Prof. Dr. Luise Unger

Modul 61111

Mathematische Grundlagen

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

Studierhinweise

Bevor ich eine Übersicht darüber gebe, was Sie in der ersten Kurseinheit erwarten wird, einige Worte dazu, wie man mit einem mathematischen Text arbeitet.

Einen mathematischen Text darf man nicht lesen wie einen Roman, man muss ihn sich erarbeiten.

Ich möchte Ihnen hier einige Hilfestellungen an die Hand geben, wie dies geschehen kann.

Der mathematische Sprachstil ist minimalistisch, es gibt in einem mathematischen Text wenig Überflüssiges. Daher ist die wichtigste Regel: Lesen Sie langsam; lesen Sie Wort für Wort und Symbol für Symbol.

Ein gutes und wichtiges Hilfsmittel, die Lesegeschwindigkeit zu drosseln, ist Papier und Schreibzeug. Wenn Sie einen Beweis durcharbeiten (oder eine Definition oder die Aussage eines Satzes verstehen wollen), schreiben Sie mit. Beantworten Sie sich bei jedem Satz, den Sie schreiben, die Frage: Habe ich verstanden, warum b aus a folgt? Welche Informationen waren für diese Schlussfolgerung nötig? Fügen Sie Details, die im Text nicht erwähnt werden, ein.

Stellen Sie sich bei jeder Definition und jedem beschriebenen Sachverhalt die Frage: Kenne ich ein Beispiel für diesen Sachverhalt? Und kenne ich ein Beispiel, wo die Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Wenn Sie die Formulierung eines Satzes oder einer Proposition gelesen haben, steigen Sie nicht gleich in den Beweis ein. Überlegen Sie zuerst: Was sind die Voraussetzungen (also die Annahmen, die erfüllt sein müssen), und was ist die Behauptung? Was ist im Beweis zu tun, um aus den Voraussetzungen die Behauptung herzuleiten?

Versuchen Sie, jeden Satz und jede Definition mit eigenen Worten zu formulieren. Notieren Sie Ihre Formulierung und vergleichen Sie mit der im Lehrtext. Besagen sie dasselbe?

Lernen Sie Definitionen, bei denen Sie Schwierigkeiten haben oder auf die als besonders wichtig hingewiesen wurde, auswendig. Gewisse Dinge brauchen einfach Zeit, sich zu setzen.

Scheuen Sie sich nicht, gewisse Passagen laut zu lesen. Über Mathematik zu sprechen ist gar nicht einfach, und das laute Lesen ist eine gute Übung.

Lösen Sie die im Text gestellten Übungsaufgaben und beschäftigen Sie sich ausführlich mit den Einsendeaufgaben. Versuchen Sie sich an den Übungsaufgaben dann, wenn Sie im Text auf sie treffen. Sie sollen Ihnen helfen, sich an einen neuen Begriff zu gewöhnen und sich zu kontrollieren, ob Sie damit umgehen können. Niemand lernt ein Musikinstrument, weil er Noten beherrscht und sich in Harmonielehre und Musikgeschichte auskennt. Genauso lernt niemand Mathematik durch passives Aufnehmen von Lehrstoff. Sie müssen mit den Begriffen, Konzepten und Fakten umgehen können, und dies geschieht nur durch Üben, Üben und Üben. Nehmen Sie also die Aufgaben ernst.

Wie beim Erlernen einer Sprache, eines Musikinstruments oder einer Sportart gilt auch für die Mathematik: Arbeiten Sie kontinuierlich. Besser ein bis zwei Stunden täglich als zwei Wochenenden ohne Pause. Da kann nicht viel hängenbleiben. Wenn Sie sich pro Woche etwa 20 Stunden mit dem Lehrtext und den Einsendeaufgaben beschäftigen, würde ich das nicht als zu viel erachten.

Der Kurs setzt voraus, dass Sie die Schulmathematik verstanden haben. Sollten Sie sich dabei unsicher fühlen, so sollten Sie sich eines der unzähligen Bücher, in denen die Schulmathematik noch einmal kurz zusammengestellt wird, kaufen und gegebenenfalls nachschlagen.

Die Kurseinheiten bauen aufeinander auf. In Kurseinheit 3 brauchen Sie alles (bis auf Kapitel 1), was vorher bereitgestellt wurde. Je mehr Ihnen bis dahin in Fleisch und Blut übergegangen ist, desto mehr haben Sie den Kopf frei um Neues aufzunehmen.

Zum Schluss einige Hinweise zum Stil des Kurses.

- Die meisten Sätze, Propositionen, und Korollare haben ein Stichwort, meist eine Kurzfassung des behandelten Inhaltes. Auf diese wird beim Verweisen oft hingewiesen. Nicht die Nummern der Aussagen sind wichtig. Versuchen Sie, sich die Stichworte zu merken.

- Das Ende eines Beweises oder das Ende einer Aussage, die meines Erachtens keines Beweises mehr bedarf, wird durch das Beweisabschlusszeichen $\square$ angezeigt.

- Bei Definitionen erkennt man die zu definierenden Begriffe daran, dass sie

fett gedruckt sind.

Kommen wir nun zu den Inhalten der ersten Kurseinheit. Im ersten Kapitel geht es darum, Begriffe und Konzepte, die in der Mathematik immer wieder verwendet werden, vorzustellen und erste Eigenschaften nachzuweisen. Darüber hinaus soll Kapitel 1 dazu dienen, eine gemeinsame Sprache und Symbolik festzulegen und Notation zu vereinbaren.

Im Einzelnen sind zu nennen:

Abschnitt 1.1: Hier lernen Sie das Summensymbol Σ kennen, das eine handliche Abkürzung zur Schreibweise von Summen mit vielen Summanden liefert.

Nach Durcharbeiten dieses Abschnittes sollten Sie keine Angst vor Doppelsummen haben.

Abschnitt 1.2: Eine Aussage ist jeder Satz der Umgangssprache, dem die Eigenschaft „wahr" zu sein oder „falsch" zu sein, zugesprochen werden kann. Mit Hilfe so genannter Junktoren können aus Aussagen weitere Aussagen konstruiert werden. Wie dies geschieht, sehen Sie in Abschnitt 1.2.

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie die Wahrheitstafeln der Junktoren kennen, nicht übermäßig komplexe Aussagen durch Quantoren ausdrücken können und in der Lage sein, Aussagen in Quantoren-Schreibweise in Umgangssprache zu übersetzen. Weiter sollten Sie die Negation von Aussagen bilden können. Sie sollten sensibel für die verschiedenen Beweisprinzipien sein, die in der Mathematik verwendet werden und die wir in 1.2.5 vorstellen werden. Wir werden Sie im Kurs darauf hinweisen, wenn sie eingesetzt werden. Das Prinzip der vollständigen Induktion ist zentral in der Mathematik. Dies müssen Sie verstanden haben und in Beispielen verwenden können.

Abschnitt 1.3: Die Verständigung in der modernen Mathematik stützt sich auf den Begriff der Menge. In Abschnitt 1.3 werden im Wesentlichen nur Begriffe im Zusammenhang mit Mengen zusammengetragen, die im Folgenden immer wieder verwendet werden.

Nach Durcharbeiten von Abschnitt 1.3 sollten Sie mit folgenden Begriffen umgehen können: Vereinigung, Durchschnitt und Produkt von Mengen, Differenzmengen und Gleichheit von Mengen.

Abschnitt 1.4: Jetzt wird es langsam ernst, wir reden über Abbildungen. Viele Aussagen in der Mathematik werden mit Hilfe von Abbildungen formuliert. Nachdem in Abschnitt 1.4.1 der Begriff einer Abbildung definiert wird, kommen wir in Abschnitt 1.4.2 zu zwei sehr wichtigen Mengen, die im Zusammenhang mit Abbildungen auftauchen: dem Bild einer Abbildung und der Menge der Urbilder eines

Elements unter einer Abbildung. Die Frage, ob und wie viele Urbilder Elemente unter einer Abbildung haben, führt zu den Begriffen injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildungen. Diese Begriffe werden Ihnen in der Mathematik immer wieder begegnen, wir werden in Kurseinheit 3 wieder auf sie treffen. In Abschnitt 1.4.3 wird die Komposition von Abbildungen eingeführt, und es wird untersucht, welche Abbildungen invertierbar sind. Unser erstes großes Ergebnis, das wir oft benutzen werden, ist die Charakterisierung invertierbarer Abbildungen, Korollar 1.4.22.

Nach Durcharbeiten von Abschnitt 1.4 sollten Sie mit folgenden Begriffen umgehen können: Abbildung, Bild und Urbild von Abbildungen, injektive, surjektive und bijektive Abbildungen, Invertierbarkeit von Abbildungen, Komposition von Abbildungen, Gleichheit von Abbildungen.

Abschnitt 1.5: Verknüpfungen, die wir in Abschnitt 1.5 vorstellen, sind spezielle Abbildungen. Zwei Elementen einer Menge wird ein drittes Element dieser Menge zugeordnet. Typische Beispiele sind die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen. In der Mathematik interessiert man sich für Verknüpfungen mit schönen Eigenschaften. Welches solche Eigenschaften sind, wird in Abschnitt 1.5 erklärt – im Wesentlichen handelt es sich um Eigenschaften, die denen ähneln, die wir vom Rechnen mit ganzen Zahlen schon kennen. Das Wichtige in Abschnitt 1.5 sind die Beispiele.

Abschnitt 1.6: In diesem Abschnitt geht es um Körper. Körper sind Mengen, in denen wir Elemente addieren und multiplizieren können, wobei jedoch eine Reihe von Regeln erfüllt sein müssen. Beispiele für Körper sind die rationalen und die reellen Zahlen. Es gibt aber noch viel mehr Beispiele für Körper – einen weiteren, den Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen, werden Sie in Abschnitt 1.6 kennen lernen. Dieser Körper sollte Ihnen in Fleisch und Blut übergehen.

Nachdem wir in Kapitel 1 die grundlegenden Begriffe vorgestellt haben, führen wir in Kapitel 2 Matrizen ein und erklären, wie mit ihnen gerechnet wird.

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie entscheiden können, welche Matrizen Sie addieren und welche Sie multiplizieren dürfen, und Sie sollten die Rechnungen durchführen können. Kapitel 2 ist etwas trocken. Beißen Sie sich trotzdem durch, die Matrizenrechnung ist eine Grundlage für die weiteren Kurseinheiten, und die sollten Sie dann beherrschen.

In Kapitel 3 geht es um spezielle Matrizen, so genannte Elementarmatrizen. Wenn man Elementarmatrizen von links an eine Matrix multipliziert, so werden zwei Zeilen vertauscht, oder eine Zeile wird mit einem Körperelement multipliziert, oder das Vielfache einer Zeile wird zu einer anderen addiert.

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie wissen, welche Elementarmatrix welche elementare Zeilenumformung bewirkt, und sie sollten wissen, dass Elementarmatrizen invertierbar sind, und dass ihre Inversen ebenfalls Elementarmatrizen sind. Diese Tatsache werden wir später immer wieder ausnutzen.

Kapitel 3

Zeilenäquivalente Matrizen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir werden Matrizen mit Hilfe von drei Regeln umformen, die wir im folgenden Abschnitt formulieren werden. Diese Regeln nennen wir elementare Zeilenumformungen. Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen werden wir im nächsten Kapitel Matrizen A in eine einfachere Form, die so genannte Treppennormalform zu A, überführen und unter anderem die in Abschnitt 2.3 bereits gestellte Frage, wann quadratische Matrizen invertierbar sind und wie wir gegebenenfalls die zu einer Matrix A inverse Matrix finden können, beantworten.

3.1 Elementare Zeilenumformungen

Formulieren wir zunächst unsere Umformungsregeln:

3.1.1 Definition: Die folgenden Manipulationen an $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ nennen wir **elementare Zeilenumformungen**:

Z_{ij}: Vertausche die i-te Zeile mit der j-ten Zeile, wobei $i \neq j$ ist.

$\mathrm{Z}_i(r)$: Multipliziere die i-te Zeile mit einem Skalar $r \in \mathbb{K}$, wobei r nicht 0 sein darf.

$\mathrm{Z}_{ij}(s)$: Addiere das s-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, wobei $s \in \mathbb{K}$ und $i \neq j$ sind.

