Jun.-Prof. Dr. Steffen Kionke

# Modul 61112

# Lineare Algebra

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und
Informatik

FernUniversität in Hagen

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung und Studierhinweise

## Einleitung

Ich freue mich sehr, dass Sie sich für den Kurs „Lineare Algebra“ entschieden haben. Der anstrengende Weg durch diesen Kurs lohnt sich sowohl für Studierende der Mathematik als auch der Informatik, denn die Lineare Algebra ist eine der nützlichsten und elegantesten Theorien, die die Mathematik hervorgebracht hat. Vereinfacht gesagt, ist die Lineare Algebra die Theorie der Matrizen, der Vektorräume und der Abbildungen zwischen Vektorräumen; diese Begriffe kennen Sie ja bereits aus den „Mathematischen Grundlagen“. Um genauer zu verstehen, was Lineare Algebra ist und wie man sich ihr nähern kann, müssen wir zuerst einen kurzen (unvollständigen) Blick auf die Geschichte werfen.

### Zur Geschichte der Linearen Algebra

Methoden zum Lösen von Gleichungen beschäftigen Menschen schon seit sehr langer Zeit. Lange bevor überhaupt von „Gleichungen“ gesprochen wurde, hatten Menschen Probleme (etwa beim Handel oder bei der Vermessung von Feldern), wobei eine unbekannte Größe aus bekannten Angaben bestimmt werden muss. Verfahren zur Lösung bestimmter Fragestellungen entwickelten schon die Babylonier (1700 v. Chr.). Die systematische Untersuchung solcher Probleme ist der Kern der frühen *Algebra*. Der Name Algebra geht dabei auf den Titel eines Buches des Universalgelehrten al-Chwarizmi[1] zurück, in dem er systematisch lineare und quadratische Gleichungen untersuchte.

Von besonderem Interesse waren dabei *lineare Gleichungen* und *lineare Gleichungssysteme*. Schon um 200 v. Chr. sind in China Methoden zur Lösung von linearen Systemen mit 5 Gleichungen und 5 Unbekannten dokumentiert. Erst deutlich später taucht dann die Idee der *Determinante* eines Gleichungssystems auf (Seki[2] um

[1] Abu Dscha'far Muhammad ibn Musa AL-CHWARIZMI: choresmischer Universalgelehrter, um 800.

[2] Takakazu SEKI: japanischer Mathematiker, 1642–1708.

1683, Leibniz[3] um 1693). Die Determinante ist zunächst eine Kennzahl, die man berechnen kann, um festzustellen, ob ein Gleichungssystem eine Lösung besitzt. Cramer[4] gelingt es um 1750, mithilfe von Determinanten eine Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme anzugeben. Auch die *analytische Geometrie* hat zu dieser Zeit einen großen Einfluss auf die Weiterentwicklung der Linearen Algebra. Insbesondere das Studium der *Kegelschnitte* und der geeigenten Koordinatenwechsel führt um 1800 zur sogenannten „Hauptachsentransformation“. Das Bemerkenswerte an diesen Entwicklungen ist, dass Matrizen und Vektorräume (aus heutiger Sicht die zentralen Begriffe) damals noch nicht bekannt waren.

Der Begriff *Matrix* stammt aus dem Jahr 1850 und geht auf Sylvester[5] zurück. Matrizen als algebraische Objekte wurden wahrscheinlich zum ersten Mal systematisch von Cayley[6] untersucht. Man konnte nun mit Matrizen rechnen. Die altbekannten Rechenverfahren bekamen dadurch einen Rahmen, der es ermöglichte Zusammenhänge klar zu benennen.

Im Jahr 1843 nimmt eine andere entscheidende Entwicklung ihren Lauf. Hamilton[7] konstruiert den Schiefkörper der *Quaternionen*. Dabei handelt es sich um ein vierdimensionales Objekt, das alle Körperaxiome erfüllt, außer dem Kommutativgesetz der Multiplikation. Im Zuge dessen prägt Hamilton den Begriff *Vektor*, beschreibt das *Skalarprodukt* und das *Kreuzprodukt* von Vektoren. Diese Art der Vektorrechnung wird in der Physik direkt aufgegriffen und weiterentwickelt.

Der Begriff des *Vektorraumes* entsteht 1844 in Arbeiten von Graßmann[8]. Er kennt bereits *linear unabhängige* Vektoren und auch den Begriff der *Dimension*. Allerdings sind seine Arbeiten schwer zu lesen und bleiben zunächst ohne große Wirkung. Peano[9] greift die Idee auf und gibt 1888 eine axiomatische Beschreibung von Vektorräumen an. Aber erst als sich die Funktionalanalysis aus Fragestellungen der Physik entwickelt – ab 1903 durch Arbeiten von Fredholm[10], Hilbert[11] und anderen – blüht auch die Theorie der Vektorräume auf.

