1} = 0{,}5$ ein Punkt auf e_1 und $b_{e_2} = 0{,}5$ ein Punkt auf e_2.
Es gilt:

$$f_{e_1}(a_{e_1}) = 0{,}5 = f_{e_2}(b_{e_2}),$$

jedoch ist wegen

$$f'_{e_1} = 1 \quad \text{und} \quad f'_{e_2} = -1$$

die Ableitung der Teilfunktionen an keiner Stelle gleich 0 und somit der Satz von Rolle nicht gültig.

In Abbildung 2 wurde dieses Beispiel visualisiert, indem die beiden Kanten e_1, e_2 auf die Ebene projiziert und mit einem Koordinatensystem versehen wurden:

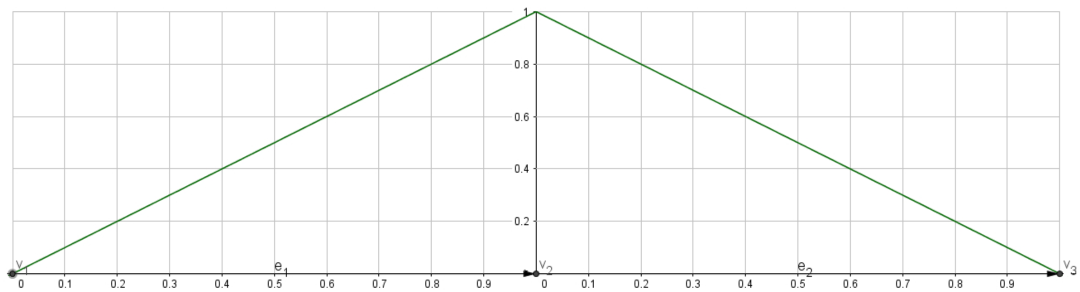

Abbildung 2: Visualisierung des Beispiels 5.2.2.

Trotz dieses Beispiels ist eine Anwendung des Satzes von Rolle auf Netzwerken nicht unmöglich, sondern bedarf eher noch weiteren Bedingungen. Es ist die fehlende Differenzierbarkeit in der Ecke v_2 des Beispiels, die dazu führt, dass sich der Satz von Rolle nicht anwenden lässt, denn da im Punkt v_2 das Maximum der Funktion f ist, müsste bei bestehender Differenzierbarkeit in diesem Punkt die Ableitung von f auf v_2 eine Nullstelle haben und der Satz von Rolle würde gelten.
Um den Satz von Rolle also anwenden zu können müssen wir schlicht fordern, dass f auf der Verbindung $L(a, b)$ in seinen Ecken weder ein Maximum, noch ein Minimum annimmt:

5.2.3 Satz (Satz von Rolle auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf dem Netzwerk, für die gilt, dass $f(a) = f(b)$ ist. Sei weiter $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b und f eine Funktion, die auf $L(a, b)$ stetig und auf $L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$ differenzierbar ist.
Ist f entweder in $L(a, b)$ konstant oder nimmt sein Maximum beziehungsweise Minimum in $L(a, b)$ in einem Punkt $x_0 \notin V$ an, dann existiert ein $x_0 \in L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Der Beweis läuft in diesem Fall relativ parallel zu dem Beweis des „normalen“ Satzes von Rolle, wie man ihn zum Beispiel in [12] Kapitel 9.3 findet:
Ist f konstant auf $L(a, b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$ für jedes $x_0 \in L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$. Andernfalls nimmt f auf $L(a, b)$ als stetige Funktion nach Satz 4.2.3 ein Maximum und ein Minimum an, wobei jetzt eines der beiden von $f(a) = f(b)$ verschieden ist und laut Voraussetzung auch nicht auf einer Ecke von $L(a, b)$ liegt. Dieses Extremum wird daher an einer Stelle $x_0 \in L \setminus V$ angenommen. Dort ist die Funktion f aber überall differenzierbar und es gilt dann $f'(x_0) = 0$. □

Satz 5.2.3 liefert uns eine erste Bedingung, die die Anwendbarkeit des Satzes von Rolle auf Netzwerken gewährleistet, jedoch ist dieser Satz primär mit Blick auf den Beweis des „normalen“ Satzes von Rolle der reellen Analysis entstanden und nicht mit Blick auf seine Anwendbarkeit.
Denn einerseits kann der Satz von Rolle auf Netzwerken auch durchaus für Funktionen, die ihr Maximum (beziehungsweise Minimum) in einer Ecke annehmen gelten (zum Beispiel, wenn lokale Extrema bestehen) und andererseits ist die Bedingung des Satzes generell nicht allzu gut anwendbar, da es in der Regel nicht immer möglich ist die Extrema einer Funktion einfach zu bestimmen.

Wir wollen also versuchen eine Version des Satzes zu erarbeiten, die allgemeinere Gültigkeit besitzt.

Aufgrund der möglichen Komplexität von Netzwerken (besonders mit dem Stichwort nicht gleichgerichteter Kanten) werden wir einige Probleme haben geeignete Bedingungen für unseren Satz zu finden. Beispielsweise genügt eine einfache Forderung von stetiger Differenzierbarkeit der Funktion leider nicht für einen besseren Satz von Rolle, wie das folgende Beispiel veranschaulichen soll:

5.2.4 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $V := \{v_1, v_2, v_3\}$, $E := \{e_1, e_2\}$ und $\rho(e_1) := 1 =: \rho(e_2)$.
Sei weiter $e_1 = (v_1, v_2)$ und $e_2 = (v_3, v_2)$, die Kanten sind also nicht gleichgerichtet, da $\operatorname{ter}(e_1) = \operatorname{ter}(e_2)$ gilt.
Sei nun f eine Funktion auf G mit

$$f_{v_1} = 0, \quad f_{e_1}(x_{e_1}) = x_{e_1}, \quad f_{v_2} = 1, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) = x_{e_2} \quad \text{und} \quad f_{v_3} = 0.$$

f ist also stetig auf ganz G und auch die Ableitungen

$$f'_{e_1}(x_{e_1}) = 1 \quad \text{und} \quad f'_{e_2}(x_{e_2}) = 1$$

besitzen eine stetige Fortsetzung auf die Ecken von G

$$\lim_{x_e \to v_2} f'_e(x_e) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x_{e_1} \downarrow v_1} f'_{e_1}(x_{e_1}) = 1 = \lim_{x_{e_2} \downarrow v_3} f'_{e_2}(x_{e_2}).$$

Und trotzdem gilt der Satz von Rolle nicht, da für $a_{e_1} = 0,5 = b_{e_2}$ zwar gilt $f(a_{e_1}) = f(b_{e_2})$, die Ableitung aber nirgendwo 0 wird.
Auch hier wurde versucht in Abbildung 3 das Beispiel zu visualisieren, indem wieder e_1 und e_2 auf die Ebene projiziert wurden.

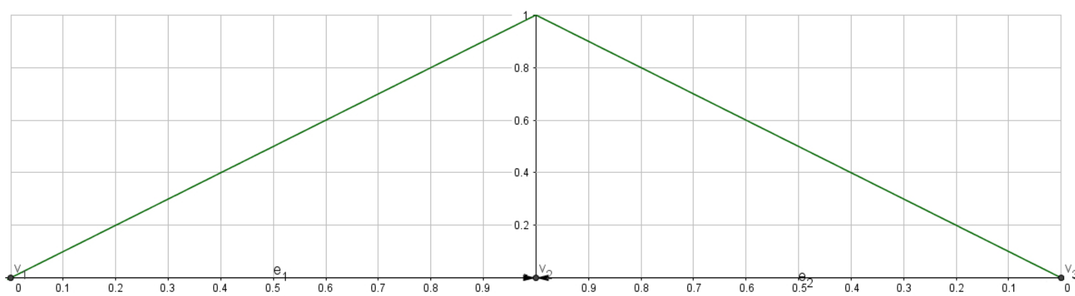

Abbildung 3: Visualisierung des Beispiels 5.2.4.

Betrachten wir nun noch einmal Satz 5.2.3. Der klassische Satz von Rolle versagt hierbei nur, wenn Extremwerte auf die Kanten des Netzwerkes fallen, also ist es eine naheliegende Folgerung einen Satz von Rolle zu konstruieren, der gewährleistet, dass die Ableitung der untersuchten Funktion entweder irgendwo innerhalb der Kanten verschwindet oder die Funktion selbst auf einer Ecke ein Minimum oder Maximum annimmt. Zur Charakterisierung ebendieser Extremstellen soll die folgende Definition dienen, vor die wir aber noch eine kleine Notation schieben:

5.2.5 Notation (Signum)**:**
Die Funktion $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$sgn(x) := \begin{cases} -1 & \text{, falls } x < 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0, \\ 1 & \text{, falls } x > 0, \end{cases}$$

bezeichnen wir als **Signum- oder Vorzeichenfunktion**.

5.2.6 Definition (Charakterisierende Matrix der Extremstellen und Sattelpunkte)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und differenzierbare Funktion auf G und sei $v \in V$. Existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodass mit

$$F(v) := \{e \in E \mid v = \mathrm{ter}(e)\} \text{ und } A(v) := \{e \in E \mid v = \mathrm{init}(e)\}$$

gilt, dass

$$\mathrm{sgn}(f_e'(x_1)) = \mathrm{sgn}(f_e'(x_2))$$

für alle $x_1, x_2 \in [\rho(e) - \varepsilon, \rho(e)) \subseteq [\mathrm{init}(e), v]$ und alle $e \in F(v)$, beziehungsweise

$$\mathrm{sgn}(f_{\tilde{e}}'(y_1)) = \mathrm{sgn}(f_{\tilde{e}}'(y_2))$$

für alle $y_1, y_2 \in (0, \varepsilon] \subseteq [v, \mathrm{ter}(\tilde{e})]$ und alle $\tilde{e} \in A(v)$ (also ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodass sich das Vorzeichen der Ableitung auf den genannten Intervallen nicht mehr ändert), dann definieren wir für ein solches $\varepsilon > 0$ die **Diagonalmatrix**

$$D_\varepsilon f(v) := \mathrm{diag}\left(\frac{\partial f_e}{\partial \nu}(v - \varepsilon)\right)_{e \sim v},$$

mit

$$\frac{\partial f_e}{\partial \nu}(v - \varepsilon) := \begin{cases} -f_e'(\varepsilon) & \text{, falls } v = \mathrm{init}(e) \\ f_e'(\rho(e) - \varepsilon) & \text{, falls } v = \mathrm{ter}(e) \end{cases}$$

Eine Ecke $v \in V$ mit $\mathrm{d}(v) \geq 3$ bezeichnen wir nun als **Sattelpunkt**, falls für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Matrix $D_\varepsilon f(v)$ indefinit ist.