3.1.2 Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$.

Wenden wir die elementare Zeilenumformung Z_{23} auf A an, so erhalten wir

$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\3&6&4&3\\2&4&2&2\end{pmatrix}$, wenden wir $\mathrm{Z}_3(6)$ auf A an, so erhalten wir $\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&4&2&2\\18&36&24&18\end{pmatrix}$, und wenden wir $\mathrm{Z}_{31}(-2)$ auf A an, so erhalten wir $\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&4&2&2\\1&2&-2&3\end{pmatrix}$.

3.2 Elementare Zeilenumformungen und Matrizen

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass wir elementare Zeilenumformungen durch Matrixmultiplikationen realisieren können. Genauer, wir werden zeigen, dass es Matrizen $P_{ij}, D_i(r), T_{ij}(s)$ (genannt Elementarmatrizen) in $\mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ gibt, so dass gilt:

$P_{ij}A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir Z_{ij} auf A anwenden,

$D_i(r)A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir $\mathrm{Z}_i(r)$ auf A anwenden, und

$T_{ij}(s)A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir $\mathrm{Z}_{ij}(s)$ auf A anwenden.

3.2.1 Matrizen mit genau einer 1

Wir beginnen mit ganz einfachen Matrizen, nämlich solchen, die genau einen Eintrag 1 besitzen, und deren übrige Einträge 0 sind. Was geschieht, wenn wir solche Matrizen von links an eine Matrix A multiplizieren, werden wir jetzt überlegen.

3.2.1 Definition: Sei $E_{ij} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ die Matrix, die an der Stelle (i, j) den Eintrag 1 hat, und deren übrige Einträge 0 sind.

Als Beispiel: $E_{24} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$ ist die Matrix $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3.2.2 Aufgabe: Sei $E_{24} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$, und sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{R})$.

Berechnen Sie $E_{24}A$.

Wenn Sie diese Aufgabe gerechnet haben, wird Sie das folgende Ergebnis nicht überraschen.

3.2.3 Bemerkung: Sei $E_{ij} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, und sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Die i-te Zeile von $E_{ij}A$ ist die j-te Zeile von A, und die übrigen Einträge von $E_{ij}A$ sind 0.

Beweis: Sei $C = E_{ij}A$. Um den Eintrag c_{lk} von C zu berechnen, müssen wir die l-te Zeile von E_{ij} mit der k-ten Spalte von A multiplizieren. Wenn $l \neq i$ ist, besteht die l-te Zeile von E_{ij} nur aus Nullen, es ist also $c_{lk} = 0$ für alle $l \neq i$ und alle $1 \leq k \leq n$. Für $l = i$ ist $c_{ik} = 0 \cdot a_{1k} + \cdots + 0 \cdot a_{j-1,k} + 1 \cdot a_{jk} + 0 \cdot a_{j+1,k} + \cdots + 0 \cdot a_{mk} = a_{jk}$. Die i-te Zeile von $E_{ij}A$ ist also die j-te Zeile von A. $\square$

Was geschieht, wenn wir quadratische Matrizen der Form E_{ij} miteinander multiplizieren? Die folgende Proposition gibt darüber Auskunft.

3.2.4 Proposition: (Multiplikation von Matrizen der Form E_{ij})

Seien $E_{ij}, E_{kl} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Dann gilt $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K}), & \text{falls } k \neq j \\ E_{il}, & \text{falls } k = j. \end{cases}$

Beweis: Mit 3.2.3 gilt: Die i-te Zeile von $E_{ij}E_{kl}$ ist die j-te Zeile von E_{kl}, und alle weiteren Einträge sind 0. Wenn $k \neq j$ ist, dann ist die j-te Zeile von E_{kl} eine Nullzeile, das heißt, alle Einträge der Zeile sind 0. Dann ist $E_{ij}E_{kl}$ die Nullmatrix. Wenn $k = j$ ist, dann ist die j-te Zeile von E_{jl} von der Form $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$, wobei die 1 an der l-ten Stelle steht. Es ist also $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$. $\square$

3.2.5 Aufgabe: Die folgenden Matrizen seien in $\mathrm{M}_{55}(\mathbb{F}_2)$. Benutzen Sie Proposition 3.2.4 um ohne Rechnerei die Produkte folgender Matrizen zu bestimmen: $E_{23}E_{23}$, $E_{23}E_{32}$ und $E_{34}E_{13}$.

3.2.2 Elementarmatrizen

Wir kommen nun zur formalen Definition der Elementarmatrizen. Der Formalismus ist hilfreich bei Rechnungen mit diesen Matrizen – wie Sie sich die Definitionen merken können, sagt die Merkregel, die der Definition folgt.

3.2.6 Definition: Seien $E_{ii}, E_{ij}, E_{jj}, E_{ji} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$.

(a) Für $i \neq j$ sei $P_{ij} = I_m - E_{ii} + E_{ij} - E_{jj} + E_{ji}$.

(b) Für $r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei $D_i(r) = I_m + (r-1)E_{ii}$.

(c) Für $i \neq j$ sei $T_{ij}(s) = I_m + sE_{ij}$.

Die Matrizen P_{ij}, $D_i(r)$ und $T_{ij}(s)$ werden **Elementarmatrizen** genannt.

3.2.7 Aufgabe: Bilden Sie P_{24}, $D_2(3)$ und $T_{54}(-2)$ in $\mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$.

3.2.8 Merkregel: (a) Die Matrix $P_{ij} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ erhalten wir, indem wir eine elementare Zeilenumformung vom Typ Z_{ij} auf I_m anwenden.

(b) Die Matrix $D_i(r) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ erhalten wir, indem wir eine elementare Zeilenumformung vom Typ $\mathrm{Z}_i(r)$ auf I_m anwenden.

(c) Die Matrix $T_{ij}(s) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ erhalten wir, indem wir eine elementare Zeilenumformung vom Typ $\mathrm{Z}_{ij}(s)$ auf I_m anwenden.

Elementarmatrizen tun das, was ich versprochen habe, wie die folgende Proposition zeigt:

3.2.9 Proposition: Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und seien P_{ij}, $D_i(r)$ und $T_{ij}(s)$ Elementarmatrizen in $\mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Dann gilt:

(a) $P_{ij}A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir die elementare Zeilenumformung Z_{ij} auf A anwenden.

(b) $D_i(r)A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir die elementare Zeilenumformung $\mathrm{Z}_i(r)$ auf A anwenden.

(c) $T_{ij}(s)A$ ist die Matrix, die wir erhalten, indem wir die elementare Zeilenumformung $\mathrm{Z}_{ij}(s)$ auf A anwenden.

Beweis:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} P_{ij}A &= (I_m - E_{ii} + E_{ij} - E_{jj} + E_{ji})A \\ &= I_mA - E_{ii}A + E_{ij}A - E_{jj}A + E_{ji}A \\ &= (A - E_{ii}A - E_{jj}A) + (E_{ij}A + E_{ji}A). \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 3.2.3 ist $A - E_{ii}A - E_{jj}A$ diejenige Matrix, deren Einträge in der i-ten und der j-ten Zeile 0 sind, und deren übrige Einträge mit denen in A übereinstimmen. $E_{ij}A + E_{ji}A$ ist diejenige Matrix, deren i-te Zeile die j-te Zeile von A ist, deren j-te Zeile die i-te Zeile von A ist, und deren übrige Einträge 0 sind. Die Summe $(A-E_{ii}A-E_{jj}A)+(E_{ij}A+E_{ji}A)$ beider Matrizen hat also die in der Behauptung geforderte Gestalt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} D_i(r)A &= (I_m + (r-1)E_{ii})A \\ &= (A - E_{ii}A) + rE_{ii}A. \end{aligned}$$

Die i-te Zeile von $A - E_{ii}A$ ist also eine Nullzeile, die übrigen Einträge von $A - E_{ii}A$ entsprechen denen von A. Die i-te Zeile von $rE_{ii}A$ ist das r-fache der i-ten Zeile von A, die übrigen Einträge sind 0. Die Summe $(A - E_{ii}A) + rE_{ii}A$ hat also die geforderte Gestalt.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} T_{ij}(s)A &= (I_m + sE_{ij})A \\ &= A + sE_{ij}A. \end{aligned}$$

Die i-te Zeile von $sE_{ij}A$ ist das s-fache der j-ten Zeile von A, die übrigen Einträge von $sE_{ij}A$ sind 0. Die Summe beider Matrizen hat damit die geforderte Gestalt.

□

3.2.10 Aufgabe: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, und sei B die Matrix, die aus A entsteht, indem wir die erste und die dritte Zeile von A vertauschen, dann die neue erste Zeile mit 6 multiplizieren und dann die zweite Zeile zur dritten addieren. Berechnen Sie B und bestimmen Sie eine 3×3-Matrix S, so dass $SA = B$ ist.

Elementarmatrizen sind invertierbar, wie das folgende Ergebnis zeigt:

3.2.11 Proposition: Elementarmatrizen sind invertierbar, und ihre inversen Matrizen sind wieder Elementarmatrizen.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung getrennt nach den verschiedenen Typen von Elementarmatrizen.

(a) Sei $P_{ij} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Die Matrix P_{ij} entsteht aus der Einheitsmatrix, indem wir in I_m die i-te und die j-te Zeile vertauschen. I_m ist also die Matrix, die aus P_{ij} hervorgeht, indem wir in P_{ij} die i-te und die j-te Zeile vertauschen.

Mit Proposition 3.2.9, Teil (a), gilt dann $P_{ij}P_{ij} = I_m$. Die Matrix P_{ij} ist also invertierbar und zu sich selbst invers.

(b) Sei $D_i(r) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, $r \neq 0$. Es ist $D_i(\frac{1}{r})D_i(r)$ die Matrix, die aus $D_i(r)$ durch eine elementare Zeilenumformung vom Typ $\mathrm{Z}_i(\frac{1}{r})$ hervorgeht, das heißt, der Eintrag r an der Stelle (i,i) wird durch $\frac{1}{r}r = 1$ ersetzt. Es ist also $D_i(\frac{1}{r})D_i(r) = I_m$. Analog zeigt man, dass $D_i(r)D_i(\frac{1}{r}) = I_m$ ist, und dies zeigt, dass $D_i(r)$ invertierbar mit inverser Matrix $D_i(\frac{1}{r})$ ist.

(c) Sei $T_{ij}(s) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Es ist $T_{ij}(-s)T_{ij}(s)$ die Matrix, die aus $T_{ij}(s)$ durch eine elementare Zeilenumformung vom Typ $\mathrm{Z}_{ij}(-s)$ hervorgeht. Damit wird der Eintrag s an der Stelle (i,j) durch $s - s = 0$ ersetzt, und das Resultat ist die Einheitsmatrix. Somit gilt $T_{ij}(-s)T_{ij}(s) = I_m$, und analog wird gezeigt, dass $T_{ij}(s)T_{ij}(-s) = I_m$ ist. Somit ist $T_{ij}(s)$ invertierbar mit inverser Matrix $T_{ij}(-s)$.

□

3.2.12 Aufgabe: Welches sind die inversen Matrizen zu P_{24}, $D_2(3)$ und $T_{54}(-2)$ in $\mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$?

3.3 Zeilenäquivalenz

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Angenommen, A geht aus B durch endlich viele elementare Zeilenumformungen hervor. Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es dann endlich viele Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_r$ gibt, so dass $A = E_1E_2\cdots E_rB$ ist. Da $E_1, \ldots, E_r$ invertierbar sind, können wir $E_1^{-1}, \ldots, E_r^{-1}$ bilden. Wir multiplizieren die Gleichung von links mit E_1^{-1}, dann mit E_2^{-1} und so weiter, bis E_r^{-1}, und erhalten

$$E_r^{-1}\cdots E_1^{-1}A = E_r^{-1}\cdots E_1^{-1}E_1\cdots E_rB = I_mB = B.$$

Da Inverse von Elementarmatrizen Elementarmatrizen sind, zeigt diese Überlegung:

3.3.1 Bemerkung: Seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $A = E_1E_2\cdots E_rB$ für Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_r$. Dann gilt für die Elementarmatrizen $E_1^{-1}, \ldots, E_r^{-1}$, dass $E_r^{-1}\cdots E_1^{-1}A = B$ ist. □

In der Sprache der elementaren Zeilenumformungen ausgedrückt, bedeutet Bemerkung 3.3.1 gerade: Wenn A durch elementare Zeilenumformungen aus B hervorgeht, dann geht B durch elementare Zeilenumformungen aus A hervor. Diese Überlegung führt zu folgender Definition:

3.3.2 Definition: Seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wir nennen A und B **zeilenäquivalent** und schreiben $A \sim_Z B$, wenn es endlich viele Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_r$ gibt, so dass

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r B \text{ ist.}$$

Gesprochen wird $A \sim_Z B$ als „A ist zeilenäquivalent zu B“. Wir haben in 3.3.1 gesehen, dass $A \sim_Z B$ genau dann gilt, wenn $B \sim_Z A$ gilt. Eine weitere Eigenschaft zeilenäquivalenter Matrizen ist:

3.3.3 Bemerkung: Seien $A, B, C \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt:

Wenn A zeilenäquivalent zu B und B zeilenäquivalent zu C ist, dann ist A zeilenäquivalent zu C.