Um 1920 entsteht dann die *moderne Algebra*: die Theorie der algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper), deren Eigenschaften man systematisch aus Axiomen

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz: deutscher Universalgelehrter, 1646 – 1716.
[4] Gabriel Cramer: schweizer Mathematiker, 1704–1752.
[5] James Joseph Sylvester: britischer Mathematiker, 1814–1897.
[6] Arthur Cayley: englischer Mathematiker, 1821–1895.
[7] William Rowan Hamilton: irischer Mathematiker, 1805–1865.
[8] Hermann Günther Grassmann: deutscher Mathematiker und Sprachwissenschaftler, 1809–1877.
[9] Giuseppe Peano: italienischer Mathematiker, 1858–1932.
[10] Erik Ivar Fredholm: schwedischer Mathematiker, 1866–1927.
[11] David Hilbert: deutscher Mathematiker, 1862–1943

(„Rechenregeln“) ableitet. Eine prägende Figur in dieser Entwicklung ist Emmy Noether[12]. Im Lehrbuch „Modern Algebra“ von van der Waerden[13] aus dem Jahr 1930 findet man zum ersten Mal die heute gebräuchliche Definition eines Vektorraumes. Auch das französische Autorenkollektiv „Nicolas Bourbaki“ (gegründet 1934) hatte durch seine präzisen Fachbücher großen Einfluss auf die Weiterentwicklung der modernen (Linearen) Algebra und den Blick, den wir heute auf dieses Fach haben. Die Forschung an Linearer Algebra war damit natürlich nicht abgeschlossen. Es gibt auch heute noch offene Fragen!

Die Lineare Algebra, wie sie heute an Universitäten gelehrt wird, ist also das Produkt einer sehr langen Entwicklung. Die Menschheit hat lange gebraucht, bis sie verstanden hat, was ein Vektorraum ist. Es muss Sie also nicht verwundern, wenn Ihnen manche Begriffen aus diesem Kurses nicht sofort einleuchten. Die Beweise und Konzepte wurden seit 1930 durch Generationen von Lehrbüchern geschliffen und verfeinert.

### Die zwei Stränge der Linearen Algebra

Der Blick in die Geschichte offenbart uns einen sehr wichtigen Aspekt, den man beim Studium der Linearen Algebra nicht vergessen sollte: *Die Lineare Algebra besteht aus zwei Strängen.*

Der erste Strang besteht aus Rechenmethoden; heute würde man dazu „Matrizenrechnung“ sagen.

- → Wie löse ich ein Gleichungssystem?
- → Wie berechnet man eine Determinante?
- → Wie berechnet man einen Koordinatenwechsel?

Dieser Teil der Linearen Algebra ist sehr alt und wurde meist anhand konkreter Fragestellungen entwickelt. Es geht hier um das Rechnen in Koordinaten. Erfahrungsgemäß fällt Studierenden dieser Aspekt der Linearen Algebra auch etwas leichter, denn man kann diese Rechenverfahren lernen und einüben.

Den zweiten Strang könnte man „abstrakte“ Lineare Algebra nennen. Hier geht es um Objekte, Strukturen und Zusammenhänge. Es geht also darum etwas zu verstehen.

- → Was ist ein Vektorraum?

[12] Amalie Emmy Noether: deutsche Mathematikerin, 1882–1935.
[13] Bartel Leendert van der Waerden: niederländischer Mathematiker, 1904–1996.

→ Welche Vektorräume gibt es?

→ Was ist eine Bilinearform?

→ Kann man die Bilinearformen klassifizieren?

Hier wird der Einfluss der modernen Algebra sichtbar. Dieser Teil der Linearen Algebra ist gewissermaßen *koordinatenfrei*. Man möchte also abstrakte Ideen und Konzepte verstehen und zueinander in Beziehung setzen. Der „abstrakte" Strang der Linearen Algebra ist schwieriger zu lernen. Nur indem man sich viele Beispiele anschaut, kann man sicherzugehen, die Begriffe und Ideen wirklich verstanden zu haben.