Wie bereits in Definition 5.2.6 angedeutet, lässt sich nicht für alle Funktionen um jede Ecke $v \in V$ eine Matrix $D_\varepsilon f(v)$ finden, auch wenn man das $\varepsilon > 0$ noch so klein wählt. Selbst dann nicht, wenn zusätzlich noch die Ableitung einen stetigen Übergang besitzt. Dieser Umstand soll in dem folgenden Beispiel verdeutlichen werden:

5.2.7 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $V := \{v_1, v_2, v_3\}$, $E := \{e_1, e_2\}$ und $\rho(e_1) := \frac{1}{2\pi} =: \rho(e_2)$.
Es gelte $e_1 = (v_1, v_2)$ und $e_2 = (v_2, v_3)$, die Kanten sind also gleichgerichtet.
Sei nun f eine Funktion auf G mit

$$f_{v_1} := 0, \quad f_{e_1}(x_{e_1}) := (x_{e_1} - \frac{1}{2\pi})^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x_{e_1} - \frac{1}{2\pi}}\right)$$

$$f_{v_2} := 0, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) := x_{e_2}^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x_{e_2}}\right), \quad \text{und} \quad f_{v_3} := 0.$$

Wegen

$$\lim_{x_{e_1} \downarrow v_1} f_{e_1}(x_{e_1}) = \lim_{x_e \to v_2} f_e(x_e) = \lim_{x_{e_2} \uparrow v_3} f_{e_2}(x_{e_2}) = 0$$

ist die Funktion f stetig auf ganz G (siehe hierzu auch die Abbildung 4).
Bei dem Versuch nun die Matrix $D_\varepsilon f(v_2)$ zu bilden stoßen wir nun aber auf ein Problem. Der Einfachheit halber betrachten wir zur Verdeutlichung erst einmal die Kante e_2. Wenn wir die Ableitung von f_{e_2} bilden, so erhalten wir

$$f_{e_2}'(x_{e_2}) = x_{e_2} \cdot \left(3x_{e_2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x_{e_2}}\right) - \cos\left(\frac{1}{x_{e_2}}\right)\right).$$

Um nun den Eintrag $\frac{\partial f_{e_2}}{\partial \nu}(v_2 - \varepsilon) = -f_{e_2}'(\varepsilon)$ zu erhalten bräuchten wir ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$, für das sich auf $(0, \varepsilon) \subseteq [v_2, v_3]$ das Vorzeichen von f_{e_2}' nicht mehr ändert.
Betrachten wir die Folge

$$a_n := \frac{1}{n \cdot \pi} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und beachten wir nun

$$f'_{e_2}(a_n) = -\frac{1}{n\pi} \cdot \cos(n\pi) = \begin{cases} 1/(n\pi) & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ -1/(n\pi) & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases},$$

dann sehen wir, dass wir für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N < \varepsilon$ finden, sodass $\operatorname{sgn}(f'_{e_2}(a_N)) \neq \operatorname{sgn}(f'_{e_2}(a_{N+1}))$.
Gleiches können wir auch für die Kante e_1 auf die Ecke v_2 zeigen, woraus folgt, dass für diese Funktion die Matrix $D_\varepsilon f(v_2)$ nicht existiert.

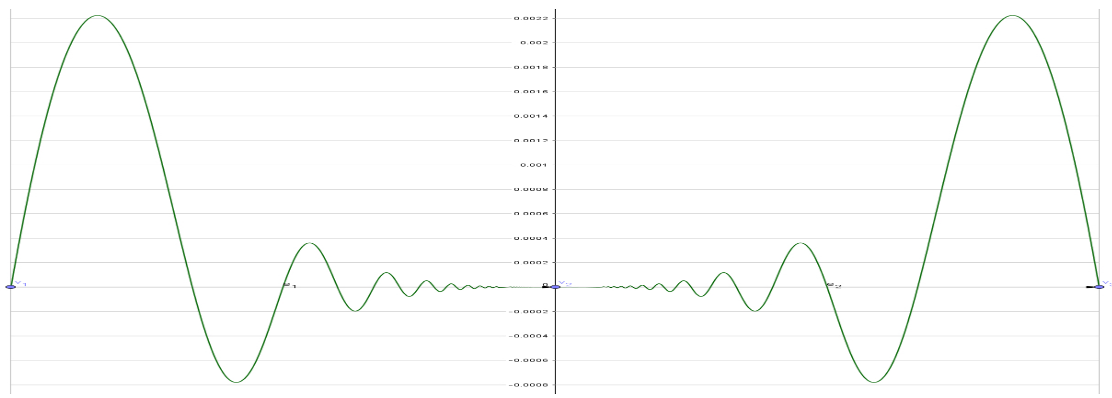

Abbildung 4: Visualisierung des Beispiels 5.2.7.

Mit Hilfe von Definition 5.2.6 können wir nun Extremwerte an den Ecken eines Netzwerks besser charakterisieren:

5.2.8 Lemma (Maxima und Minima auf Ecken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und differenzierbare Funktion auf G. Sei weiter $v \in V$ eine Ecke. Ist

1. $D_\varepsilon f(v)$ positiv semidefinit für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$, so hat f in v ein **Maximum**.
2. $D_\varepsilon f(v)$ negativ semidefinit für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$, so hat f in v ein **Minimum**.

Beweis. Wir beweisen das Lemma für die erste Aussage, da im Fall einer negativen Semidefinitheit alle Erklärungen äquivalent ablaufen:
Nach Satz 2.2.3 und Lemma 2.2.4 ist die Matrix $D_\varepsilon f(v)$ genau dann positiv semidefinit, wenn alle Elemente auf der Diagonalen $\frac{\partial f_e}{\partial \nu}(v - \varepsilon)$ größer oder gleich null sind.
Das bedeutet, dass die Funktion auf allen Kanten $e \in E$ mit $v = \operatorname{ter}(e)$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(v) \backslash \{v\}$ um v eine Ableitung f' besitzt, die größer oder gleich null ist und damit die Funktion f selbst ansteigt oder konstant ist und damit $f(x) \leq f(v)$ für alle $x \in \left((\bigcup_{e \in E} \{\mathring{e} \mid v = \operatorname{ter}(e)\}) \cap U_\varepsilon(v) \right)$.
Genauso gilt, dass die Funktion auf allen Kanten $e \in E$ mit $v = \operatorname{init}(e)$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(v) \backslash \{v\}$ um v eine Ableitung f' besitzt, die kleiner oder gleich null ist und damit die Funktion f selbst fällt oder konstant ist und damit $f(x) \leq f(v)$ für alle $x \in \left((\bigcup_{e \in E} \{\mathring{e} \mid v = \operatorname{init}(e)\}) \cap U_\varepsilon(v) \right)$.
Beides zusammen ergibt damit, dass in v ein Maximum vorliegen muss. $\square$

Nun können wir mit Hilfe von Definition 5.2.6 und Lemma 5.2.8 eine Zwischenversion des Satzes von Rolle aufstellen, die um einiges allgemeiner ist, als die von Satz 5.2.3:

5.2.9 Satz (Satz von Rolle auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und differenzierbare Funktion auf G, deren Ableitung auf dem Inneren der Topologischen Kanten stetig ist. Außerdem sei weiter
$U(V) := \{v \in V \mid \mathrm{d}(v) = 1\}$.
Gilt $|U(V)| \geq 2$ und ist $f(v) = f(w)$ für alle $v, w \in U(V)$, so gibt es ein $x \in \mathring{e}$ für ein $e \in E$ mit $f'(x) = 0$ oder es gibt eine Ecke $\tilde{v} \in V$, für die die Matrix $D_\varepsilon f(\tilde{v})$ für ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ existiert und positiv oder negativ definit ist.

Beweis. Wegen Satz 4.2.3 nimmt f auf G ein Minimum und ein Maximum an.
Ist f konstant auf ganz G, dann sind wir schon fertig, da die Ableitung von f dann auf dem Inneren jeder Kante gleich 0 wäre und unsere Aussage damit bewiesen wäre.
Sei nun also im Folgenden f nicht konstant. Da gilt, dass $f(v) = f(w)$ für alle $v, w \in U(V)$ ist, muss mindestens einer der beiden Extremwerte auf einem Punkt von G liegen, der ungleich dieser Ecken ist.
Angenommen es handelt sich dabei um das Maximum (im Falle des Minimums gilt das Folgende entsprechend) und dieses sei an der Stelle $x_0 \in G \setminus U(V)$.
Liegt der Punkt auf dem Inneren einer Kante, dann ist schon alles gezeigt, da wir dann den Satz 5.2.3 anwenden können und $f'(x_0) = 0$ gelten muss (hierfür müssten wir einfach eine Verbindung von zwei Punkten aus $U(V)$ betrachten, für die gilt, dass x_0 Element dieser Verbindung ist).
Wir nehmen nun also an, dass das Maximum x_0 an einer Ecke mit Grad größer 1 liegt und dass das Vorzeichen der Ableitung auf dem Inneren jeder Kante, die x_0 als Start- oder Endpunkt haben nicht wechselt und ungleich null ist (ansonsten wären wir auch hier wieder fertig, da wir wegen der Stetigkeit von f' auf dem Inneren jeder Kante einen Punkt finden können, für den gilt, dass die Ableitung an diesem Punkt null wird).
Ist dies gegeben, dann muss für alle $e \in F(x_0) := \{\tilde{e} \in E \mid x_0 = \mathrm{ter}(\tilde{e})\}$ aufgrund unserer Maximumsannahme von x_0 gelten, dass es ein $\varepsilon_1 > 0$ geben muss, sodass für alle $x \in [\rho(e) - \varepsilon, x_0) \subseteq [\mathrm{init}(e), x_0]$ gilt, dass $f'_e(x) > 0$.
Anders herum muss für alle $e \in A(x_0) := \{\tilde{e} \in E \mid x_0 = \mathrm{init}(\tilde{e})\}$ aufgrund der Maximumsannahme von x_0 gelten, dass es ein $\varepsilon_2 > 0$ geben muss, sodass für alle $y \in (x_0, \varepsilon] \subseteq [x_0, \mathrm{ter}(e)]$ gilt, dass $-f'_e(y) > 0$.
Setzen wir nun also $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, so muss wegen Lemma 2.2.4 und Satz 2.2.3 gelten, dass $D_\varepsilon f(x_0)$ existiert und positiv definit ist.
Entsprechend erhalten wir im Falle des Minimums an x_0, dass $D_\varepsilon f(x_0)$ negativ definit sein müsste. □