Beweis: Sei $A = E_1 E_2 \cdots E_r B$ und sei $B = F_1 F_2 \cdots F_s C$, wobei $E_1, \ldots, E_r, F_1, \ldots F_s$ Elementarmatrizen sind. Es folgt $A = E_1 \cdots E_r F_1 \cdots F_s C$, also $A \sim_Z C$. $\square$

Wir wissen jetzt, wann zwei Matrizen A und B in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ zeilenäquivalent heißen. Allerdings ist folgende Frage noch völlig offen:

3.3.4 Frage: Seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ gegeben. Wie können wir entscheiden, ob A und B zeilenäquivalent sind?

Eine Antwort auf diese Frage muss ich an dieser Stelle schuldig bleiben und Sie auf Korollar 4.4.5 in Kapitel 4.4 der nächsten Kurseinheit vertrösten.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 3.2

Aufgabe 3.2.2 Sei $E_{24} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$, und sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{R})$.

Dann gilt $E_{24}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2.5 Mit Proposition 3.2.4 gilt $E_{23}E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{23}E_{32} =$

$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $E_{34}E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2.7 Es sind $P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$T_{54}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.2.10 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wenn wir die 3×3-Matrix P_{13} von links an A multiplizieren, so erhalten wir die Matrix, die aus A entsteht, wenn wir die erste und dritte Zeile von A vertauschen. Multiplizieren wir $P_{13}A$ von links mit der 3×3-Matrix $D_1(6)$, so wird die erste Zeile von $P_{13}A$ mit 6 multipliziert. Multiplizieren wir jetzt die Matrix $D_1(6)P_{13}A$ von links mit $T_{32}(1)$, so wird die zweite Zeile von $D_1(6)P_{13}A$ zur dritten addiert, und es gilt

$$T_{32}(1)D_1(6)P_{13}A = B.$$

Die Matrix S, die wir suchen, ist dann $T_{32}(1)D_1(6)P_{13}$. Und ob das wirklich geklappt hat, werden wir jetzt nachrechnen.

Zunächst berechnen wir B. Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile von A und erhalten

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die erste Zeile dieser Matrix mit 6:

$$\begin{pmatrix} 54 & 0 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss addieren wir die zweite Zeile zur dritten und erhalten

$$B = \begin{pmatrix} 54 & 0 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Es sind $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $D_1(6) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T_{32}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt bilden wir das Produkt $T_{32}(1)D_1(6)P_{13}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie wir oben überlegt haben, sollte damit $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gelten. Wir rechnen nach

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 0 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} = B,$$

und stellen fest, dass dies wirklich der Fall ist.

Aufgabe 3.2.12 Die Inversen zu Elementarmatrizen wurden im Beweis von Proposition 3.2.11 explizit angegeben. Invers zu P_{24} ist P_{24}, invers zu $D_2(3)$ ist $D_2(\frac{1}{3})$, und invers zu $T_{54}(-2)$ ist $T_{54}(2)$.

Studierhinweise

In den folgenden drei Kurseinheiten werden wir eine Einführung in die Analysis geben.

In der Analysis beschäftigt man sich mit dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die untersuchten Abbildungen werden fast nie linear sein, denn die einzigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ beschreiben Geradengleichungen durch den Koordinatenursprung, und das ist für Untersuchungen der Analysis viel zu eingeschränkt.

In der Analysis spricht man nicht von Abbildungen sondern von Funktionen. Diese Begriffe sind aber völlig synonym, es wird einfach traditionell so gemacht, und daran werden wir uns in diesem Kurs auch halten.

Der rote Faden ist die Frage, wie man das Änderungsverhalten einer Funktion verstehen, beschreiben und beherrschen kann. Genauer, welche Begriffe eignen sich am besten dazu, die Änderung einer Funktion „im Kleinen“ (also bei geringer Änderung der Variablen) zu erfassen, was kann man über die Funktion „im Großen“, über ihren Gesamtverlauf sagen, wenn wir nur Kenntnisse über ihr Verhalten „im Kleinen“ haben?

Diese Fragen werden uns in den Kurseinheiten 5 und 6 zu den Begriffen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit führen.

Das unverzichtbare Hilfsmittel für jede Untersuchung solcher Fragen ist der Begriff des Grenzwertes in vielfältigen Formen und Abwandlungen. Er ist das Herzstück der Analysis, und in Kapitel 13 werden wir uns auch mit Grenzwerten von reellen Zahlenfolgen beschäftigen.

Bei der Untersuchung von Grenzwertprozessen ist man auf den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen angewiesen. Was ist es also, was diesen Körper so besonders macht? Darauf werden wir in Kapitel 12 eingehen. Dabei werden wir axiomatisch vorgehen. Wir werden neun Axiome für die reellen Zahlen vorstellen, und aus diesen alle weiteren Aussagen der Analysis herleiten.

Es folgt ein Überblick über die einzelnen Abschnitte dieser Kurseinheit.

Wie gesagt, in Kapitel 12 widmen wir uns dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

In 12.1 stellen wir kurz und knapp die Axiome vor, die die reellen Zahlen erfüllen. Die Axiome lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen: die erste Gruppe, die in 12.1.1 vorgestellt wird, sagt schlicht aus, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Hier finden Sie vermutlich nichts, was Sie überraschen wird. Die Gruppe von Axiomen, die wir in 12.1.2 vorstellen werden, behandelt das Thema, dass wir reelle Zahlen der Größe nach anordnen können. Für gegebene reelle Zahlen a und b können wir entscheiden, ob $a > b$, $a < b$ oder $a = b$ ist. Was hier zu beachten ist, wird in 12.1.2 vorgestellt. Auch rationale Zahlen, also Zahlen in $\mathbb{Q}$ können wir vergleichen, und sie erfüllen dieselben Axiome wie die Ordnungsaxiome in $\mathbb{R}$. Müssen sie schon deshalb, weil $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Die Körper- und Ordnungsaxiome machen das Besondere von $\mathbb{R}$ also noch nicht aus. Das Wesentliche der reellen Zahlen, also das, was $\mathbb{R}$ hat und $\mathbb{Q}$ nicht hat, ist das so genannte Schnittaxiom, das wir in 12.1.3 vorstellen werden. Reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, nennt man irrationale Zahlen. Es gibt viele irrationale Zahlen – genau genommen gibt es viel mehr irrationale Zahlen als rationale. Man kann zeigen, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt, dass es aber keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der irrationalen Zahlen geben kann. Mit anderen Worten, wenn Sie mit geschlossenen Augen die Zahlengerade zerschneiden, dann wird der Schnittpunkt mit hoher Wahrscheinlichkeit eine irrationale Zahl sein. Hätten wir keine irrationalen Punkte auf der Zahlengeraden, so gäbe es „Lücken“, denn nicht an jedem Punkt der Zahlengeraden steht eine rationale Zahl. Anschaulich gesprochen sichert das Schnittaxiom, dass wir die Zahlengerade lückenlos auffüllen können.

In Abschnitt 12.2 leiten wir erste Folgerungen aus den Axiomen her. Die, die in 12.2.1 aus den Körperaxiomen hergeleitet werden, sind im Wesentlichen die der Bruchrechnung. Im Gegensatz zu Termumformungen, die sich alle aus den Körperaxiomen herleiten lassen, werden wir in der Regel mit dem Umgang mit Ungleichungen nicht sehr geschult. Sie sollten sich daher in 12.2.2 die Zeit nehmen, das Rechnen mit Ungleichungen zu verinnerlichen, das werden wir künftig immer wieder brauchen. Hier leiten wir auch einige wichtige Ungleichungen her, die wir später immer wieder verwenden werden, um Zahlen abzuschätzen. In 12.2.3 geht es dann um Folgerungen aus dem Schnittaxiom. Insbesondere werden wir das so genannte Supremumsprinzip herleiten. Dieses ist äquivalent zum Schnittaxiom. Das Schnittaxiom ist geometrisch motiviert, man kann es sich also irgendwie vorstellen. Allerdings kann man mit ihm nicht richtig rechnen, und darauf werden wir angewiesen sein. Wir ersetzen in unserem Axiomensystem der reellen Zahlen also das Schnittaxiom durch das Supremumsprinzip, denn beide sind ja gleichwertig. In Abschnitt 12.2.4 werden wir etwas machen, was Ihnen von der Schule her bekannt zu sein scheint. Wir werden uns mit p-ten Wurzeln – also Wurzeln, dritten Wurzeln und so weiter – aus positiven reellen Zahlen beschäftigen. Ein alter Hut, meinen Sie? Nein, nicht wirklich, denn haben Sie jemals einen Beweis dafür gesehen, dass so etwas wirklich existiert? Und bedenken Sie, wir haben ja nur die neun Axiome zur Verfügung, und aus denen leiten wir all dies her. Wenn wir p-te Wurzeln haben, ist der Schritt zu Zahlen der Form $a^{\frac{r}{p}}$, $\frac{r}{p} \in \mathbb{Q}$, nicht mehr weit. Das ist einfach eine p-te Wurzel aus a, die in die r-te Potenz erhoben wird. Welche Regeln für diese Art von Zahlen gelten, werden wir ebenfalls in 12.2.4 klären.

Die Analysis lässt sich als die Theorie der Grenzprozesse auffassen. Die wichtigste Art des Grenzprozesses, auf die alle in diesem Kurs betrachteten zurückgeführt werden, ist die Konvergenz von reellen Folgen. Man widmet sich der Frage, ob eine unendlich lange Folge von Zahlen sich beliebig nahe einer reellen Zahl nähert, und was diese Zahl (eben der Grenzwert) sein könnte. Das war jetzt sehr schwammig, aber das wird in Kapitel 13 präzisiert. Dieses Kapitel ist die Grundlage für alles, was in den folgenden Kurseinheiten zur Analysis noch kommen wird. Sollten Sie mit Mut zur Lücke lernen, lassen Sie die Lücke bitte nicht hier. In den ersten vier Abschnitten dieses Kapitels geht es zunächst darum, sauber zu formulieren, was ein Grenzwert überhaupt ist und welche Spielregeln beim Umgang mit Grenzwerten zu beachten sind. Hier machen wir wieder den Spagat zwischen sehr formalen Definitionen, mit denen man gut rechen kann und eher geometrisch motivierten Umformulierungen, die man sich besser vorstellen kann. Wichtig sind in diesen Abschnitten auch die Beispiele, denn in der Analysis benutzt man bekannte Folgen und ihre Grenzwerte oft, um unbekannte Folgen abzuschätzen. In Abschnitt 13.5 geht es dann darum, wie man nur entscheiden kann, ob eine Folge einen Grenzwert besitzt oder nicht, ohne explizit geliefert zu bekommen, was dieser Grenzwert konkret ist. Hier werden Sie auf einen inzwischen alten Bekannten treffen: das Supremumsprinzip.

Ich habe zu Beginn gesagt, in der Analysis ginge es um Funktionen. Wann die denn kommen, möchten Sie wissen? In Kurseinheit 5 geht es los. In Kurseinheit 4 legen wir die Grundsteine dafür.