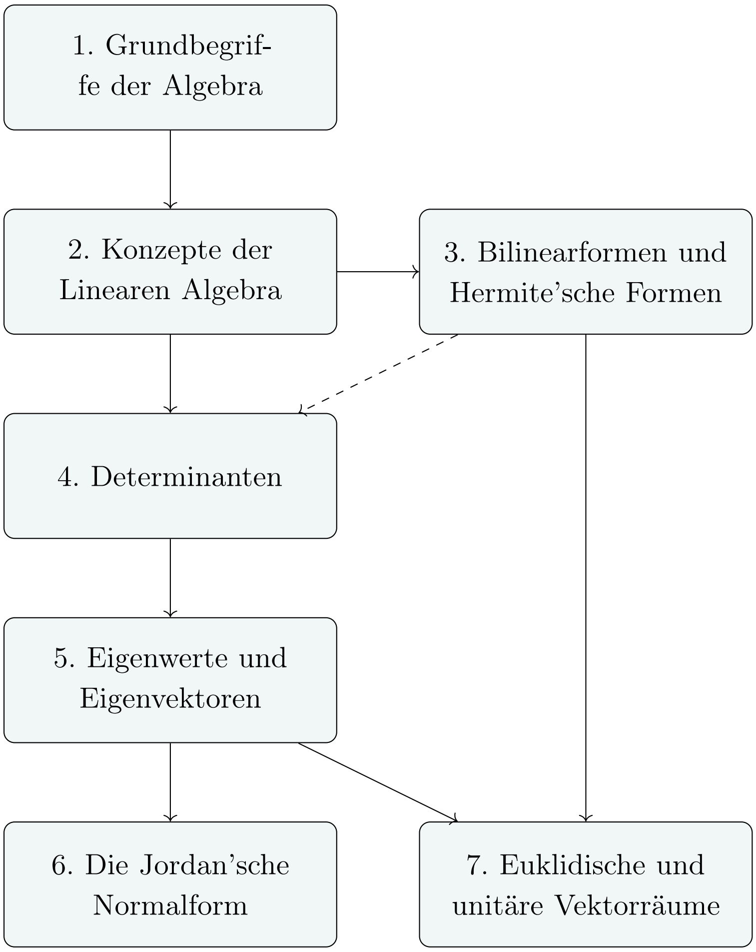
Beide Stränge der Linearen Algebra interagieren miteinander. Einerseits möchten wir Rechnungen interpretieren: Was haben wir eigentlich berechnet? Was bedeutet das? Andererseits möchten wir ausgehend von abstrakten Begriffen in Beispielen konkrete Rechnungen anstellen. Zum Beispiel: Wie kann man eine lineare Abbildung als Matrix darstellen? Kann man die Koordinaten geschickt wählen, sodass man möglichst einfach rechnen kann? Es ist wichtig, dass Sie beide Seiten im Blick behalten. Wenn Sie nur die Rechenverfahren kennen, verstehen Sie nicht, was Sie eigentlich berechnen. Wenn Sie nur die Theorie kennen, werden Sie bei konkreten Beispielen nicht weiterkommen.

## Leitfaden

Am Anfang jeder Kurseinheit finden Sie Studierhinweise mit Kommentaren zum Inhalt der jeweiligen Kurseinheit. Deshalb möchte ich hier nur sehr kurz etwas zum Inhalt der Kurseinheiten sagen.

In der ersten Kurseinheit lernen wir einige Grundbegriffe der Algebra kennen: Gruppen, Ringe, endliche Körper, Polynome und die komplexen Zahlen. Auf diese Begriffe werden wir später immer wieder zurückgreifen. Die zweite Kurseinheit beginnt mit einem Exkurs in die Mengenlehre und einem kurzen Rückblick auf Begriffe, die Sie bereits aus den „Mathematischen Grundlagen" kennen. Dann entwicklen wir wesentliche Konzepte der „abstrakten" Linearen Algebra: direkte Summen, Faktorräume und Dualräume. Diese Begriffe sind entscheidend, um dem Kurs weiter folgen zu können.

Im dritten Kapitel besprechen wir Bilinearformen und Hermite'sche Formen. Hier werden die zwei Stränge der Linearen Algebra sichtbar. Wir entwickeln die „abstrakte" Theorie der Bilinearformen und lernen parallel, wie wir mithilfe von Matrixdarstellungen konkrete Beispiele bearbeiten können.




Die vierte Kurseinheit behandelt die Determinante. Wie wir beim Blick in die Geschichte gesehen haben, handelt es sich um einen sehr alten Teil der Linearen Algebra. Wir werden zuerst die Determinante definieren und konkrete Beispiele berechnen. Im Anschluss werden wir einige Zeit benötigen, um zu verstehen, was die Determinante aus Sicht der abstrakten Linearen Algebra ist.