Der Satz 5.2.9 ist schon eine weitaus brauchbarere Version des Satzes von Rolle, als Satz 5.2.3, allerdings ist es immer noch möglich seine Aussage ein wenig zu verbessern. Hierfür benötigen wir aber noch folgende Verschärfung der Differenzierbarkeit auf Netzwerken:

5.2.10 Definition (Kirchhoff-Differenzierbarkeit)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und differenzierbare Funktion auf G. Wir nennen f **Kirchhoff-differenzierbar auf dem Netzwerk** G, wenn f die sogenannte **Kirchhoff-Bedingung**

$$\sum_{e \in F(v)} \lim_{x_e \uparrow v} f'_e(x_e) = \sum_{e \in A(v)} \lim_{x_e \downarrow v} f'_e(x_e)$$

für alle $v \in V$ mit $\mathrm{d}(v) > 1$ erfüllt, wobei die auftretenden Grenzwerte Kantenweise existieren müssen und des weiteren gilt, dass

$$F(v) := \{e \in E \mid v = \mathrm{ter}(e)\} \text{ und } A(v) := \{e \in E \mid v = \mathrm{init}(e)\}$$

ist.

Nun können wir zwei finale Ergebnisse zum Satz von Rolle beweisen:

5.2.11 Satz (Starker Satz von Rolle)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und Kirchhoff-differenzierbare Funktion auf G, deren Ableitung in jedem Punkt auf dem Inneren der Topologischen Kanten von G stetig ist. Sei weiter $U(V) := \{v \in V \mid \mathrm{d}(v) = 1\}$.
Gilt $|U(V)| \geq 2$ und ist $f(v) = f(w)$ für alle $v, w \in U(V)$, so gibt es ein $x \in \mathring{e}$ für ein $e \in E$ mit $f'(x) = 0$ oder es gibt eine Ecke $\tilde{v} \in V \setminus U(V)$, für die die Matrix $D_\varepsilon f(\tilde{v})$ für ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ existiert und positiv oder negativ definit ist und für die gilt, dass $\lim\limits_{x_e \to \tilde{v}} f'_e(x_e) = 0$ ist.

Beweis. Alle Aussagen, bis auf das $\lim\limits_{x_e \to \tilde{v}} f'_e(x_e) = 0$ im Falle der positiven, beziehungsweise negativen Definitheit der Matrix $D_\varepsilon f(\tilde{v})$ für ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ haben wir bereits im Satz 5.2.9 bewiesen.
Wir machen da weiter, wo wir bei dem Beweis von Satz 5.2.9 aufgehört haben und betrachten die Situation, dass das Maximum an der Stelle $x_0 \in V \setminus U(V)$ liegt und dass das Vorzeichen der Ableitung auf dem Inneren jeder Kante, die x_0 als Start- oder Endpunkt haben nicht wechselt und ungleich null ist.
Wir haben bereits gezeigt, dass es für alle $e \in F(x_0) := \{\tilde{e} \in E \mid x_0 = \mathrm{ter}(\tilde{e})\}$ ein $\varepsilon_1 > 0$ geben muss, sodass für alle $x \in [\rho(e) - \varepsilon, x_0) \subseteq [\mathrm{init}(e), x_0]$ gilt, dass $f'_e(x) > 0$ ist. Daraus können wir folgern, dass für jede Kante $e \in F(x_0)$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f'_e(x) \geq 0$$

gilt.
Genauso können wir für alle $e \in A(x_0) := \{\tilde{e} \in E \mid x_0 = \mathrm{init}(\tilde{e})\}$ folgern, dass es ein $\varepsilon_2 > 0$ geben muss, sodass für alle $y \in (x_0, \varepsilon] \subseteq [x_0, \mathrm{ter}(e)]$ gilt, dass $f'_e(x) < 0$ ist und damit gilt, dass

$$\lim_{x \downarrow x_0} f'_e(x) \leq 0$$

für alle $e \in A(x_0)$ ist.
Betrachten wir nun die Kirchhoff Bedingung an x_0

$$\sum_{e \in F(x_0)} \lim_{x_e \uparrow x_0} f'_e(x_e) = \sum_{e \in A(x_0)} \lim_{x_e \downarrow x_0} f'_e(x_e),$$

dann folgt mit den beiden oberen Schlussfolgerungen für den Grenzwert, dass wir für die linke Seite der Gleichung einen Wert erhalten, der größer oder gleich null sein muss und auf der rechten Seite der Gleichung einen Wert, der kleiner oder gleich null sein muss.
Insgesamt muss also gelten

$$\sum_{e \in F(x_0)} \lim_{x_e \uparrow x_0} f'_e(x_e) = 0 = \sum_{e \in A(x_0)} \lim_{x_e \downarrow x_0} f'_e(x_e),$$

was nur möglich ist, wenn jedes einzelne Glied der Summen gleich null war.
Damit wäre unsere Behauptung für den Fall bewiesen, dass es sich bei x_0 um ein Maximum handelt. Im Falle des Minimums an x_0 kann man aber ganz entsprechend argumentieren, womit alle Aussagen gezeigt wären. $\square$

Nun stellen wir noch ein letztes Ergebnis zum Satz von Rolle in dieser Arbeit vor, den sogenannten

5.2.12 Satz (Schwacher Satz von Rolle)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige und stetig differenzierbare Funktion auf G. Sei weiter $U(V) := \{v \in V \mid \mathrm{d}(v) = 1\}$.
Existieren mindestens zwei Ecken $v, w \in U(V)$ mit $v \neq w$ und $f(v) = f(w)$, so gibt es ein $x \in \mathring{e}$ für ein $e \in E$ mit $f'(x) = 0$ oder es gibt eine Ecke $\tilde{v} \in V \setminus U(V)$, für die die Matrix $D_\varepsilon f(\tilde{v})$ für ein ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ positiv oder negativ definit oder indefinit ist.

Beweis. Seien also $v, w \in U(V)$ mit $v \neq w$ und $f(v) = f(w)$. Betrachten wir die Verbindung $L(v, w)$ von v nach w und insbesondere den Graphen $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, der zu dessen Konstruktion genutzt wurde. Da v und w beides Ecken waren, gilt nach Definition 3.3.1−1, dass $\tilde{V} \subseteq V$ und $\tilde{E} \subseteq E$. Damit können wir $\tilde{G}$ zu einem Netzwerk $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \rho)$ erweitern. Für das Netzwerk $\tilde{G}$ gilt, dass f auf diesem stetig und stetig differenzierbar ist und dass für alle $v, w \in U(\tilde{V})$ $f(v) = f(w)$ gilt (da $U(\tilde{V})$ nur diese zwei Elemente hat). Damit können wir Satz 5.2.9 anwenden, der uns entweder einen Punkt x_0 auf dem Inneren einer Kante garantiert, für den $f'(x_0) = 0$ ist oder eine Ecke $\tilde{v} \in \tilde{V}$, für die die Matrix $\tilde{D}_{\varepsilon_1} f(\tilde{v})$ auf $\tilde{G}$ für ein ausreichend kleines $\varepsilon_1 > 0$ positiv oder negativ definit ist ($\tilde{D}_{\varepsilon_1} f(\tilde{v})$ bezieht sich hier nur auf $\tilde{G}$).
Wegen $\tilde{E} \subseteq E$ müsste im ersten Fall der Punkt x_0 auch auf G eine Nullstelle der Ableitung von f sein und wir wären damit fertig.
Betrachten wir also die Stelle $\tilde{v} \in \tilde{V} \subseteq V$ und damit den Fall, dass die Matrix $\tilde{D}_{\varepsilon_1} f(\tilde{v})$ positiv oder negativ definit ist:
Für alle $e \in F(\tilde{v}) := \{\tilde{e} \in E \mid \tilde{v} = \mathrm{ter}(\tilde{e})\}$ muss es entweder (insofern die Menge nicht leer ist), ein $\varepsilon_e > 0$ geben, sodass für alle $x_1, x_2 \in [\rho(e) - \varepsilon_e, \tilde{v}) \subseteq [\mathrm{init}(e), \tilde{v}]$ gilt $\mathrm{sgn}(x_1) = \mathrm{sgn}(x_2) \neq 0$ oder aber es gibt wegen der Stetigkeit von f' auf dem Inneren von e eine Stelle, in der f' verschwindet. Im zweiten Fall wären wir schon fertig, da wir dann eine Nullstelle der Ableitung auf einer Kante gefunden hätten, also betrachten wir den ersten Fall und definieren $\varepsilon_2 := \min\limits_{e \in F(\tilde{v})} \{\varepsilon_e\}$.
Für alle $e' \in A(\tilde{v}) := \{\tilde{e} \in E \mid \tilde{v} = \mathrm{init}(\tilde{e})\}$ begründen wir ganz entsprechend, dass es entweder (insofern die Menge nicht leer ist), ein $\varepsilon_{e'} > 0$ geben, sodass für alle $x_1, x_2 \in [\rho(e') - \varepsilon_{e'}, \tilde{v}) \subseteq [\mathrm{init}(e'), \tilde{v}]$ gilt $\mathrm{sgn}(x_1) = \mathrm{sgn}(x_2) \neq 0$ oder aber es gibt wegen der Stetigkeit von f' auf dem Inneren von e' eine Stelle, in der f' verschwindet.
Wieder betrachten wir den ersten Fall, da wir beim zweiten wieder fertig wären, da wir dann eine Nullstelle der Ableitung auf einer Kante gefunden hätten, und definieren $\varepsilon_3 := \min\limits_{e' \in A(\tilde{v})} \{\varepsilon_{e'}\}$.
Letztlich gibt dies nun für diesen Fall ein $\varepsilon := \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ und damit eine Matrix $D_\varepsilon f(\tilde{v})$, deren Diagonaleinträge allesamt ungleich null sein müssen, wodurch mit Lemma 2.2.4 und Satz 2.2.3 gilt, dass diese nur positiv definit, negativ definit oder indefinit sein kann, womit alles gezeigt wäre. □