Kapitel 13

Grenzwerte von Folgen

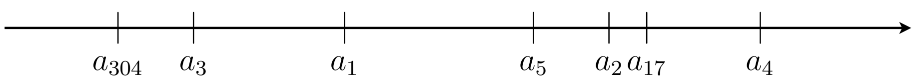
Die Analysis lässt sich als die Theorie der Grenzprozesse auffassen. Die wichtigste Art des Grenzprozesses, auf die alle in diesem Kurs betrachteten zurückgeführt werden, ist die Konvergenz von Folgen, der sich dieses Kapitel widmet.

13.1 Der Grenzwertbegriff

13.1.1 Definition: Eine **reelle Folge**, im Folgenden kurz **Folge** genannt, ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Wir haben eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vollständig im Griff, wenn wir ihre Bilder $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \ldots$ kennen. Wir schreiben also statt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder, noch kürzer (a_n).

Bildelemente einer Folge nennen wir auch **Folgenglieder**. Wir stellen uns die Glieder einer Folge wieder auf der Zahlengeraden vor:



Dieses Bild ist etwas irreführend, denn wir können nur endlich viele Folgenglieder in ihm unterbringen.

Wichtig: Eine Folge hat immer unendlich viele Elemente. Diese Elemente müssen nicht verschieden sein. Folgenglieder a_n und a_m werden als verschieden angesehen, auch wenn $f(n) = f(m)$ für $n \neq m$ sind.

Um künftig den Sprachgebrauch zu vereinfachen, führen wir folgende Definition ein:

13.1.2 Definition: Sei (a_n) eine Folge.

1. Für jeden Index $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ ein **Endstück** der Folge (a_n). Ein Endstück $(a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ der Folge (a_n) bezeichnen wir mit $(a_n)_{n>n_0}$.
2. Wir sagen, dass **fast alle** Glieder der Folge (a_n) eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben, wenn alle a_n – bis auf endlich viele Ausnahmen – die Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben.

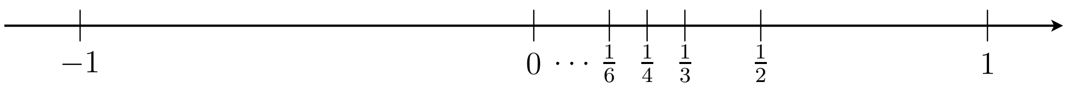
Der Gebrauch des „fast alle“ ist vielleicht etwas gewöhnungsbedürftig. Wenn wir eine Folge (a_n) haben, deren erste 12 Millionen Folgenglieder 1 sind, und danach sind alle Folgenglieder 0, so sagen wir trotzdem, dass fast alle Folgenglieder 0 sind. Wenn in einer Folge (b_n) erst 12 Millionen Einsen kommen, dann eine 0, dann wieder 12 Millionen Einsen, gefolgt von einer 0 und so weiter, dann können wir nicht sagen, dass fast alle Folgenglieder 1 sind, denn es kommen ja noch immer unendlich viele Nullen in (b_n) vor. Dass fast alle Glieder einer Folge (a_n) eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben, bedeutet, dass es einen Index n_0 so gibt, dass alle Glieder des Endstücks $(a_n)_{n>n_0}$ die Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben.

13.1.3 Aufgabe: Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Sei $\varepsilon = 0,001$. Beweisen Sie, dass fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen. (Zur Definition des Umgebungsbegriffes vergleichen Sie Definition 12.2.32 und Korollar 12.2.35.)

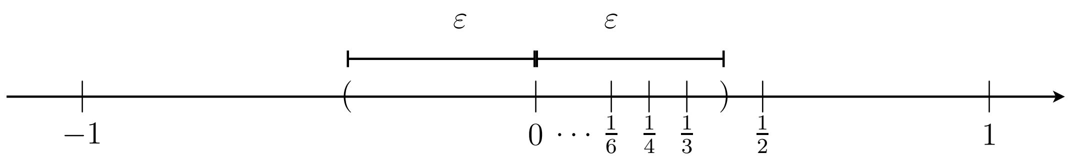
In Aufgabe 13.1.3 haben Sie gezeigt, dass bei der Folge $(\frac{1}{n})$ fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen, wobei $\varepsilon = 0,001$ fest vorgegeben war. Vermutlich hatten Sie schon den Eindruck, dass bei dieser Aufgabe gar nicht so entscheidend war, wie ε speziell gewählt war. Das ε hätte man vermutlich durch andere positive Zahlen ersetzen können. Dieser Eindruck ist richtig, und das werde ich im folgenden Beispiel vorführen.

13.1.4 Beispiel: Behauptung: Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige, fest vorgegebene, positive reelle Zahl. Dann liegen fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$.

Beweis: Mit dem Satz 12.2.58 des Eudoxos gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für alle $n > n_0$ gilt $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, also $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Es folgt $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$ für alle $n > n_0$ mit Korollar 12.2.35. Da alle Folgenglieder des Endstücks $(\frac{1}{n})_{n>n_0}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen, folgt, dass fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$ liegen. Veranschaulichen wir uns grafisch, was passiert:



Die Folgenglieder nähern sich von rechts dem Nullpunkt. Legen wir eine ε-Umgebung um 0, so gibt es nur endlich viele Folgenglieder, die nicht in dieser Umgebung liegen. Fast alle (also alle bis auf endlich viele) sind in der ε-Umgebung enthalten.



Verkleinern wir die ε-Umgebung, so werden nur endlich viele Folgenglieder aus der neuen ε-Umgebung herausfallen; fast alle werden auch in der kleineren ε-Umgebung liegen.

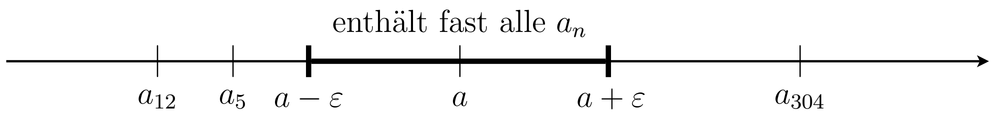
Noch eine Aufgabe für Sie:

13.1.5 Aufgabe: Sei $(a_n) = (2 + \frac{(-1)^n}{n})$. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige, fest vorgegebene, positive reelle Zahl. Beweisen Sie, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(2)$ liegen.

Nachdem wir uns mit den Aufgaben und dem Beispiel etwas warm gemacht haben, ist nun die Zeit für die wohl wichtigste Definition der Analysis gekommen – die der Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert.

13.1.6 Definition: Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder von (a_n) liegen.

Auf der Zahlengerade visualisiert: **Jede** ε-Umgebung von a enthält fast alle a_n:



13.1.7 Beispiel: In Beispiel 13.1.4 haben wir, und in Aufgabe 13.1.5 haben Sie gezeigt, dass die betrachteten Folgen konvergieren. Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0, und die Folge $(2 + \frac{(-1)^n}{n})$ konvergiert gegen 2.

Da die Definition der Konvergenz einer Folge so wichtig ist, sollten wir uns die Zeit nehmen, Definition 13.1.6 noch einmal in Ruhe durchzugehen. Sei also (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert.

1. Für alle $\varepsilon > 0$ müssen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen. Es reicht also nicht aus, für ein festes $\varepsilon > 0$ zu beweisen, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen – wie wir es in Aufgabe 13.1.3 für $(a_n) = (\frac{1}{n})$ mit $\varepsilon = 0{,}001$ gemacht haben. Wir müssen vorgehen wie in Beispiel 13.1.4: Wir müssen uns ein ε abstrakt vorgeben, von

dem wir nichts weiter annehmen dürfen, als dass es > 0 ist. Dann müssen wir zeigen, dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen.

2. Dass fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass das Endstück $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ liegt. Für verschiedene ε werden dann auch die n_0 verschieden sein, das n_0 ist also abhängig von ε. Betrachten wir etwa unser Beispiel $(a_n) = (\frac{1}{n})$. Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so liegt $(\frac{1}{n})_{n>2}$ vollständig in $U_\varepsilon(0)$, in diesem Fall wäre also schon $n_0 = 2$ ausreichend. Ist $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, so liegt erst das Endstück $(\frac{1}{n})_{n>1000}$ ganz in $U_\varepsilon(0)$. Hier wäre also $n_0 = 1000$ ausreichend. Übrigens will man gar nicht wissen, wie genau so ein n_0 beschaffen ist. Es reicht bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Begründung, dass ein n_0 existiert, sodass $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ ist.

3. Kommen wir noch einmal zu dem Begriff der ε-Umgebung eines Punktes a. In Proposition 12.2.33 haben wir gezeigt:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Wenn also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ das Endstück $(a_n)_{n>n_0}$ ganz in $U_\varepsilon(a)$ liegt, so ist dies gleichbedeutend damit, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ ist, für alle $n > n_0$.

Nachdem wir die Definition einer Folge (a_n), die gegen a konvergiert, auseinander genommen haben, können wir den Konvergenzbegriff noch einmal ausführlicher definieren:

13.1.8 Definition: Eine reelle Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl ε einen Index n_0 so gibt, dass für alle Indizes $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ ist.

Die Definitionen 13.1.6 und 13.1.8 sind gleichwertig, besagen also dasselbe. In den meisten Lehrbüchern zur Analysis wird der Konvergenzbegriff mit Definition 13.1.8 eingeführt. Die Definition 13.1.6 hat den Vorteil, dass sie so schön anschaulich ist. Definition 13.1.8 hat ihrerseits den Vorteil, dass man mit ihr weit besser rechnen kann, wenn man beispielsweise überprüfen möchte, ob eine gegebene Folge (a_n) gegen a konvergiert. Definition 13.1.8 gibt nahezu einen Algorithmus, was zu tun ist: Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige, dass es ein n_0 so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Beide Definitionen sollten Sie auswendig lernen.

13.1.9 Definition: Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Die Zahl a wird **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) genannt.

13.1.10 Notation: Konvergiert (a_n) gegen a, so sagen wir auch, dass (a_n) **konvergent** gegen a ist, oder, dass (a_n) gegen a **strebt**.

13.1.11 Beispiele: (Konvergente Folgen)

1. Die konstante Folge $(a, a, a, \dots)$ konvergiert gegen a. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich, wenn $a_n = a$ gesetzt wird, $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$.

2. Sei $p \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\frac{1}{\sqrt[p]{n}})$ konvergiert gegen 0.

   Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Folge $(\frac{1}{n})$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu der positiven Zahl ε^p ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $\frac{1}{n} < \varepsilon^p$ ist. Für diese n ist dann (vergleichen Sie Proposition 12.2.79)

$$\left| \frac{1}{\sqrt[p]{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \varepsilon.$$

3. Die Folge $(\sqrt[n]{n})$ konvergiert gegen 1. Der Beweis dieser Tatsache ist allerdings schon ziemlich trickreich:

   Da $1 \leq n$, folgt mit Proposition 12.2.79, dass $1 \leq \sqrt[n]{n}$ gilt. Wir definieren $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, und dann gilt $|a_n| = a_n$.

   Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|\sqrt[n]{n} - 1| = |a_n| = a_n < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ ist. Aus dem binomischen Lehrsatz 12.2.62 folgt für $n \geq 2$

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n^n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2.$$

   Für $n \geq 2$ erhalten wir daraus (vergleichen Sie mit der Definition des Binomialkoeffizienten 12.2.60)

$$a_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n}, \text{ und somit } a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

   Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, gibt es zu jeder positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ein $n_0 \geq 2$, sodass $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n gilt dann

$$a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

   Da $a_n = |a_n| = |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, folgt, dass $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert.

4. Für feste q mit $|q| < 1$ konvergiert die Folge (q^n) gegen 0.

Im Fall $q = 0$ ist die Behauptung mit dem ersten Beispiel richtig. Wir nehmen also an, dass $0 < |q| < 1$ gilt. Dann ist $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ mit einem $h > 0$, also $|q| = \frac{1}{1+h}$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung 12.2.17 gilt

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Geben wir uns nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor, so gibt es mit dem Satz 12.2.57 des Archimedes ein $n_0 > \frac{1}{h\varepsilon}$. Dann gilt $n_0 h > \frac{1}{\varepsilon}$, und damit $\frac{1}{n_0 h} < \varepsilon$. Wir erhalten dann für alle $n > n_0$ die Abschätzung

$$|q^n - 0| < \frac{1}{nh} < \frac{1}{n_0 h} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert (q^n) für alle $|q| < 1$ gegen 0.

13.1.12 Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(\frac{1}{n^p})$ gegen 0 konvergiert.

13.1.13 Notation: Dass eine Folge (a_n) gegen a konvergiert, drückt man wie folgt aus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder kürzer } \lim a_n = a.$$

Ausgesprochen werden diese Symbole als „Für n gegen unendlich konvergiert a_n gegen a“ oder „Der Grenzwert/Limes von a_n für n gegen unendlich ist a“.

13.1.14 Aufgabe: Beweisen Sie:

Genau dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$.

13.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

Wenn (a_n) eine Folge ist, die gegen a konvergiert, so sagen wir auch einfach nur, dass (a_n) konvergent ist. Dabei verschweigen wir also, was der Grenzwert von (a_n) ist.

Die folgenden Propositionen fassen erste Eigenschaften konvergenter Folgen zusammen.

13.2.1 Proposition: Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis: Angenommen, a und b sind verschiedene Grenzwerte von (a_n). Wir können annehmen, dass $a < b$ gilt, anderenfalls benennen wir a und b entsprechend um. Wir betrachten das Intervall (a, b). Dieses hat den Radius $\frac{b-a}{2}$ (vergleichen Sie Definition 12.2.30). Dann ist $\frac{b-a}{2} > 0$, und wir setzen $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Nach Konstruktion ist $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.

Da a und b Grenzwerte sind, enthält jede der Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ ein Endstück von (a_n). Damit gibt es unendlich viele a_n, die in $U_\varepsilon(a)$ und in $U_\varepsilon(b)$, also in $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ liegen. Das ist aber unmöglich, denn die Umgebungen haben keinen Punkt gemeinsam. Dieser Widerspruch zeigt, dass $a = b$ gelten muss. □

Der mit Proposition 13.2.1 eindeutig bestimmte Grenzwert einer konvergenten Folge (a_n) erhält eine eigene Bezeichnung:

13.2.2 Notation: Konvergiert die Folge (a_n) gegen den Grenzwert a, so wird a mit $\lim a_n$ bezeichnet.

13.2.3 Definition: Ist $(n_1, n_2, \dots)$ eine streng wachsende Folge von natürlichen Zahlen (also $n_i < n_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$), so nennen wir $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine **Teilfolge** von (a_n).

Beachten Sie, dass Teilfolgen von Folgen wieder Folgen sind, also unendlich viele Folgenglieder besitzen müssen. Insbesondere ist ein Endstück eine Teilfolge und somit eine Folge.

Anschaulich ausgedrückt erhalten wir eine Teilfolge einer Folge (a_n), indem wir an der ursprünglichen Folge entlanggehen und dabei immer wieder einmal ein Folgenglied herausgreifen (wobei die so ausgewählten Glieder in der Reihenfolge angeordnet werden, in der sie herausgegriffen wurden, also in derselben Reihenfolge, die sie in der ursprünglichen Folge hatten). Allerdings müssen wir das Herausgreifen unendlich oft machen.

13.2.4 Proposition: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (a_n) konvergiert gegen $\lim a_n$.

Beweis: Sei $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine Teilfolge der konvergenten Folge (a_n), und sei $\lim a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann liegen in $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder von (a_n), also auch fast alle Folgenglieder von $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$. Mit Definition 13.1.6 folgt, dass $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ gegen a konvergiert. □

13.2.5 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Folge $((-1)^n)$ nicht konvergent ist.

13.2.6 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$ beschränkt ist (vergleichen Sie Definition 12.2.42)

13.2.7 Proposition: Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis: Da (a_n) konvergent ist, liegt in der 1-Umgebung $U_1(a)$ von $\lim a_n = a$ ein Endstück $(a_m, a_{m+1}, \dots)$. Dieses Endstück ist beschränkt, durch $a+1$ nach oben und $a-1$ nach unten. Dann ist aber auch die ganze Folge $(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \dots)$ beschränkt, da jede endliche Menge $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ beschränkt ist. □

13.2.8 Aufgabe: Beweisen Sie, dass die Folge (n) nicht konvergent ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Resultat, das die große Bedeutung des Grenzwertbegriffes in der Theorie der reellen Zahlen hervorhebt.

13.2.9 Proposition: Jede reelle Zahl a ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir wissen mit Korollar 12.2.59, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es daher eine rationale Zahl r_n mit $|r_n - a| < \frac{1}{n}$. Wir zeigen nun, dass die Folge (r_n) gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für alle $n > n_\varepsilon$:

$$|r_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass (r_n) gegen a konvergiert. □

13.3 Divergente Folgen

Sie haben im letzten Abschnitt schon von gewissen Folgen gezeigt, dass sie nicht konvergent sind. Folgen, die nicht konvergent sind, erhalten einen eigenen Begriff:

13.3.1 Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Divergenz einer Folge (a_n) bedeutet also, dass es keine reelle Zahl a gibt, gegen die (a_n) konvergiert. Dass (a_n) nicht gegen a konvergiert, bedeutet: Nicht in jeder ε-Umgebung liegt ein Endstück von (a_n), vielmehr existiert eine „Ausnahmeumgebung“ $U_{\varepsilon_0}(a)$, sodass jedes noch so späte Endstück einen „Ausreißer“ enthält, also ein Folgeglied a_n, das nicht in $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt. In $(a_1, a_2, \dots)$ gibt es also ein

$a_{n_1} \notin U_{\varepsilon_0}(a)$, in $(a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots)$ ein $a_{n_2} \notin U_{\varepsilon_0}$ und so weiter. Mit anderen Worten, es gibt Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, sodass durchweg $|a_{n_i} - a| \geq \varepsilon_0$ ist. Mit dem Begriff der Teilfolge in Definition 13.2.3 können wir das auch so formulieren: Wenn (a_n) nicht gegen a konvergiert, dann gibt es eine ε_0-Umgebung von a, sodass es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die vollständig außerhalb von $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt.

Nehmen wir nun umgekehrt an, (a_n) wäre eine Folge und a eine reelle Zahl, für die es eine ε_0-Umgebung $U_{\varepsilon_0}(a)$ gibt, sodass eine Teilfolge vollständig außerhalb von $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt. Da Teilfolgen unendlich viele Folgenglieder enthalten, kann (a_n) nicht gegen a konvergieren. Unsere Überlegungen zeigen:

13.3.2 Proposition: Genau dann konvergiert (a_n) nicht gegen a, wenn es eine ε_0-Umgebung von a so gibt, dass eine Teilfolge von (a_n) vollständig außerhalb von $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt. □

13.3.3 Beispiele: (Divergente Folgen)

1. Die Folgen $((-1)^n)$ und (n) sind divergent. Das haben Sie in den Aufgaben 13.2.5 und 13.2.8 bewiesen.

2. Die Folge $(a_n) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})$ ist divergent.

   Zum Beweis zeigen wir, dass die Folge unbeschränkt ist. Sei $G > 0$ beliebig, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{2^{k+1}} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2^2}\right) + \left(\tfrac{1}{2^2+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^k+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &> \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{2^2}{2^3} + \cdots + \tfrac{2^k}{2^{k+1}} \\ &= \tfrac{k+1}{2} \\ &> G. \end{aligned}$$

   Da die Folge nicht beschränkt ist, kann sie mit Proposition 13.2.7 nicht konvergent sein.

3. Die Folge $(a_n) = ((-1)^{n+1} + \frac{1}{n})$ ist divergent.

   Zum Beweis betrachten wir die Teilfolgen (a_{2n-1}) und (a_{2n}). Es ist $(a_{2n-1}) = ((-1)^{2n} + \frac{1}{2n-1}) = (1 + \frac{1}{2n-1})$ und $(a_{2n}) = ((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n}) = (-1 + \frac{1}{2n})$. Die erste Teilfolge konvergiert gegen 1, die zweite gegen -1 (vergleichen Sie Aufgabe 13.3.4). Da diese Grenzwerte verschieden sind, kann (a_n) mit Proposition 13.2.4 nicht konvergent sein.

4. In Beispiel 13.1.11 haben wir gezeigt, dass die Folge (q^n) für $|q| < 1$ konvergent ist. Hier zeigen wir, dass die Folge (q^n) für $|q| > 1$ divergent ist. Dazu werden wir zeigen, dass diese Folge nicht beschränkt ist.

   Ist $|q| > 1$, so gibt es ein $r > 0$ mit $|q| = 1 + r$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung 12.2.17 folgt
   $$|q^n| = |q|^n = (1+r)^n \geq 1 + rn > rn.$$
   Angenommen, die Folge (q^n) ist beschränkt. Dann gibt es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $|q^n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $rn \leq S$, also $n \leq \frac{S}{r}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit wäre $\frac{S}{r}$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Das ist aber ein Widerspruch zum Satz des Archimedes 12.2.57. Dieser Widerspruch zeigt, dass (q^n) für $|q| > 1$ nicht beschränkt und somit nicht konvergent ist.

13.3.4 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $(1 + \frac{1}{2n-1})$ gegen 1 und $(-1 + \frac{1}{2n})$ gegen -1 konvergiert.

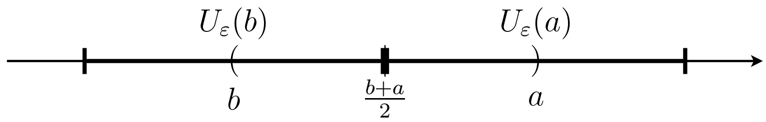
13.4 Das Rechnen mit konvergenten Folgen

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind unentbehrlich für den Umgang mit konvergenten Folgen. Ich bitte Sie daher, sie sich besonders einzuprägen.

13.4.1 Proposition: (Vergleichssatz)

Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, und ist fast immer $a_n \leq b_n$, so folgt $a \leq b$.

Beweis: Angenommen, $a > b$. Wir betrachten das Intervall (b, a) mit Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ und Radius $\frac{a-b}{2}$ (vergleiche Definition 12.2.30). Sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Die Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ sind wie folgt auf dem Zahlenstrahl verteilt:



In $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle a_n, und in $U_\varepsilon(b)$ fast alle b_n. Aber dann gilt $a_n > b_n$ für fast alle Indizes, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Dieser Widerspruch zeigt, dass $a \leq b$ gelten muss. □

13.4.2 Aufgabe: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Konvergiert (a_n) gegen a, und gilt fast immer $\alpha \leq a_n \leq \beta$, so folgt $\alpha \leq a \leq \beta$.

13.4.3 Proposition: (Einschnürungssatz)

Konvergieren (a_n) und (b_n) gegen a, und gilt fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$, so konvergiert (c_n) gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann liegen fast alle a_n und fast alle b_n in $U_\varepsilon(a)$. Dann müssen auch fast alle c_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, und es folgt, dass (c_n) gegen a konvergiert. $\square$

13.4.4 Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe des Einschnürungssatzes, dass $(\frac{1}{2n+1})$ gegen 0 konvergiert.

13.4.5 Definition: Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, wird **Nullfolge** genannt.

13.4.6 Proposition: Ist (α_n) eine Nullfolge, und gilt fast immer $|a_n - a| \leq \alpha_n$, so konvergiert (a_n) gegen a.

Beweis: Mit dem Einschnürungssatz gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, denn fast immer gilt $0 \leq |a_n - a| \leq \alpha_n$, und als einschnürende Folgen können wir die konstante Folge (0) und die Nullfolge (α_n) nehmen. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ stets $|(a_n - a) - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$ ist. Das bedeutet aber gerade, dass (a_n) gegen a konvergiert. $\square$

13.4.7 Proposition: (Betragssatz)

Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert $(|a_n|)$ gegen $|a|$.

Beweis: In Proposition 12.2.21 haben wir gesehen, dass stets $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ gilt. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ stets $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ ist. Das bedeutet aber gerade, dass $(|a_n|)$ gegen $|a|$ konvergiert. $\square$

13.4.8 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (a_n), sodass $(|a_n|)$ konvergent ist, aber (a_n) nicht konvergent ist.

Das nächste Ergebnis besagt, dass man Nullfolgen mit beschränkten Folgen multiplizieren darf, ohne die Konvergenz gegen Null zu zerstören.

13.4.9 Proposition: Ist (a_n) eine Nullfolge, und ist (b_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis: Da (b_n) beschränkt ist, gibt es eine positive reelle Zahl β mit $|b_n| < \beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $\frac{\varepsilon}{\beta} > 0$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{\beta}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n gilt dann

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|\beta < \frac{\varepsilon}{\beta}\beta = \varepsilon.$$

Es folgt, dass $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist. □

13.4.10 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $((-1)^n \frac{17}{n})$ eine Nullfolge ist.