Eine Folgerung wie in Satz 5.2.11, dass bei einer zusätzlichen Kirchhoff-Differenzierbarkeit von f bei Existenz einer positiv oder negativ semidefiniten Matrix die Ableitung in der zugehörigen Ecke null werden muss ist beim schwachen Satz von Rolle nicht gegeben. Dies soll das folgende Beispiel zeigen:

5.2.13 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $V := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und $\rho(e_i) := 2$, für $i = 1, 2, 3, 4$.
Es gelte $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_3, v_2)$, $e_3 = (v_2, v_4)$ und $e_5 = (v_2, v_5)$.
Sei nun f eine Funktion auf G mit

$$f_{v_1} := 0, \quad f_{v_2} := 4, \quad f_{v_3} := 0, \quad f_{v_4} := 16, \quad f_{v_5} := 16$$

und

$$f_{e_1}(x_{e_1}) := x_{e_1}^2, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) := x_{e_2}^2, \quad f_{e_3}(x_{e_3}) := (x_{e_3} + 2)^2, \text{ sowie } f_{e_4}(x_{e_4}) := (x_{e_4} + 2)^2.$$

Die gleichgerichteten Kanten e_1, e_4 und e_2, e_3 bilden also einen Parabelabschnitt. Siehe hierzu auch zur Verdeutlichung Abbildung 5, hierbei wurden die Kantenpaare e_1, e_2 und e_3, e_4 für Anschauungszwecke getrennt voneinander gezeichnet.
Die Funktion f ist damit auf ganz G stetig und wegen

$$\lim_{x_{e_1}\uparrow v_2} f'_{e_1}(x_{e_1}) = 4 = \lim_{x_{e_2}\uparrow v_2} f'_{e_2}(x_{e_2}) \quad \text{, sowie} \quad \lim_{x_{e_3}\downarrow v_2} f'_{e_3}(x_{e_3}) = 4 = \lim_{x_{e_4}\downarrow v_2} f'_{e_4}(x_{e_4})$$

Kirchhoff-differenzierbar.
Es gilt sowohl $f_{v_1} = f_{v_3}$, als auch $f_{v_4} = f_{v_5}$ für die Ecken von G mit Grad eins. Damit erfüllt f auf G die Bedingungen des Satzes 5.2.12 und tatsächlich gilt für zum Beispiel $\varepsilon = 1$:

$$D_\varepsilon f(v_2) = \begin{pmatrix} f'_{e_1}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f'_{e_2}(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f'_{e_3}(1) & 0 \\ 0 & 0 & & -f'_{e_4}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

das heißt die Matrix ist nach Lemma 2.2.4 und Satz 2.2.3 indefinit und somit liegt nach Definition 5.2.6 an v_2 ein Sattelpunkt vor, allerdings gilt für diesen trotz der gültigen Kirchhoff-Bedingung von f' an v_2

$$\lim_{x_e \to v_2} f_e(x_e) = 4 \neq 0.$$

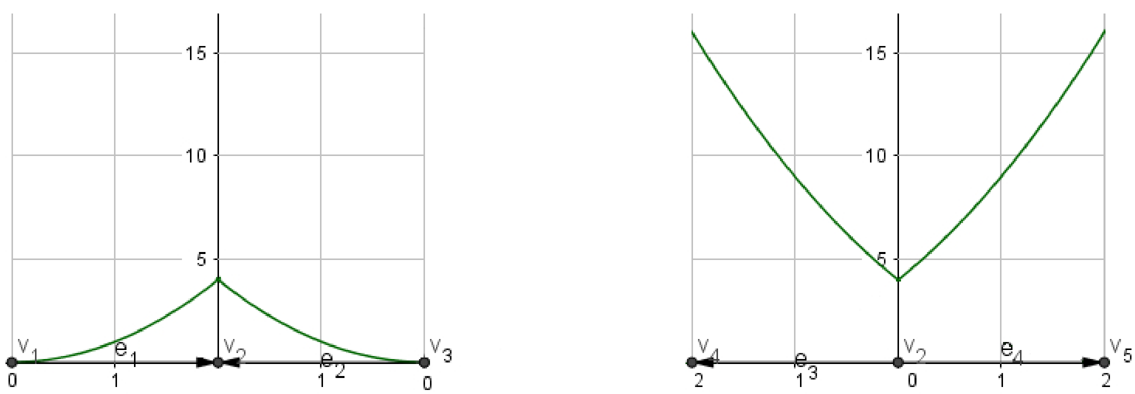

Abbildung 5: Visualisierung des Beispiels 5.2.13. Man beachte die gemeinsame Ecke v_2, in der die Teilfunktionen $f_{e_1}, \ldots, f_{e_4}$ im realen Fall ineinander übergehen.

5.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf Netzwerken

Der Satz von Rolle ist Grundlage für den Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und so verwundert es nicht, dass dieser ohne Probleme auf Kanten angewendet werden kann und hier noch einmal wiederholt sei:

5.3.1 Satz (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf G. Sei $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$ für ein $e \in E$ eine topologische Kante.
Sei weiter $I := [a, b] \subseteq [\text{init}(e), \text{ter}(e)]$ ($a \neq b$) und f stetig auf I und differenzierbar auf dem Inneren von I.
Dann gibt es mindestens ein ξ im Inneren von I mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{\beta - \alpha} = f'(\xi)$$

wobei

$$\alpha := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } a = \operatorname{init}(e) \\ a & \text{, wenn } a \in \mathring{e} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \beta := \begin{cases} b & \text{, wenn } b \in \mathring{e} \\ \rho(e) & \text{, wenn } b = \operatorname{ter}(e) \end{cases}$$

Anstelle von $(\beta - \alpha)$ kann man auch $\mathrm{l}(L(a,b))$ schreiben, für eine Verbindung von a nach b mit $L(a,b) = I$.

Die Frage ist nun, ob man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung mithilfe der gleichen Voraussetzung wie für Satz 5.2.3 auf Netzwerken anwenden kann. Die Antwort lautet nein, wie das folgende Beispiel zeigt:

5.3.2 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $V = (v_1, v_2, v_3)$, $E = (e_1, e_2)$ und $\rho(e_1) = 1 = \rho(e_2)$.
Sei weiter $e_1 = (v_1, v_2)$ und $e_2 = (v_2, v_3)$, die Kanten sind also benachbart mit gemeinsamer Ecke v_2 und gleichgerichtet, da $\operatorname{ter}(e_1) = \operatorname{init}(e_2)$.
Sei nun f eine Funktion mit

$$f_{v_1} = 0, \quad f_{e_1}(x_{e_1}) = 2x_{e_1}, \quad f_{v_2} = 2, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) = x_{e_2} + 2 \quad \text{und} \quad f_{v_3} = 3.$$

Die Funktion f ist also stetig auf G und nimmt für $a_{e_1} = 0{,}5$ und $b_{e_2} = 0{,}5$ auf der kompakten Menge $L(a,b) = [a_{e_1}, \operatorname{ter}(e_1)] \cup [\operatorname{init}(e_2), b_{e_2}]$ ihr Minimum bei $f(a_e) = 1$ und ihr Maximum bei $f(b_{e_2}) = 2{,}5$, also nicht an den Ecken von G, an.
Es gilt:

$$\frac{f(b_{e_2}) - f(a_{e_1})}{l(L(a_{e_1}, b_{e_2}))} = \frac{2{,}5 - 1}{1} = 1{,}5.$$

Da aber

$$f'_{e_1}(x_{e_1}) = 2 \quad \text{und} \quad f'_{e_2}(x_{e_2}) = 1$$

ist, kann der Mittelwertsatz unter diesen Bedingungen auf G nicht gelten.

Wie auch bei den anderen Beispielen wurde dieses in Abbildung 6 visualisiert.

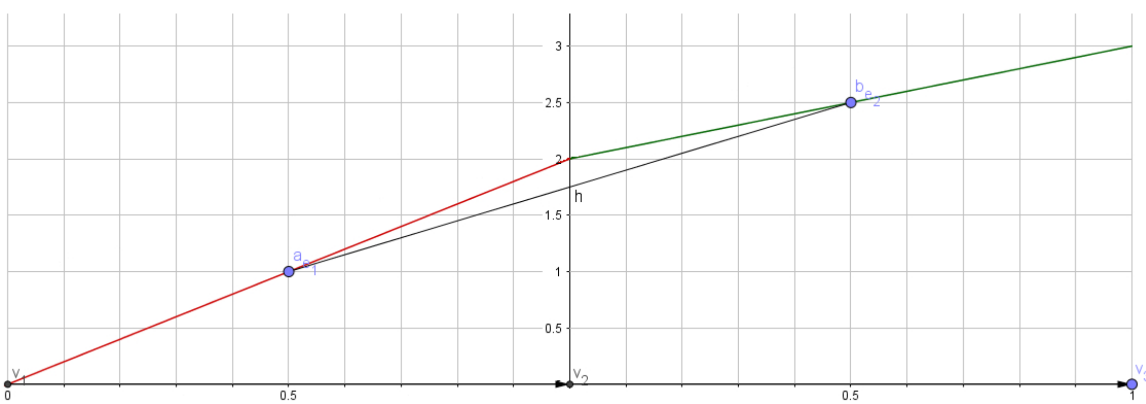

Abbildung 6: Visualisierung des Beispiels 5.3.2.