Sind (a_n) und (b_n) Folgen, so definieren wir eine Addition $(a_n) + (b_n)$ durch $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$. Die Summe der Folgen erfolgt also – wie bei Zeilenvektoren – komponentenweise. Ist $a \in \mathbb{R}$, und ist (a_n) eine Folge, so definieren wir eine Skalarmultiplikation $a(a_n)$ durch $a(a_n) = (aa_n)$. Ein Standardbeweis zeigt:

13.4.11 Bemerkung: Die Menge der reellen Folgen ist mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wie bei Vektorräumen üblich bezeichnet $(a_n) - (b_n)$ die Folge $(a_n) + (-(b_n)) = (a_n - b_n)$.

In Vektorräumen war ja kein Produkt von Vektoren erklärt. Das ist bei Folgen anders. Sind (a_n) und (b_n) reelle Folgen, so definieren wir $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$, also wieder durch komponentenweise Multiplikation. Sind in (b_n) fast alle $b_n \neq 0$ so definieren wir $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ als die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$, wobei wir vereinbaren wollen, dass $(\frac{a_n}{b_n})$ erst bei einem Index beginnt, ab dem alle $b_n \neq 0$ sind. Wie sich Grenzwerte konvergenter Folgen bei Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenbildung verhalten, ist Inhalt der folgenden Proposition.

13.4.12 Proposition: (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Sei (a_n) konvergent gegen a, und sei (b_n) konvergent gegen b. Dann gilt

1. $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.
2. $(a_n b_n)$ konvergiert gegen ab.
3. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so konvergiert (αa_n) gegen αa.
4. $(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $a - b$.
5. Ist $b \neq 0$, und sind fast alle $b_n \neq 0$, so konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$. (Beachten Sie, dass $(\frac{a_n}{b_n})$ erst bei einem Index beginnen soll, ab dem alle $b_n \neq 0$ sind.)

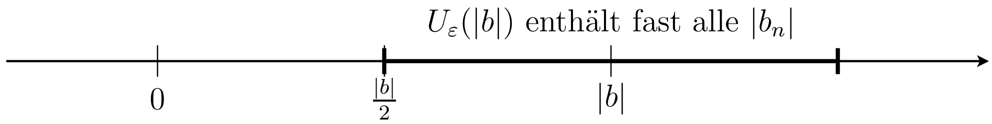
Beweis:

1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da (a_n) und (b_n) konvergent sind, gibt es Indizes n_0 und n_1, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_0$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_1$ gilt. Für alle $n > \max\{n_0, n_1\}$ gilt dann
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Bei der ersten Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung verwendet (vergleiche Definition 12.2.22). Es folgt, dass $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$ konvergiert.

2. Da (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert, sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen (vergleiche Aufgabe 13.1.14). Mit Proposition 13.2.7 ist (b_n) beschränkt. Aus Proposition 13.4.9 folgt, dass $((a_n - a)b_n)$ und $((b_n - b)a)$ Nullfolgen sind. Mit der ersten Aussage dieser Proposition gilt, dass
$$(a_n b_n - ab) = ((a_n - a)b_n) + ((b_n - b)a)$$
eine Nullfolge ist. Somit konvergiert $(a_n b_n)$ gegen ab (vergleiche Aufgabe 13.1.14).

3. Diese Aussage folgt aus der zweiten indem wir für (b_n) die konstante Folge (α) nehmen.

4. Es ist $(a_n - b_n) = (a_n + (-b_n))$. Mit der dritten Aussage dieser Proposition konvergiert $(-b_n) = (-1)(b_n)$ gegen $-b$, und mit der ersten Aussage folgt, dass $(a_n - b_n)$ gegen $a - b$ konvergiert.

5. Sei $b \neq 0$. Mit dem Betragssatz 13.4.7 konvergiert $(|b_n|)$ gegen $|b|$. Da $|b| > 0$, ist $\frac{|b|}{2} > 0$. Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Da $U_\varepsilon(|b|)$ fast alle $|b_n|$ enthält (vergleiche Skizze),


gibt es ein n_0, sodass $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für alle $n > n_0$ ist. Für diese n ist $b_n \neq 0$, und es gilt die Abschätzung
$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|.$$
Die Folge $(|b - b_n|) = (|b_n - b|)$ ist eine Nullfolge, und die konstante Folge $(\frac{2}{|b|^2})$ ist konvergent. Mit der zweiten Aussage dieser Proposition folgt, dass $(\frac{2}{|b|^2}|b - b_n|)$ eine Nullfolge ist. Mit Proposition 13.4.6 konvergiert $(\frac{1}{b_n})$ gegen $\frac{1}{b}$. Mit der zweiten Aussage konvergiert $(\frac{a_n}{b_n}) = (a_n \frac{1}{b_n})$ gegen $\frac{a}{b}$.

□

13.4.13 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für eine Nullfolge (b_n), deren Folgenglieder alle $\neq 0$ sind, sodass $(\frac{1}{b_n})$ divergent ist.

13.4.14 Aufgabe: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen, und sei $U \subseteq V$ die Menge der konvergenten Folgen.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.
2. Beweisen Sie, dass $f : U \to \mathbb{R}$, definiert durch $f((a_n)) = \lim a_n$ für alle $(a_n) \in U$, linear ist.

Proposition 13.4.12 schreibt man gern in der Kurzform

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n \text{ und } \lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

So suggestiv diese Schreibweise auch ist, so fehleranfällig ist sie. Wir müssen uns nämlich darüber im klaren sein, dass diese Formeln von rechts nach links gelesen werden müssen. Wenn die Grenzwerte von (a_n) und (b_n) existieren, dann existieren auch die von $(a_n \pm b_n)$ und $(a_n b_n)$. Keineswegs darf man aus der Tatsache, dass der Grenzwert von $(a_n + b_n)$ existiert, schließen, dass die Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) existieren, wie es die Kurzschreibweise oben suggeriert.

13.4.15 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n), sodass (a_n+b_n) konvergiert und (a_n) und (b_n) divergieren.

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt ermöglichen uns, von vielen Folgen Grenzwerte zu berechnen, sofern wir über einen gewissen Fundus von Folgen verfügen, von denen wir die Grenzwerte kennen.

13.4.16 Beispiel:

1. Die Folge $(\frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1})$ konvergiert gegen $\frac{3}{4}$, denn
$$\frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1} = \frac{3n^2-8n-3}{4n^2-1} = \frac{3-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}.$$
Die Folge $(4-\frac{1}{n^2})$ unter dem Bruchstrich konvergiert gegen 4, denn $(\frac{1}{n^2})$ ist eine Nullfolge. Die Folge $(3-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2})$ konvergiert gegen 3, denn $(-\frac{8}{n})$ und $(-\frac{3}{n^2})$ sind Nullfolgen. Somit gilt $\lim \frac{(3n+1)(n-3)}{4n^2-1} = \frac{3}{4}$.
2. **Behauptung:** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, und sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

   Falls $a = 0$, so gibt es ein n_0, sodass $0 \leq a_n < \varepsilon^2$ für alle $n > n_0$ gilt. Für diese n gilt $0 \leq \sqrt{a_n} < \varepsilon$, und es folgt, dass $(\sqrt{a_n})$ gegen $0 = \sqrt{a}$ konvergiert.

Sei $a > 0$. Es gilt $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}||\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| = |(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})| = |a_n - a|$, und es folgt

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Da $(|a_n - a|)$ eine Nullfolge ist, ist $(\frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}})$ eine Nullfolge. Mit 13.4.6 folgt, dass $(\sqrt{a_n})$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

13.4.17 Aufgabe: Was ist falsch an folgendem „Beweis" der Aussage 2 in Beispiel 13.4.16?

$$a = \lim a_n = \lim \sqrt{a_n}\sqrt{a_n} = \lim \sqrt{a_n} \cdot \lim \sqrt{a_n} = z \cdot z$$

für ein $z \in \mathbb{R}$. Da $\sqrt{a_n} \geq 0$, folgt $z \geq 0$. Somit gilt $\lim \sqrt{a_n} = z = \sqrt{a}$. (Vorsicht, kein Beweis!)

13.4.18 Aufgabe: Beweisen Sie, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Hinweis: Aufgabe 12.2.18 könnte hilfreich sein.

13.5 Vier Prinzipien der Konvergenztheorie

Wenn wir bisher die Konvergenz einer Folge (a_n) bewiesen haben, ging das nicht ohne die Kenntnis des Grenzwertes. Entweder mussten wir den Grenzwert „raten" (oder unsere gute Fee legte uns nahe, doch mal Folgendes auszuprobieren), und wir haben die Konvergenz dann mit Hilfe der Definition 13.1.8 verifiziert. Oder wir haben die Konvergenz von (a_n) mit Hilfe der Tricks des letzten Abschnittes bewiesen – dafür mussten wir aber die Grenzwerte der Folgen kennen, die für die Herleitung des Grenzwertes von (a_n) benötigt wurden.

Manchmal möchte man aber nur wissen, ob eine Folge konvergiert oder nicht. Die Ergebnisse dieses Abschnittes zeigen, dass dies möglich ist. Alle Ergebnisse sind Folgerungen aus dem Supremumsprinzip, Satz 12.2.52.

Das Monotonieprinzip

13.5.1 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton**, falls gilt:

1. $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder
2. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Im ersten Fall nennt man (a_n) **monoton wachsend**, im zweiten Fall **monoton fallend**.

Eine Folge ist genau dann monoton wachsend, wenn $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und monoton fallend, wenn $a_{n+1} - a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sind alle Folgenglieder positiv, so ist (a_n) genau dann monoton wachsend, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und monoton fallend, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

In Definition 13.2.6 haben wir gesagt, wann wir eine Folge (a_n) beschränkt nennen: Die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ muss beschränkt sein. Ist (a_n) beschränkt, so besitzt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum a (vergleiche Satz 12.2.52) und ein Infimum (vergleiche Korollar 12.2.53). Dieses Supremum hat folgende Eigenschaften (vergleiche Definition 12.2.47):

1. Es gilt $a_n \leq a$ für alle Folgenglieder a_n, und

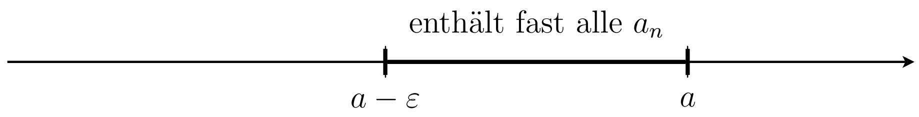
2. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein a_{n_0} mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$.

In Proposition 13.2.7 haben wir gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Das folgende Resultat zeigt, dass für monotone Folgen auch die Umkehrung gilt:

13.5.2 Satz: (Monotonieprinzip)

Jede monotone, beschränkte Folge (a_n) konvergiert. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert sie gegen $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ist (a_n) monoton fallend und beschränkt, so konvergiert sie gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt, und sei $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, folgt $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Da $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wir in folgender Situation:



Da fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, folgt, dass (a_n) gegen a konvergiert.

Sei nun (a_n) monoton fallend und beschränkt. Sei $a' = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Folge $(-a_n)$ ist monoton wachsend. Wie wir oben gezeigt haben, konvergiert $(-a_n)$ gegen $\sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. In Aufgabe 12.2.51 haben Sie gezeigt, dass $\sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Da $(-a_n)$ gegen $-\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert, folgt mit Proposition 13.4.12, dass (a_n) gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. $\square$

In Kombination mit 13.2.7 erhalten wir:

13.5.3 Korollar: Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. □

Es folgen Beispiele, in denen zum Nachweis der Konvergenz das Monotonieprinzip verwendet wird.

13.5.4 Beispiele: 1. Die Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Dies zeigt, dass (a_n) monoton wachsend ist. Weiter gilt für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) \text{ (bitte nachrechnen)} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Es gilt auch $|a_1| < 2$, das heißt, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt. Somit ist (a_n) beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

Sie möchten den Grenzwert wissen? Okay, aber weil der gar nicht einfach zu bestimmen ist, gibt es den nur ohne Beweis. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6}\pi^2$, wobei π die Kreiszahl bezeichnet.

2. Die Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ ist konvergent. Dabei bezeichnet $k!$ das Produkt der ersten k natürlichen Zahlen, also $k! = k(k-1)\cdots 2 \cdot 1$, und $0!$ wird als 1 definiert.

Zum Beweis dieser Behauptung zeigen wir wieder, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, und es folgt, dass (a_n) monoton wachsend ist.

Weiter gilt für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_1 \leq a_n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)\cdots 1} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} \text{ wie im ersten Beispiel oben (13.5.4)} \\ &< 3. \end{aligned}$$

Also ist (a_n) durch 3 beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

3. Die Folge $(a_n) = ((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ ist konvergent.

   Zum Beweis zeigen wir, dass (a_n) monoton fallend ist. Da alle Folgenglieder positiv sind, reicht es, zu zeigen, dass $\frac{a_{n-1}}{a_n} \geq 1$ für alle $n \geq 2$ ist. Auf geht's: Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_{n-1}}{a_n} &= \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\tfrac{1}{n^2-1}\right)^n \tfrac{n}{n+1} \text{ (nachrechnen, Aufgabe 13.5.5)} \\
&\geq \left(1+\tfrac{n}{n^2-1}\right) \tfrac{n}{n+1} \text{ (Bernoulli'sche Ungleichung)} \\
&\geq \left(1+\tfrac{n}{n^2}\right) \tfrac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\tfrac{1}{n}\right) \tfrac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

   Wir haben also gezeigt, dass (a_n) monoton fallend ist. Somit gilt $a_n \leq a_1 = 4$, und da alle Folgenglieder positiv sind, ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

13.5.5 Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}.$$

Ich habe noch gar nichts zu den Grenzwerten der Folgen $(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ und $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ gesagt. Das möchte ich jetzt nachholen.

13.5.6 Definition: Der Grenzwert der Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ wird mit e bezeichnet und **Euler'sche Zahl** genannt.

Mit dieser Bezeichnung ehrt man den schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783). Näherungsweise ist $e \approx 2,7182818$. Wir werden in 13.5.9 zeigen, dass e auch der Grenzwert der Folge $(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ ist. Die Zahl e ist irrational, wie wir in Kurseinheit 6 zeigen werden.

Die Euler'sche Zahl e wird später noch eine wichtige Rolle spielen, daher sollten wir sie hier schon etwas genauer anschauen – sie ist nämlich auch Grenzwert von anderen Folgen als der, die wir in Beispiel 13.5.4 betrachtet haben.

13.5.7 Proposition: Es sind $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

Beweis: Es ist $(1+\frac{1}{n})^n = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Zähler der rechten Seite der Gleichung gegen e, und der Nenner konvergiert gegen 1. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen, Proposition 13.4.12, konvergiert $((1+\frac{1}{n})^n)$ gegen $\frac{e}{1} = e$, die erste Behauptung. Um die zweite Gleichung zu beweisen, stellen wir fest, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$(1+\frac{1}{n-1})^n(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n}{n-1})^n(\frac{n-1}{n})^n = 1.$$

Es ist also $(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Nenner der rechten Seite der Gleichung gegen e, und der Zähler gegen 1. Somit konvergiert $((1-\frac{1}{n})^n)$ gegen $\frac{1}{e}$, die zweite Behauptung. □

Bevor es in Vergessenheit gerät, wollen wir noch schnell eine bereits verwendete Notation festhalten:

13.5.8 Notation: Sei $k \in \mathbb{N}$. Mit $k!$ bezeichnen wir die Zahl $k! = k(k-1)\cdots 2\cdot 1$. Für $k = 0$ definieren wir $0!$ als $0! = 1$. Ausgesprochen wird $k!$ als „k Fakultät“.

13.5.9 Proposition: Es ist $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, und $e \leq 3$.

Beweis: Sei $(a_n) = ((1+\frac{1}{n})^n)$, und sei $(s_n) = (\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})$. Wir wissen bereits, dass (a_n) und (s_n) konvergent sind, und ebenfalls, dass $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist. Sei $e' = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Zu zeigen ist, dass $e = e'$ gilt.

Mit dem binomischen Lehrsatz 12.2.62 gilt $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$. Es ist

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}\frac{n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

Es folgt $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = s_n$, also $e \leq e'$ mit dem Vergleichssatz 13.4.1.

Wir werden jetzt zeigen, dass auch $e \geq e'$ gilt. Zum Beweis wählen wir $n \in \mathbb{N}$. Für alle $m > n$ gilt

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-k+1}{m} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{m-n}{m}\right)^n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$e = \lim_{m\to\infty} a_m \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n}{m}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n,$$

denn $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist eine Konstante, und $\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{n}{m})^n = 1$. Da $e \geq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $e \geq e'$. Zusammen mit $e' \geq e$ folgt $e = e'$, die Behauptung. In zweiten Beispiel von 13.5.4 haben wir gesehen, dass (s_n) monoton wachsend und durch 3 beschränkt ist. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e \leq 3$. □

Das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß

Als nächstes werden wir zeigen, dass jede Folge eine monotone Teilfolge enthält. Dazu definieren wir:

13.5.10 Definition: Sei (a_n) eine Folge. Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ eine **Gipfelstelle** von (a_n), wenn für alle $n > m$ stets $a_n < a_m$ gilt.

Anschaulich: m ist eine Gipfelstelle, wenn alle hinter a_m kommenden Folgenglieder unter a_m liegen.

13.5.11 Beispiel: Sei $(a_n) = (\frac{(-1)^n}{n})$. Alle positiven Folgenglieder sind Gipfelstellen von (a_n). Bei der Folge $(b_n) = (\frac{1}{n})$ sind alle Folgenglieder Gipfelstellen von (b_n). Bei der Folge $(c_n) = (n)$ gibt es keine Gipfelstellen.

13.5.12 Lemma: Jede Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge.

Beweis: Besitzt (a_n) unendlich viele Gipfelstellen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so ist $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots$, und (a_{n_k}) ist eine monoton fallende Teilfolge von (a_n). Gibt es nur endlich viele Gipfelstellen, so gibt es einen Index n_1, der echt größer als alle Gipfelstellen ist. Dieses n_1 ist selbst keine Gipfelstelle. Es folgt, dass es ein $n_2 > n_1$ gibt, sodass $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ ist. Da auch n_2 keine Gipfelstelle ist, gibt es ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. So fortfahrend erhalten wir eine monoton wachsende Teilfolge von (a_n). □

Den Begriff der Gipfelstelle können Sie nun vergessen. Wir haben ihn nur für den Beweis des Lemmas gebraucht.

13.5.13 Satz: (Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei (a_n) eine beschränkte Folge, und sei (a_{n_k}) eine monotone Teilfolge von (a_n). Wir wissen mit Lemma 13.5.12, dass eine solche existieren muss. Mit dem Monotonieprinzip 13.5.2 folgt, dass (a_{n_k}) konvergent ist. $\square$

Benannt ist der Satz nach dem Prager Philosoph, Theologen und Mathematiker Bernard Bolzano (1781-1848) und dem deutschen Mathematiker Karl Weierstraß (1815-1897).

Das Cauchy'sche Konvergenzprinzip

Dieses Konvergenzprinzip ist nach dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) benannt, der fundamentale Resultate der Analysis bewiesen hat. Ausgesprochen wir der Name „Kohschi".

13.5.14 Definition: Eine Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 so gibt, dass für alle $m, n > n_0$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ist.

Anschaulich formuliert: Späte Glieder einer Folge liegen beliebig dicht beieinander.

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge, wie wir jetzt sehen werden.

13.5.15 Bemerkung: Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei (a_n) konvergent gegen a. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ein n_0, sodass für alle $n > n_0$ stets $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Seien nun $m, n > n_0$. Dann gilt

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| = |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bei der ersten Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung benutzt. Es folgt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist. $\square$

Jede konvergente Folge ist also eine Cauchyfolge. Das Überraschende ist, dass auch die Umkehrung gilt:

13.5.16 Satz: Jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Wir zeigen zunächst, dass (a_n) beschränkt ist.

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein n_0, sodass $|a_m - a_n| < 1$ für alle $m, n > n_0$ ist. Da $|a_m| - |a_n| \leq ||a_m| - |a_n|| \leq |a_m - a_n|$ ist (vergleiche 12.2.21), folgt $|a_m| - |a_n| < 1$ für alle $m, n > n_0$. Sei $N = n_0 + 1$. Dann gilt $|a_m| - |a_N| < 1$ für alle $m > n_0$, also $|a_m| < 1 + |a_N|$

für alle $m > n_0$. Somit ist das Endstück $(a_m)_{m>n_0}$ von (a_n) beschränkt. Dann gilt für alle Folgenglieder a_n die Abschätzung $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_N|\}$. Mit anderen Worten: (a_n) ist beschränkt.

Nach dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß enthält (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}), die gegen a konvergiert.

Wir zeigen jetzt, dass (a_n) ebenfalls gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, sodass stets $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m > n_0$ ist. Da (a_{n_k}) gegen a konvergiert, gibt es ein $n_k > n_0$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $n_k > n_0$, gilt auch $|(a_n - a_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt verwenden wir noch einmal den Trick wie im Beweis der Bemerkung 13.5.15, nämlich geschickt 0 zu addieren. Für alle $n > n_0$ gilt

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt, dass (a_n) gegen a konvergiert. □

Fassen wir Bemerkung 13.5.15 und Satz 13.5.16 zusammen, so erhalten wir:

13.5.17 Korollar: (Cauchy'sches Konvergenzprinzip für Folgen)

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist. □

Das Monotonieprinzip und das Cauchy'sche Konvergenzprinzip sind Konvergenzkriterien, das heißt, Mittel, die es uns gestatten, aus dem Verhalten einer Folge Rückschlüsse auf ihr Konvergenzverhalten zu ziehen. Bisher konnten wir nur entscheiden, ob eine Folge gegen eine gewisse Zahl konvergiert. Von nun an können wir entscheiden, ob sie einen Grenzwert besitzt, ohne ihn – falls sie überhaupt einen hat – zu kennen.

Mit dem Cauchy'schen Konvergenzprinzip können wir auch entscheiden, ob eine Folge (a_n) divergent ist. Dies ist der Fall, wenn ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, sodass man zu jedem n_0 Indizes $m, n > n_0$ finden kann, für die $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$ ist. Wenn es also hinter jedem noch so späten Folgenglied immer wieder Glieder gibt, die sich mindestens um ein festes ε_0 unterscheiden.

13.5.18 Beispiele: 1. Wir haben in Beispiel 13.3.3 bereits gesehen, dass die Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ divergent ist. Damit kann sie keine Cauchyfolge sein. Wir werden dies jetzt noch einmal explizit beweisen.

Zum Beweis betrachten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Differenz

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wählen wir $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, und betrachten wir irgendeinen Index n_0, so ist für $n > n_0$ und $m = 2n$ stets $a_m - a_n \geq \varepsilon$. Es folgt, dass (a_n) keine Cauchyfolge ist.

2. Die nicht monotone Folge $(a_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k})$ ist eine Cauchyfolge und mithin konvergent.

   Zum Beweis sei $m > n$, also $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_n &= \tfrac{(-1)^n}{n+1} + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \\ &= (-1)^n (\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} - \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}}{n+k}). \end{aligned}$$

   Schreiben wir den Ausdruck innerhalb der Klammer in der Form

$$(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) \ldots,$$

   so sehen wir, dass er positiv ist, denn nur bei ungeradem k bleibt der letzte Summand $\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$ ungeklammert, und dann ist er positiv. Schreiben wir den Ausdruck in den Klammern in der Form

$$\frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) - (\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}) \ldots,$$

   so sehen wir, dass er $< \frac{1}{n+1}$ ist. Es gilt also $|a_{n+k} - a_n| < \frac{1}{n+1}$, unabhängig von k. Ist also $\varepsilon > 0$, so gibt es nach dem Satz des Eudoxos ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m > n_0$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ausfällt. Dies zeigt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

13.5.19 Aufgabe: Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ für alle $n \geq 2$.

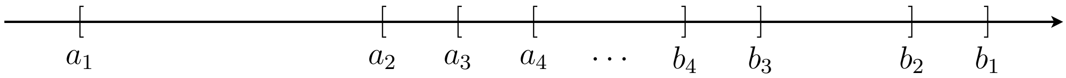
Beweisen Sie mit Induktion nach n, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis um zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Das Prinzip der Intervallschachtelung

Seien M und N Mengen. Wir schreiben $M \subsetneqq N$, wenn M eine Teilmenge von N ist, und wenn $M \neq N$ ist. Man sagt auch, dass M eine **echte** Teilmenge von N ist.