Satz 5.2.3 hilft uns beim Mittelwertsatz auf Netzwerken also nicht weiter. Nun müssen wir also prüfen, ob die beiden Hauptergebnisse des letzten Abschnitts, der starke oder schwache Satz von Rolle, eine Grundlage für einen funktionierenden Mittelwertsatz auf Netzwerken liefert. Diese Frage lässt sich gleich vorweg sehr verhalten bejahen. Verhalten deshalb, weil wir beim Mittelwertsatz auf einige Einschränkungen stoßen, was das folgende Beispiel (nicht notwendigerweise in Gänze) aufzeigen soll:

5.3.3 Beispiel:
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk mit $V := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und $\rho(e_i) := 2$, für $i = 1, 2, 3, 4$.
Es gelte $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_3, v_2)$, $e_3 = (v_2, v_4)$ und $e_5 = (v_2, v_5)$.
Sei nun f eine Funktion auf G mit

$$f_{v_1} := 0, \quad f_{v_2} := 2, \quad f_{v_3} := 0, \quad f_{v_4} := 4, \quad f_{v_5} := 4$$

und

$$f_{e_1}(x_{e_1}) := x_{e_1}, \quad f_{e_2}(x_{e_2}) := x_{e_2}, \quad f_{e_3}(x_{e_3}) := x_{e_3} + 2, \text{ sowie } f_{e_4}(x_{e_4}) := x_{e_4} + 2.$$

Die gleichgerichteten Kanten e_1, e_4 und e_2, e_3 bilden also eine Gerade. Siehe hierzu auch zur Verdeutlichung Abbildung 7, hierbei wurden die Kantenpaare e_1, e_2 und e_3, e_4 für Anschauungszwecke getrennt voneinander gezeichnet.
Die Funktion f ist damit auf ganz G stetig und wegen

$$\lim_{x_{e_1} \uparrow v_2} f'_{e_1}(x_{e_1}) = 2 = \lim_{x_{e_2} \uparrow v_2} f'_{e_2}(x_{e_2}) \quad , \text{ sowie} \qquad \lim_{x_{e_3} \downarrow v_2} f'_{e_3}(x_{e_3}) = 2 = \lim_{x_{e_4} \downarrow v_2} f'_{e_4}(x_{e_4})$$

Kirchhoff-differenzierbar.
Hierbei gilt nun, dass

$$\frac{f(v_5) - f(v_1)}{\operatorname{dist}(v_1, v_5)} = \frac{f(v_4) - f(v_3)}{\operatorname{dist}(v_3, v_4)} = 1$$

ist, was tatsächlich der Ableitung von f auf dem Inneren jeder Kante entspricht. Jedoch ist

$$\frac{f(v_3) - f(v_1)}{\operatorname{dist}(v_1, v_3)} = \frac{f(v_5) - f(v_4)}{\operatorname{dist}(v_4, v_5)} = 0,$$

was keinem Punkt der Ableitung entspricht.

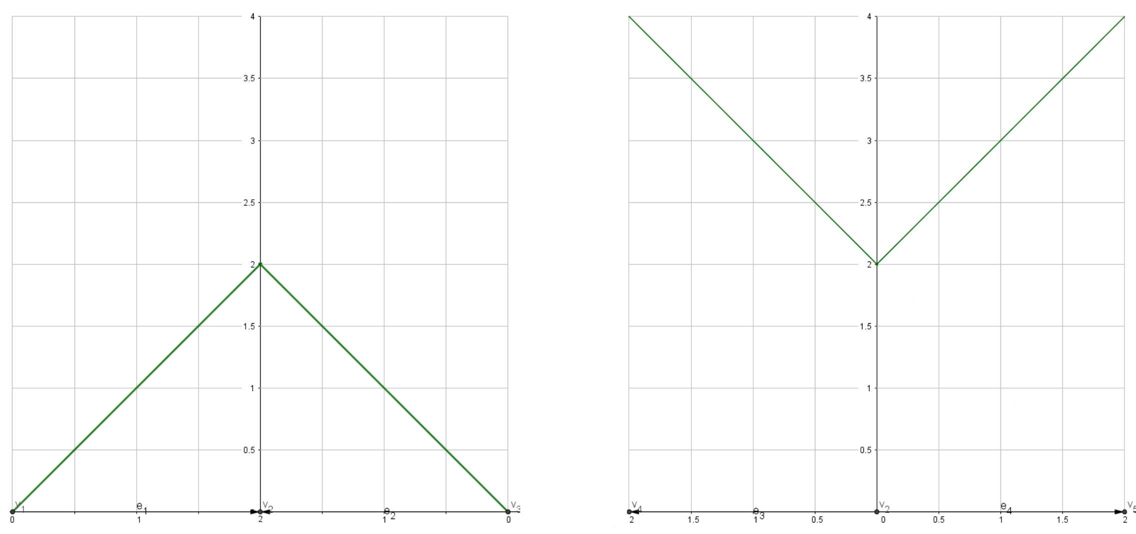

Abbildung 7: Visualisierung des Beispiels 5.3.3. Man beachte die gemeinsame Ecke v_2, in der die Teilfunktionen $f_{e_1}, \dots, f_{e_4}$ im realen Fall ineinander übergehen.

Das Beispiel gibt uns eine Situation, in der der Mittelwertsatz funktioniert und eine, in der das nicht der Fall ist. Solch ein Umstand ist in der Regel wenig nützlich, da es kaum durchführbar ist alle auftretenden möglichen Werte zu testen. Allerdings können wir trotzdem auf Basis von Satz 5.2.11 einen Mittelwertsatz formulieren, nämlich eine Form des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes, wie man ihn zum Beispiel in [2] Kapitel 15.3 findet:

5.3.4 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f, g seien stetige und Kirchhoff-differenzierbare Funktionen auf G, deren Ableitungen auf dem Inneren der Topologischen Kanten stetig sein sollen. Außerdem gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in G \setminus V$ und $\lim\limits_{x_e \to v} g'_e(x_e) \neq 0$ für alle $v \in V$ für die der Grenzwert existiert. Sei weiter $U(V) := \{v \in V \mid \mathrm{d}(v) = 1\}$.
Gilt $|U(V)| \geq 2$ und ist für alle $v, w \in U(V)$

$$\begin{aligned} f(v) &= a \quad , g(v) = c \\ f(w) &= b \quad , g(w) = d \end{aligned}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (die Funktionen nehmen auf allen Ecken mit Grad eins also höchstens zwei verschiedene Werte an), dann existiert entweder ein $\xi \in G \setminus V$, sodass gilt

$$\frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

oder ein $\xi \in (V \setminus U(V))$, sodass der Grenzwert

$$\lim_{x_e \to \xi} \frac{f'_e(x_e)}{g'_e(x_e)}$$

existiert und

$$\frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} = \lim_{x_e \to \xi} \frac{f'_e(x_e)}{g'_e(x_e)},$$

gilt.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes der reellen Analysis, wie man ihn in der oben genannten Quelle findet, betrachten wir die Funktion

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot (g(x) - g(w)) = f(x) - \frac{b - a}{d - c} \cdot (g(x) - c)$$

auf G.
Hierbei muss $g(v) \neq g(w)$ gelten, da wir sonst Satz 5.2.11 anwenden könnten und damit einen Punkt $x \in G \setminus V$ mit $g'(x) = 0$, beziehungsweise ein $v \in V$ mit $\lim\limits_{x_e \to v} g'_e(x_e) = 0$ finden könnten, was wir aber ausgeschlossen hatten.
Für $\Phi(x)$ gilt

1. $\Phi(x)$ ist stetig auf G:
   Da $\Phi(x)$ als Verkettung stetiger Funktionen auf dem Inneren jeder Kante stetig ist und da $f(x)$ und $g(x)$ stetig auf allen Ecken $u \in V$ sind, gilt
   $$\lim_{x_e \to u} \Phi_e(x_e) = \lim_{x_e \to u} \left(f_e(x_e) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot (g_e(x_e) - g(w)) \right) = f(u) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot (g(u) - g(w))$$

2. $\Phi(x)$ ist differenzierbar auf G mit stetiger Ableitung auf dem Inneren der Topologischen Kanten:
   Dies folgt, da $\Phi(x)$ als Verkettung differenzierbarer Funktionen, deren Ableitungen auf dem Inneren jeder Kante stetig sind, wiederrum auf diesen stetig und differenzierbar ist und damit gilt, dass
   $$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot g'(x),$$
   für $x \in G \setminus V$.

3. $\Phi(x)$ ist Kirchhoff-differenzierbar:
   Dies folgt aus der Kirchhoff-Differenzierbarkeit von f und g in allen Ecken $u \in V \setminus U(V)$, wobei wieder gilt, dass $F(u) := \{e \in E \mid u = \mathrm{ter}(e)\}$ und $A(u) := \{e \in E \mid u = \mathrm{init}(e)\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in F(u)} \lim_{x_e \uparrow u} \Phi'_e(x_e) &= \sum_{e\in F(u)} \lim_{x_e \uparrow u} \left(f'_e(x_e) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot g'_e(x_e) \right) \\
&= \left(\sum_{e\in F(u)} \lim_{x_e \uparrow u} f'_e(x_e) \right) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot \left(\sum_{e\in F(u)} \lim_{x_e \uparrow u} g'_e(x_e) \right) \\
&= \left(\sum_{e\in A(u)} \lim_{x_e \downarrow u} f'_e(x_e) \right) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot \left(\sum_{e\in A(u)} \lim_{x_e \downarrow u} g'_e(x_e) \right) \\
&= \sum_{e\in A(u)} \lim_{x_e \downarrow u} \left(f'_e(x_e) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot g'_e(x_e) \right) \\
&= \sum_{e\in A(u)} \lim_{x_e \downarrow u} \Phi'_e(x_e)
\end{aligned}$$

4. Es gilt $\Phi(u) = f(w) = b$ für alle $u \in U(V)$:
   Die Funktionen f und g nehmen auf den Ecken mit Grad eins nur höchstens zwei verschiedene Werte an, damit gilt für $v \in U(V)$

$$\Phi(v) = f(v) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot (g(v) - g(w)) = f(w) = b,$$

   sowie für $w \in U(V)$

$$\Phi(w) = f(w) - \frac{f(v) - f(w)}{g(v) - g(w)} \cdot (g(w) - g(w)) = f(w) = b.$$

Damit erfüllt $\Phi(x)$ die Voraussetzungen des starken Satzes von Rolle 5.2.11 und es muss damit entweder einen Punkt $\xi \in (G \setminus V)$ geben, für den gilt

$$\begin{aligned}
& 0 &=& \ \Phi'(\xi) \\
\Leftrightarrow\ & 0 &=& \ f'(\xi) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot g'(\xi) \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} &=& \ \tfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}
\end{aligned}$$

oder einen Punkt $\xi \in (V \setminus U(V))$ mit

$$0 = \lim_{x_e \to \xi} \Phi'_e(x_e)$$

Was bedeutet, dass der Grenzwert für jede einzelne Kante existiert und den Wert 0 annimmt. Für jede einzelne Kante existieren aber wegen der Kirchhoff-Bedingung auch die Grenzwerte von f' und g' an die Ecken, also folgt

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 0 &=& \lim_{x_e \to \xi} \left(f'_e(x_e) - \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} \cdot g'_e(x_e) \right) \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{f(v)-f(w)}{g(v)-g(w)} &=& \lim_{x_e \to \xi} \tfrac{f'_e(x_e)}{g'_e(x_e)}
\end{aligned}$$

□

Es wäre nun wünschenswert, wenn wir die Funktion $g(x)$ aus dem obigen Verallgemeinerten Mittelwertsatz auf Netzwerken durch den Abstand aus Definition 3.3.6 ersetzen könnten und damit einen Mittelwertsatz erhalten, der dem der reellen Analysis aus Satz 5.3.1 entspricht. Das dies leider nicht immer möglich ist zeigt das folgende Beispiel:

5.3.5 Beispiel:
Betrachten wir das Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ mit $V := \{v_1, \dots, v_5\}$, $E := \{e_1, \dots, e_5\}$ und $\rho(e_i) = 5$ für $i = 1, \dots 4$, sowie $\rho(e_5) = 4$. Für die Kantenrichtungen gilt $e_1 := (v_1, v_3)$, $e_2 := (v_2, v_3)$, $e_3 := (v_3, v_4)$, $e_4 := (v_3, v_5)$ und $e_5 = (v_4, v_5)$. Siehe hierzu auch die Skizze in Abbildung 8.
Wir betrachten nun die Abstandsfunktion

$$g(x) = \operatorname{dist}(v_1, x).$$

Die Funktion $g(x)$ ist stetig auf G, da für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ mit Hilfe der Vierecksungleichung (welche gilt, da dist(,) nach Satz 3.3.7 eine Metrik ist) gilt, dass

$$|\operatorname{dist}(v_1, x_k) - \operatorname{dist}(v_1, x)| \leq \operatorname{dist}(x_k, x) + \operatorname{dist}(v_1, v_1) = \operatorname{dist}(x_k, x) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Die Funktion $g(x)$ ist jedoch nicht differenzierbar, da für Punkte $x_{e_5} \in \mathring{e}_5$ gilt, dass

$$\begin{aligned} g(x_{e_5}) &= \operatorname{dist}(v_1, x_{e_5}) \\ &= \min\{\operatorname{dist}(v_1, v_4) + x_{e_5}; \operatorname{dist}(v_1, v_5) + \rho(e_5) - x_{e_5}\} \\ &= \min\{10 + x; 14 - x\} \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{x_{e_5}\uparrow 2} g'(x_{e_5}) = 1, \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x_{e_5}\downarrow 2} g'(x_{e_5}) = -1.$$

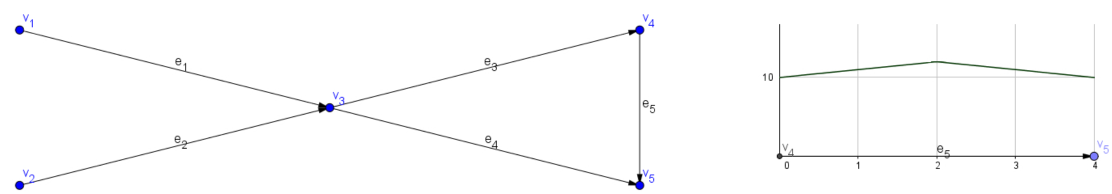

Abbildung 8: Visualisierung des Beispiels 5.3.5 links mit der Funktion $g(x)$ auf der Kante e_5 rechts.

Als letztes Ergebnis zum Mittelwertsatz auf Netzwerken sei nun noch der sogenannte Mittelwertsatz im Betrag vorgestellt. Dieser hat den Vorteil, dass er weit weniger Voraussetzungen hat, als Satz 5.3.4. Die Idee des Satzes stammt dabei im Wesentlichen aus [13] Kapitel IV 2.18 und zur Vorbereitung auf den Satz brauchen wir noch folgendes

5.3.6 Lemma (Mittelwertsatz im Betrag auf Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion auf G. Ist $[a, b] \subseteq [\operatorname{init}(e), \operatorname{ter}(e)]$ für ein $e \in E$ Teilmenge einer topologischen Kante (mit $a \neq b$) und f auf $[a, b]$ stetig, sowie auf (a, b) differenzierbar, dann gilt

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi\in(a,b)} |f'(\xi)| \cdot (\beta - \alpha),$$

wobei

$$\alpha := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } a = \operatorname{init}(e) \\ a & \text{, wenn } a \in \mathring{e} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \beta := \begin{cases} b & \text{, wenn } b \in \mathring{e} \\ \rho(e) & \text{, wenn } b = \operatorname{ter}(e) \end{cases}$$

ist.

Beweis. Nach Satz 5.3.1 gilt auf jeder Teilmenge jeder topologischen Kante $[a, b] \subseteq [\operatorname{init}(e), \operatorname{ter}(e)]$ für $e \in E$ und für ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

$$f(b) - f(a) = f'(\tilde{\xi}) \cdot (\beta - \alpha),$$

wobei α und β wie oben definiert sind.
Nehmen wir nun den Betrag und beachten, dass $\alpha < \beta$ gilt, dann folgt direkt die gewünschte Ungleichung, da $|f'(\tilde{\xi})| \leq \sup_{\xi \in (a,b)} |f'(\xi)|$ gelten muss:

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\tilde{\xi})|(\beta - \alpha) \leq \sup_{\xi \in (a,b)} |f'(\xi)| \cdot (\beta - \alpha)$$

□

Aufbauend auf dieses Ergebnis können wir nun den folgenden Satz beweisen:

5.3.7 Satz (Mittelwertsatz im Betrag auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $L(a, b)$ eine Verbindung von zwei Punkten $a, b \in G$. Ist f eine Funktion auf G, die auf ganz $L(a, b)$ stetig und in jedem Punkt $I := L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$ differenzierbar ist, dann gilt

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)| \cdot \mathrm{l}(L(a, b))$$

Beweis. Sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der zur Konstruktion von $L(a, b)$ verwendete Weg mit

$$\tilde{V} := \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\} \quad \text{und} \quad \tilde{E} := \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_n, b\}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(liegen a und/oder b auf einer Ecke, dann fallen die entsprechenden Elemente in $\tilde{E}$ und $\tilde{V}$ einfach weg und das folgende gilt entsprechend).
Da f stetig auf ganz $L(a, b)$ und differenzierbar auf dem Inneren aller Kanten $\tilde{e} \in \tilde{E}$ ist, können wir Lemma 5.3.6 auf jeder einzelnen Kante anwenden

$$\begin{array}{cc}
(1) & |f(v_1) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in (a, v_1)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(a, v_1)) \\
(2) & |f(v_2) - f(v_1)| \leq \sup_{\xi \in (v_1, v_2)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(v_1, v_2)) \\
\vdots & \vdots \\
(n) & |f(v_n) - f(v_{n-1})| \leq \sup_{\xi \in (v_{n-1}, v_n)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(v_{n-1}, v_n)) \\
(n+1) & |f(b) - f(v_n)| \leq \sup_{\xi \in (v_n, b)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(v_n, b))
\end{array}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung gilt

$$|f(v_2) - f(a)| = |f(v_1) - f(a) + f(v_2) - f(v_1)| \leq |f(v_1) - f(a)| + |f(v_2) - f(v_1)|.$$

Außerdem gelten die Abschätzungen

$$\sup_{\xi \in (a, v_1)} |f'(\xi)| \leq \sup_{\xi \in (a, v_1) \cup (v_1, v_2)} |f'(\xi)| \quad \text{sowie} \quad \sup_{\xi \in (v_1, v_2)} |f'(\xi)| \leq \sup_{\xi \in (a, v_1) \cup (v_1, v_2)} |f'(\xi)|.$$

Beachtet man dies, so erhält man durch Addition der beiden ersten Zeilen folgende Ungleichung:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) + (2) & |f(v_1) - f(a)| + |f(v_2) - f(v_1)| & \leq & \sup_{\xi \in (a, v_1)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(a, v_1)) + \sup_{\xi \in (v_1, v_2)} |f'(\xi)| \, \mathrm{l}(L(v_1, v_2)) \\
\Rightarrow & |f(v_2) - f(a)| & \leq & \sup_{\xi \in (a, v_1) \cup (v_1, v_2)} |f'(\xi)| \cdot (\mathrm{l}(L(a, v_1)) + \mathrm{l}(L(v_1, v_2)))
\end{array}$$

Führen wir dieses Schema rekursiv weiter, so erhalten wir am Ende

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in ((a, v_1) \cup \cdots \cup (v_n, b))} |f'(\xi)| \cdot (\mathrm{l}(L(a, v_1)) + \mathrm{l}(L(v_1, v_2)) + \cdots + \mathrm{l}(L(v_n, b))),$$

was vereinfacht zu unserer Ungleichung

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)| \cdot \mathrm{l}(L(a, b))$$

führt. □

6 Integrierbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir nun abschließend (Riemann-)Integrierbarkeit und damit verbundene Sätze der reellen Analysis auf Netzwerken betrachten.