13.5.20 Definition: Eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ heißt **Intervallschachtelung**, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und wenn darüber hinaus die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist.

Dass $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist gleichbedeutend damit, dass die Folge (a_n) der linken Randpunkte monoton wächst und die Folge (b_n) der rechten Randpunkte monoton fällt. Grafisch dargestellt:



13.5.21 Notation: Eine Intervallschachtelung, wie sie in 13.5.20 definiert wurde, bezeichnen wir mit $\langle a_n | b_n \rangle$.

13.5.22 Satz: (Prinzip der Intervallschachtelung)

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n | b_n \rangle$ gibt es genau eine reelle Zahl a, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Beweis: Die Folgen (a_n) und (b_n) der Randpunkte sind monoton. Mit dem Monotonieprinzip 13.5.2 konvergiert (a_n) gegen $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und (b_n) konvergiert gegen $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach Annahme konvergiert $(b_n - a_n)$ gegen 0, und mit Proposition 13.4.12 konvergiert $(b_n - a_n)$ gegen $b - a$. Es gilt also $b - a = 0$, also $a = b$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a = b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq b_n,$$

liegt a in jedem der Intervalle der Schachtelung. Ist dies auch für eine Zahl c der Fall, gilt also $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq c \leq a$, also $a = c$. □

13.5.23 Beispiel: Wir beginnen mit dem Ausgangsintervall $[a_1, b_1]$. Dieses halbieren wir und betrachten $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ und $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Wir wählen eine der Hälften aus und bezeichnen diese mit $[a_2, b_2]$. Nun halbieren wir $[a_2, b_2]$, wählen eine der Hälften aus und bezeichnen sie mit $[a_3, b_3]$. So machen wir weiter. Die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ ist $(\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}})$. In Aufgabe 13.4.18 haben Sie gezeigt, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Es folgt, dass $(\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist. Auf diese Weise erhalten wir also eine Intervallschachtelung.

13.5.24 Aufgabe: Sei (a_n) die Folge aus Aufgabe 13.5.19, und sei $I_n = [a_{n+1}, a_n]$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und $I_n = [a_n, a_{n+1}]$ für gerade $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, Ihr Zahnarzt weiß, was ein Intervall ist. Erklären Sie ihm, wie diese Folge von Intervallen konstruiert ist.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 13.1

Aufgabe 13.1.3

Es ist $\varepsilon = 0,001 = \frac{1}{1000}$. Für alle $n > 1000$ gilt $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Es folgt mit Korollar 12.2.35, dass $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$ für alle $n > 1000$ gilt. Somit liegen fast alle $\frac{1}{n}$ in $U_\varepsilon(0)$.

Aufgabe 13.1.5

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist $U_\varepsilon(2) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < \varepsilon\}$. Es gilt

$$\left|(2 + \frac{(-1)^n}{n}) - 2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

denn für gerade n ist $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$, und für ungerade n ist $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$.

Ist also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für alle $n > n_0$:

$$\left|(2 + \frac{(-1)^n}{n}) - 2\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Somit liegen fast alle $2 + \frac{(-1)^n}{n}$ in $U_\varepsilon(2)$.

Aufgabe 13.1.12

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $p = 1$, so haben wir in Beispiel 13.1.4 bereits gezeigt, dass $(\frac{1}{n^p})$ gegen 0 konvergiert. Wir können also annehmen, dass $p > 1$ ist.

Dann gilt $n^p > n$ für alle $n > 1$, also $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n}$ für alle $n > 1$. Sei $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für alle $n > n_0$ ist $n > 1$, und es folgt

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(\frac{1}{n^p})$ konvergiert gegen 0.

Aufgabe 13.1.14

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Genau dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn es ein n_0 so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ ist.

Lösungen der Aufgaben in 13.2

Aufgabe 13.2.5

Wir betrachten die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n-1}) von $(a_n) = ((-1)^n)$. Alle Glieder der Teilfolge (a_{2n}) sind 1, und alle Glieder der Teilfolge (a_{2n-1}) sind -1. Somit konvergiert (a_{2n}) gegen 1 und (a_{2n-1}) gegen -1. Angenommen, (a_n) wäre konvergent gegen a. Mit Proposition 13.2.4 muss $1 = a = -1$ sein, ein Widerspruch. Es folgt, dass (a_n) nicht konvergent ist.

Aufgabe 13.2.8

Da (n) mit dem Satz des Archimedes nicht beschränkt ist, kann (n) mit Proposition 13.2.7 nicht konvergent sein.

Lösungen der Aufgabe in 13.3

Aufgabe 13.3.4

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es ist $\left|(1 + \frac{1}{2n-1}) - 1\right| = \left|\frac{1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1}$. Diesen Ausdruck wollen wir gleich gegen ε abschätzen. Dazu eine Vorüberlegung: Für alle $n_0 > 1$ gilt $2n_0 - 1 > n_0$. (Das können wir mit Induktion beweisen. Der Induktionsanfang für $n_0 = 2$ liefert $3 > 2$, eine wahre Aussage. Für den Induktionsschritt von n_0 nach $n_0{+}1$ gilt $2(n_0{+}1){-}1 = 2n_0 + 1 = 2n_0 - 1 + 2 > n_0 + 2 > n_0 + 1$.) Sei nun $n_0 > \max(1, \frac{1}{\varepsilon})$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n_0 - 1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|(1 + \frac{1}{2n-1}) - 1\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(1 + \frac{1}{2n-1})$ konvergiert gegen 1.

Es ist $\left|(-1 + \frac{1}{2n}) + 1\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$. Sei wieder $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es folgt $\left|(-1 + \frac{1}{2n}) + 1\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(-1 + \frac{1}{2n})$ konvergiert gegen -1.

Lösungen der Aufgaben in 13.4

Aufgabe 13.4.2

Die konstante Folge (α) konvergiert gegen α. Mit dem Vergleichssatz folgt $\alpha \leq a$. Die konstante Folge (β) konvergiert gegen β. Wieder mit dem Vergleichssatz folgt $a \leq \beta$. Insgesamt gilt $\alpha \leq a \leq \beta$.

Aufgabe 13.4.4

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$. Die konstante Folge (0) konvergiert gegen 0, und die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $(\frac{1}{2n+1})$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 13.4.8

Sei $(a_n) = ((-1)^n)$. Wir haben gesehen, dass (a_n) divergent ist. Es ist aber $(|a_n|) = (1)$, und die konstante Folge (1) konvergiert gegen 1.

Aufgabe 13.4.10

Sei $(a_n) = (\frac{1}{n})$, und sei $(b_n) = ((-1)^n \cdot 17)$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge, und (b_n) ist eine beschränkte Folge. Es ist $(a_n b_n) = ((-1)^n \frac{17}{n})$. Mit Proposition 13.4.9 folgt, dass $((-1)^n \frac{17}{n})$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 13.4.13

Sei $(b_n) = (\frac{1}{n})$. Es ist (b_n) eine Nullfolge, und $(\frac{1}{b_n}) = (n)$. Da (n) nicht beschränkt ist, ist $(\frac{1}{b_n})$ divergent.

Aufgabe 13.4.14

1. Zum Beweis verwenden wir das Unterraumkriterium 6.2.3.

   Der Nullvektor in V ist die konstante Folge (0). Diese ist konvergent, liegt also in U.

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, so besagt die erste Aussage von Proposition 13.4.12, dass $(a_n) + (b_n)$ konvergent ist, also in U liegt.

Sei (a_n) konvergent, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die dritte Aussage von 13.4.12 besagt, dass $\alpha(a_n)$ konvergent ist, also in U liegt. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Dann gilt $f((a_n) + (b_n)) = \lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = f((a_n)) + f((b_n))$ mit der ersten Aussage von 13.4.12.

   Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(\alpha(a_n)) = \lim(\alpha a_n) = \alpha \lim(a_n) = \alpha f((a_n))$ mit der dritten Aussage von 13.4.12. Es folgt, dass f linear ist.

Aufgabe 13.4.15

Seien $(a_n) = ((-1)^n)$ und $(b_n) = ((-1)^{n+1})$. Dann ist $(a_n + b_n) = (0)$, konvergiert also, während (a_n) und (b_n) divergent sind (Beispiel 13.3.3).

Aufgabe 13.4.17

Beim dritten Gleichheitszeichen von links steckt man rein, dass $(\sqrt{a_n})$ konvergent ist, aber das sollte ja bewiesen werden. Aus der Konvergenz eines Produktes von Folgen darf nicht auf die Konvergenz der Folgen, die als Faktoren auftreten, geschlossen werden.

Aufgabe 13.4.18

Mit Aufgabe 12.2.18 gilt $2^n \geq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \geq \frac{n+1}{2}$. Somit gilt

$$0 \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{2}{n+1}.$$

Die Folge $(\frac{1}{n+1})$ ist eine Nullfolge, denn es gilt $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, und (0) und $(\frac{1}{n})$ sind Nullfolgen. Es ist daher auch $\frac{2}{n+1}$ eine Nullfolge. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Nullfolge ist.

Lösungen der Aufgaben in 13.5

Aufgabe 13.5.5

Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} &= \tfrac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n-1})^n(\tfrac{n}{n+1})^{n+1} = (1+\tfrac{1}{n-1})^n(\tfrac{n}{n+1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} \\
&= ((1+\tfrac{1}{n-1})(\tfrac{n}{n+1}))^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (\tfrac{n}{n-1}\tfrac{n}{n+1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (\tfrac{n^2}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} \\
&= (\tfrac{(n^2-1)+1}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1} = (1+\tfrac{1}{n^2-1})^n \cdot \tfrac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.5.19

Wir zeigen zunächst mit Induktion nach n, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n = 0$. Dann gilt $a_1 - a_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{2^0}$.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ für ein $n \geq 0$ gilt. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_n - 2a_{n+1}}{2} = \frac{-a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Um zu beweisen, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist, müssen wir $|a_{n+k} - a_n|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ abschätzen. Wir zeigen mit Induktion nach k, dass $|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ ist. Den Fall $k = 1$ haben wir bereits erledigt. Da wir gleich den Ausdruck a_{n+k-2} betrachten werden, der für $n = 0$ und $k = 1$ keinen Sinn macht, untersuchen wir den Fall $k = 2$ wie den Induktionsanfang gesondert. Sei also $k = 2$. Dann gilt

$$|a_{n+2} - a_n| = \left|\frac{a_{n+1} + a_n - 2a_n}{2}\right| = \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}.$$

In der Induktionsannahme nehmen wir an, dass $k \geq 2$ ist, und dass die Abschätzung $|a_{n+i} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $1 \leq i < k$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left|\tfrac{a_{n+k-1}+a_{n+k-2}-2a_n}{2}\right| = \left|\tfrac{a_{n+k-1}-a_n}{2} + \tfrac{a_{n+k-2}-a_n}{2}\right| \\
&\leq \left|\tfrac{a_{n+k-1}-a_n}{2}\right| + \left|\tfrac{a_{n+k-2}-a_n}{2}\right| \leq \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n}) = \tfrac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$2^n \geq n + 1 > n_0 > \frac{1}{\varepsilon},$$

wobei wir bei der ersten Abschätzung Aufgabe 12.2.18 verwendet haben. Seien nun $m, n > n_0$, $m \geq n$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m = n + k$. Wie wir oben gezeigt haben gilt dann

$$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

Somit ist (a_n) eine Cauchyfolge.

Aufgabe 13.5.24

Wir fangen an mit dem Intervall $[0, 1]$. Dieses halbieren wir und betrachten die rechte Hälfte. Diese halbieren wir und betrachten die linke Hälfte. Diese halbieren wir und betrachten die rechte Hälfte. Und so weiter. Also immer die Intervalle halbieren, und im Wechsel mit der rechten und der linken Hälfte weitermachen. Die Eckpunkte 0 und 1 des Intervalls sowie alle Halbierungspunkte schreiben wir mit.