6.1 Definition

Wir beginnen wieder wie mit den letzten beiden Kapiteln und erarbeiten uns als erstes eine brauchbare Definition des Riemann-Integrals.
Da allerdings besagte Integrale nur über reellen abgeschlossenen Intervallen definiert werden, starten wir mit einer Definition der Integrierbarkeit über den abgeschlossenen Kanten. Die folgende Definition basiert dabei auf der Definition uneigentlicher Integrale und wurde [14] Definition 12.7 entnommen und für unsere Anforderungen umgeschrieben:

6.1.1 Definition (Integrierbarkeit auf topologischen Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk, $e \in E$ eine Kante und $\tilde{f}_e$ eine wie in 3.2.1 definierte Funktion auf der topologischen Kante $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$, die für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ auf dem Intervall $[\varepsilon, \rho(e) - \varepsilon]$ im bekannten Sinne **Riemann-integrierbar** ist.
Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\rho(e)-\varepsilon} \tilde{f}_e(x_e)dx_e$ existiert, so sagen wir $\tilde{f}_e$ ist auf der topologischen Kante $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$ **integrierbar** und setzen

$$\int\limits_{\text{init}(e)}^{\text{ter}(e)} \tilde{f}_e(x_e)dx_e = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\rho(e)-\varepsilon} \tilde{f}_e(x_e)dx_e.$$

Ähnlich verfahren wir dabei mit Integralen über Teilmengen der topologischen Kanten der Form $[a, \text{ter}(e)] \subseteq [\text{init}(e), \text{ter}(e)]$, beziehungsweise $[\text{init}(e), b] \subseteq [\text{init}(e), \text{ter}(e)]$:

$$\int\limits_{a}^{\text{ter}(e)} \tilde{f}_e(x_e)dx_e = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{\rho(e)-\varepsilon} \tilde{f}_e(x_e)dx_e \quad \text{und} \quad \int\limits_{\text{init}(e)}^{b} \tilde{f}_e(x_e)dx_e = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{b} \tilde{f}_e(x_e)dx_e,$$

natürlich nur insofern die jeweiligen Grenzwerte existieren.

Diese Definition erlaubt uns nun die exakte Spezifizierung des Riemann-Integrals auf Netzwerken:

6.1.2 Definition (Integrierbarkeit auf Netzwerken)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine Funktion, die auf dem gesamten Netzwerk definiert ist. Sei weiter $\tilde{f}_e$ eine wie in 3.2.1 auf der topologischen Kante $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$ $e \in E$ definierte Teilfunktion von f.
Die Funktion f ist **integrierbar auf dem Netzwerk** G, wenn $\tilde{f}_e$ auf jeder topologischen Kante $[\text{init}(e), \text{ter}(e)]$ für $e \in E$ nach Definition 6.1.1 **Riemann-integrierbar** ist und wenn gilt

$$\sum_{e \in E} \int\limits_{\text{init}(e)}^{\text{ter}(e)} \tilde{f}_e(x_e)dx_e < \infty.$$

Ist f damit integrierbar auf G, dann bezeichnet wir das **Integral über dem Netzwerk** G mit

$$\int\limits_{G} f(x)d(x) := \sum_{e \in E} \int\limits_{\text{init}(e)}^{\text{ter}(e)} \tilde{f}_e(x_e)dx_e\ .$$

6.1.3 Bemerkungen:
Da wir bei Netzwerken $|E| < \infty$ voraussetzen, ist die Bedingung

$$\sum_{e \in E} \int \tilde{f}_e < \infty$$

aus Definition 6.1.2 bei integrierbaren $\tilde{f}_e$ für alle $e \in E$ automatisch gegeben.

Die Definition von Riemann-Integralen über Verbindungen machen wir ganz ähnlich wie die von 6.1.2, jedoch definieren wir zur Übersichtlichkeit vorher noch das Integral über Kantenabschnittsmengen:

6.1.4 Definition (Integrierbarkeit auf Kantenabschnittsmengen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G mit $a \neq b$. Sei weiter $L(a, b)$ eine Verbindung auf G von a nach b, $K(L)$ die zugehörige Kantenabschnittsmenge und f eine Funktion, die auf $K(L)$ definiert ist. Das **Integral** $\int_{K(L)} f(x)dx$ der Funktion f über $K(L)$ wird entsprechend der Definition der Kantenabschnittsmenge 3.3.4−1 bis 3 folgendermaßen definiert (natürlich nur sofern die folgenden Integrale existieren):

1. Gilt $K(L) = \emptyset$, dann ist
$$\int_{K(L)} f(x)dx = \int_{\emptyset} f(x)dx = 0.$$

2. Liegen a und b beide auf einer Kante, dann gibt es mehrere Möglichkeiten, wie das Integral über $K(L)$ aussehen kann. Sei dafür $a = a_e$ und $b = b_{\tilde{e}}$ mit $e, \tilde{e} \in E$ nicht notwendigerweise verschieden.

   (a) Liegen a und b beide auf der selben Kante und gilt $K(L) = [a, b]$, dann ist
   $$\int_{K(L)} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

   (b) Gilt hingegen $K(L) \neq [a, b]$, dann sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der Weg, der zur Konstruktion von $L(a, b)$ genutzt wurde. Hierbei sei $\tilde{V} = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\}$, für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist entsprechend Definition 6.1.1
   $$\int_{K(L)} f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^{v_1} f(x)dx + \beta \cdot \int_{v_n}^b f(x)dx,$$
   wobei gilt, dass
   $$\alpha := \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_1 = \mathrm{ter}(e) \\ -1 & \text{, falls } v_1 = \mathrm{init}(e) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \beta := \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_n = \mathrm{init}(\tilde{e}) \\ -1 & \text{, falls } v_n = \mathrm{ter}(\tilde{e}) \end{cases}$$

   (c) Sei wie in Definition 3.3.4−3 der Punkt a derjenige, der auf einer Kante $e \in E$ liegt und b der Punkt, der auf einer Ecke liegt (ansonsten gilt das folgende einfach entsprechend) und sei $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ der Weg, der zur Konstruktion von $L(a, b)$ genutzt wurde, wobei $V = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_n, b\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann gilt
   $$\int_{K(L)} f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^{v_1} f(x)dx,$$

wobei gilt, dass

$$\alpha := \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_1 = \mathrm{ter}(e) \\ -1 & \text{, falls } v_1 = \mathrm{init}(e) \end{cases} .$$

Aufbauend darauf können wir nun das Integral über Verbindungen definieren:

6.1.5 Definition (Integrierbarkeit auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G.
Sei weiter $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b, f eine Funktion, die auf $L(a, b)$ definiert ist, und $\tilde{E}(L)$ dabei die Menge aller Kanten, die auf der Verbindung L vollständig durchlaufen werden, sowie $K(L)$ die Kantenabschnittsmenge von L.
Gilt

$$\int\limits_{\mathrm{init}(e)}^{\mathrm{ter}(e)} f_e(x_e)dx_e < \infty \quad \text{für alle } e \in \tilde{E}(L) \text{ und} \quad \int\limits_{K(L)} f(x)dx < \infty,$$

dann **existiert das Integral über der Verbindung** $L(a, b)$ und ist gegeben durch

$$\int\limits_L f(x)dx := \left(\sum_{e \in \tilde{E}(L)} \int\limits_{\mathrm{init}(e)}^{\mathrm{ter}(e)} f_e(x_e)dx_e \right) + \int\limits_{K(L)} f(x)dx.$$

Abschließend wollen wir noch die Stammfunktion für Netzwerke definieren, der ursprüngliche Wortlaut für Stammfunktionen auf reellen Intervallen stammt dabei aus [14] Kapitel 12.1:

6.1.6 Definition (Stammfunktion auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk, $a, b \in G$ zwei Punkte, sowie $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b. Eine Funktion $F : L(a, b) \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : L(a, b) \to \mathbb{R}$, wenn F stetig differenzierbar ist und

$$F'_e = f_e \quad \text{sowie} \lim_{x_e \to v} F'_e(x_e) = f(v)$$

für alle $e \in E$ entlang der Verbindung $L(a, b)$ gilt.

6.2 Integrierbare Funktionen

Mit Hilfe des vorangegangenen Kapitels können wir uns nun eine große Klasse von auf einem Netzwerk integrierbaren Funktionen erarbeiten. Doch bevor wir zum allgemeinen Fall kommen beweisen wir vorher noch die

6.2.1 Korollar (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und sei f eine Funktion auf G. Ist die Funktion f **stetig** auf ganz G, dann ist die Funktion auch **integrierbar** auf G.

Beweis. Ist die Funktion f stetig auf ganz G, dann ist sie auch auf jeder topologischen Kante stetig und damit nach Bemerkung 3.1.5−4 stetig auf einer abgeschlossenen Menge, die nach Bemerkung 3.1.3 alle Eigenschaften eines Intervalls mit sich bringt (ein Isomorphismus eines reellen Intervalls ist). Wie man zum Beispiel in [12] Kapitel 11.3 nachlesen kann, ist das Integral für jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall definiert.
Damit gilt

$$\int\limits_{\mathrm{init}(e)}^{\mathrm{ter}(e)} f_e(x_e)dx_e < \infty \quad \text{für alle } e \in E.$$

Da nach unserer Voraussetzung $|E| < \infty$ gilt, ist damit

$$\sum_{e \in E} \int\limits_{\mathrm{init}(e)}^{\mathrm{ter}(e)} \tilde{f}_e < \infty$$

und somit ist f nach Definition 6.1.2 integrierbar. □

Das Korollar nennt eine wichtige und aus der Analysis bekannte Klasse integrierbarer Funktionen auf Netzwerken. Jedoch lässt sich diese Bedingung wie wir bereits angedeutet haben, durchaus noch etwas verallgemeinern, denn im Endeffekt ist es für die Integrierbarkeit gar nicht wichtig, ob die Funktion f auf dem ganzen Netzwerk stetig ist, beziehungsweise, dass die Funktionen auf jeder Ecke einen stetigen Übergang haben:

6.2.2 Satz (Integrierbarkeit stetiger Teilfunktion)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und f eine stetige Funktion auf G. Ist f stetig im Inneren jeder Kante $\mathring{e}$ für $e \in E$ und besitzt die zugehörige Teilfunktion f_e eine stetige Fortsetzung für

$$\lim_{x_e \downarrow 0} f_e(x_e) \quad \text{und} \quad \lim_{x_e \uparrow \rho(e)} f_e(x_e), \quad (x_e \in \mathring{e} = (0, \rho(e)))$$

dann ist f **integrierbar** auf ganz G.

Beweis. Besitz f eine stetige Fortsetzung auf 0 und $\rho(e)$ für jedes $e \in E$, dann ist f nach Kenntnissen aus der Analysis auf dem reellen abgeschlossenem Intervall $[0, \rho(e)]$ integrierbar. Nach Satz 6.1.1 ist damit f auch auf den topologischen Kanten $[\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ integrierbar und somit auf ganz G. □

6.2.3 Bemerkungen:
Der vorangegangene Satz sagt im Grunde aus, dass die Funktion in den Ecken des Netzwerks nicht notwendigerweise einen stetigen Übergang haben muss um integrierbar zu sein.

6.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung auf Netzwerken

Nun, da Integrierbarkeit auf Netzwerken und erste Klassen integrierbarer Funktionen geklärt wurden, können wir uns wieder auf verschiedene Sätze der Analysis auf Netzwerken widmen. Einen Einstieg soll der Mittelwertsatz bieten: Wie auch schon der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 5.3.1 lässt sich auch der Mittelwertsatz der Integralrechnung problemlos auf jeder Kante definieren und sei hier wieder ohne Beweis wiederholt:

6.3.1 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung auf Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $\tilde{f}_e$ eine wie in 3.2.1 auf der abgeschlossenen Kante $e \in E$ definierte Funktion.
Sei $I := [a, b] \subseteq [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ mit $a < b$ und $f_e : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I. Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_a^b f(x_e) dx_e.$$

Wobei gilt, dass

$$\alpha := \begin{cases} 0 & \text{, falls } a = \mathrm{init}(e) \\ a & \text{, falls } a \in \mathring{e} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \beta := \begin{cases} b & \text{, falls } b \in \mathring{e} \\ \rho(e) & \text{, falls } b = \mathrm{ter}(e) \end{cases}$$

ist.

Aber anders, als beim Mittelwertsatz der Differentialrechnung lässt sich der der Integralrechnung durchaus (in gewissem Sinne) auch allgemein auf einem Netzwerk $G = (V, E, \rho)$ anwenden. Die einzige Problematik besteht hier darin, dass die Punkte $a, b \in G$ eventuell keine reellen Zahlen sind (wenn sie auf den Ecken liegen) oder aber, den „Abstand“ zwischen a und b korrekt zu definieren. Eine Lösung wäre den in 3.3 definierten Abstand zu verwenden. Wir gehen hier einen etwas anderen Weg, der uns den Vorteil eines „schöneren“ Beweises bietet, und benutzen - wie auch schon beim Mittelwertsatz der Differentialrechnung - die verallgemeinerte Form des Mittelwertsatzes der Integralrechnung als Grundlage. Diesen findet man zum Beispiel in [12] Kapitel 11.3 aus dem auch die Grundlage unseres Beweises entnommen wurde.

6.3.2 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und seien a und b zwei Punkte auf diesem Netzwerk.
Sei $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b und sei $f : L(a, b) \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt von $L(a, b)$ stetige Funktion. Sei $p : L(a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $p \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in L(a, b)$ mit

$$\int\limits_L f(x)p(x)dx = f(\xi) \cdot \int\limits_L p(x)dx$$

Beweis. Da f auf L stetig ist, nimmt die Funktion nach Satz 4.2.3 auf diesem Intervall ihr Minimum m und ihr Maximum M an, wodurch gilt, dass $mp \leq fp \leq Mp$ ist. Wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$m \int\limits_L p(x)dx \leq \int\limits_L f(x)p(x)dx \leq M \int\limits_L p(x)dx.$$

Das bedeutet, es existiert ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int\limits_L f(x)p(x)dx = \mu \cdot \int\limits_L p(x)dx$$

und, da f stetig ist, ein $\xi \in L$ mit $\mu = f(\xi)$. □

6.3.3 Bemerkungen:

1. Setzt man in Satz 6.3.2 $p(x) := 1$, für alle $x \in L$, so erhält man eine Form des allgemein bekannten Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

6.4 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf Netzwerken

In diesem abschließenden Abschnitt wollen wir noch kurz auf den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung eingehen. Wie auch schon bei den meisten vorhergehenden Aussagen der reellen Analysis lässt sich dieser innerhalb jeder Kante problemlos anwenden. Einen Beweis des Satzes findet man beispielsweise bei [2] Kapitel 16.3, aus dem auch der Wortlaut des folgenden Satzes im Großen und Ganzen entnommen wurde:

6.4.1 Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf Kanten)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $I := [a, b] \subseteq [\mathrm{init}(e), \mathrm{ter}(e)]$ für ein $e \in E$.

1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
   Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$$

ist differenzierbar auf (a, b) und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in (a, b)$$

2. Wenn $F : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ ist, dann gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

Auf Grundlage dieses Satzes können wir nun einen Hauptsatz erarbeiten, der auf Verbindungen Gültigkeit hat:

6.4.2 Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf Verbindungen)**:**
Sei $G = (V, E, \rho)$ ein Netzwerk und $a, b \in G$ zwei Punkte auf G mit $a \neq b$. Seien weiter $L(a, b)$ eine Verbindung von a nach b.

1. Sei $f : L(a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $L(a, b)$ mit den zugehörigen Teilfunktionen f_e und f_v.
   Die Funktion $F : L(a, b) \to \mathbb{R}$ mit
   $$F(x) := \int_{L(a,x)} f(t)dt$$
   und $L(a, x) \subseteq L(a, b)$ ist stetig differenzierbar auf dem Inneren von $L(a, b)$ und es gilt
   $$F'(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in L(a, b) \setminus \{a, b\},$$
   das heißt
   $$F'_{\tilde{e}}(x) = f_{\tilde{e}}(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x_{\tilde{e}} \to v} F'_{\tilde{e}}(x_{\tilde{e}}) = f(v)$$
   für alle $\tilde{e} \in E$ und $v \in V$ entlang der Verbindung $L(a, b)$ und $x \in L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$.
2. Ist $F : L(a, b) \to \mathbb{R}$ auf $L(a, b) \setminus \{a, b\}$ eine stetig differenzierbare Stammfunktion von $f : L(a, b) \to \mathbb{R}$, dann gilt
   $$\int_{L(a,b)} f(t)dt = \int_{L(a,b)} F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Für den ersten Teil gilt:
Wir haben Differenzierbarkeit auf Netzwerken nur innerhalb von Kanten definiert, das heißt, wenn wir zeigen wollen, dass
$$\lim_{h \to 0} \frac{F_{\tilde{e}}(x + h) - F_{\tilde{e}}(x)}{h}$$
für alle $\tilde{e} \in E$ entlang der Verbindung $L(a, b)$ existiert und gleich $f_{\tilde{e}}(x)$ ist, dann können wir dies nur für $x \in L(a, b) \setminus (V \cup \{a, b\})$ und so gewählte $h \neq 0$ tun, die auf dem Inneren der gleichen Kante wie x liegen und für die gilt $[x, h] \in L(a, b)$ (falls $x < h$), beziehungsweise $[h, x] \in L(a, b)$ (falls $h < x$) ($[,]$ bezeichnet hier ein abgeschlossenes Intervall auf dem Inneren einer topologischen Kante).
Wir nehmen im folgenden an, dass x und h auf der Kante $e \in E$ liegen.
Dann gilt (für $L(a, x + h), L(a, x) \subseteq L(a, b)$):

$$\begin{aligned} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_{L(a,x+h)} f(t)dt - \int_{L(a,x)} f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f_e(t_e)dt_e \end{aligned}$$

Und ab diesem Punkt bewegen wir uns nur noch auf dem inneren der Kante e, für die mit Satz 6.4.1 bereits gilt, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f_e(t_e)dt_e = f_e(x)$$

sein muss. Wir müssen nun also nur noch zeigen, dass an jeder Ecke $\tilde{V} := (L(a,b) \cap V) \cup \{a,b\}$ der Verbindung $L(a,b)$ ein stetiger Übergang der Ableitung existiert, was aber sofort folgt, wenn wir

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \tilde{V}$ setzen, da f ja per Definition stetig ist und auf dem Inneren jeder Kante von $L(a,b)$ die Ableitung von F ist.
Für den zweiten Teil gilt nun:
Betrachten wir die in 1 definierte Stammfunktion

$$F(x) := \int\limits_{L(a,x)} f(t)dt,$$

wobei wieder gelten muss, dass $L(a,x) \subseteq L(a,b)$, dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int\limits_{L(a,b)} f(t)dt - \int\limits_{L(a,a)} f(t)dt = \int\limits_{L(a,b)} f(t)dt$$

alle anderen Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, die bei Subtraktion wegfällt (siehe hierzu auch den Eindeutigkeitssatz aus [12] Kapitel 9.9 für fast überall differenzierbare Funktionen). □

7 Literaturverzeichnis

Literatur

[1] O. Deiser, *Analysis 2 -*. Wiesbaden: Springer Berlin Heidelberg, 2014.

[2] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger, H. Stachel, and K. Lichtenegger, *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1. aufl. ed., 2013.

[3] G. Fischer and F. Quiring, *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie - Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2. aufl. ed., 2012.

[4] M. Wessler and H. Rüpcke, *Graphen und Netzwerktheorie - Grundlagen - Methoden - Anwendungen*. M: Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2014.

[5] "Teilgraph." `ttps://de.wikipedia.org/wiki/Teilgraph`, 2016. Abgerufen: 10.08.2016.

[6] J. Clark and D. A. Holton, *Graphentheorie - Grundlagen und Anwendungen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1994.

[7] "Laplace-operatoren auf quantengraphen." `https://www-user.tu-chemnitz.de/~carst/DA_Schubert.pdfl`, 2006. Abgerufen: 14.07.2016.

[8] "Unterteilungsgraph." `https://de.wikipedia.org/wiki/Unterteilungsgraph`, 2016. Abgerufen: 10.08.2016.

[9] R. Diestel, *Graph Theory -*. Berlin Heidelberg: Springer Science and Business Media, 4th ed., 2012.

[10] D. Mugnolo, *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks -*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. aufl. ed., 2014.

[11] M. Modler, Florian; Kreh, *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2 - Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2. aufl. ed., 2012.

[12] K. Königsberger, *Analysis 1 -*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013.

[13] H. Amann and J. Escher, *Analysis 1 -*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2. aufl. ed., 2000.

[14] M. Modler, Florian; Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 - Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2. aufl. ed., 2011.

8 Abbildungsverzeichnis

Die Abbildungen 1 bis 8 wurden allesamt mit der freien Software GeoGebra Version 5.0.290.0-3D erstellt und mit der freien Software GIMP Version 2.8.14 bearbeitet.