Die Theorie der Eigenwerte ist eines der Highlights der Linearen Algebra, weil Sie unglaublich viele Anwendungen hat. Wir entwickeln diese Theorie in Kurseinheit 5 und lernen mit dem PageRank-Verfahren von Google eine Anwendung kennen.

Die schwierigste Kurseinheit ist sicherlich die sechste. Hier lernen wir die *Jordan'sche Normalform* kennen und wir lernen, wie man sie berechnet. In diesem Kapitel ist es wirklich entscheidend, dass Sie versuchen, die abstrakte Seite und die konkreten Rechnungen zueinander in Beziehung zu setzen.

In der siebten Kurseinheit befassen wir uns dann mit Skalarprodukten. Wir werden sehen, dass wir in Vektorräumen mit einem Skalarprodukt Geometrie betreiben können. Hier kratzen wir nur an der Oberfläche, denn die Geometrie kommt in diesem Kurs insgesamt etwas zu kurz. Die Spektralsätze bilden einen schönen Schlusspunkt für diesen Kurs. Sie werden es uns ermöglichen, viele Ergebnisse aus den vorangegangenen Kurseinheiten besser zu verstehen.

## Allgemeine Studierhinweise

Mathematik zu lernen ist anstrengend. Es wird *nicht* ausreichen, wenn Sie diesen Kurstext einmal wie einen Roman durchlesen. Arbeiten Sie sich langsam, Schritt für Schritt voran. Machen Sie sich eigene Notizen. Die folgenden vier Tipps liegen mir besonders am Herzen:

→ *Bearbeiten Sie Übungsaufgaben!* Das selbstständige Rumprobieren und das Aufschreiben von Argumenten sind der einzige Weg, um mit den Konzepten wirklich vertraut zu werden. Schlagen Sie die Lösung nicht voreilig nach.

→ *Lesen Sie Definitionen genau* und lernen Sie diese auswendig. Suchen Sie Beispiele und Gegenbeispiele.

→ *Nehmen Sie sich die Zeit um Sätze zu verstehen!* Sehen Sie sich konkrete Beispiele an. Fragen Sie sich: Was sind die Voraussetzungen und was passiert, wenn man diese weglässt?

→ *Stellen Sie Fragen!* Man muss nicht jede Nuss alleine knacken. Ob Sie das Kursteam oder Ihre Kommilitonen fragen, ist dabei nebensächlich. Wichtig ist, sich überhaupt auszutauschen. Oft lernt man schon durch das Formulieren einer Frage etwas dazu.

Es gibt natürlich kein Patentrezept. Jede und jeder lernt anders. Daher ist es wichtig, dass Sie Ihren Wissensstand ehrlich einschätzen. Wenn Sie große Probleme haben, die Aufgaben im Lehrtext und die Einsendeaufgaben zu bearbeiten, dann müssen Sie etwas an Ihrer Arbeitsweise ändern. Erkundigen Sie sich beispielsweise bei Ihren Kommilitonen, wie sie sich dem Stoff nähern.

In der Moodle-Lernumgebung zum Kurs finden Sie übrigens ein Diskussionsforum und Einsendeaufgaben zum Kurs. Nutzen Sie auch die Lehrveranstaltungen zum Kurs, um Fragen zu stellen und mit anderen Studierenden in Kontakt zu kommen.

### Eingangsvoraussetzungen

Der Kurstext baut auf den ersten drei Kurseinheiten der „Mathematischen Grundlagen" auf. Mit diesem Teil der Grundlagen müssen Sie gut vertraut sein. In jedem Fall sollten Sie mit Vektorräumen und Linearen Abbildungen umgehen können. Zum Lösen von Aufgaben müssen Sie sicher mit Matrizen rechnen können und in der Lage sein, lineare Gleichungssysteme fehlerfrei zu lösen. Das heißt aber nicht, dass Sie die Inhalte der Grundlagen auswendig kennen müssen. Wenn wir auf Ergebnisse aus den Mathematischen Grundlagen zurückgreifen, verweisen wir auf die Quelle [MG].

### Literatur

Der vor Ihnen liegende Kurstext sollte Ihre Hauptquelle beim Studium der Linearen Algebra sein. Trotzdem kann es gelegentlich helfen, einen Begriff oder Satz in einem anderen Buch nachzuschlagen. Dort findet man vielleicht eine andere Erklärung oder ein hilfreiches Beispiel. Leider deckt kein Lehrbuch den Stoff dieses Lehrtextes vollständig ab.

Exemplarisch habe ich sechs Lehrbücher mit verschiedenen Ansätzen herausgesucht. Diese können Sie über die Bibliothek der FernUniversität als e-Book herunterladen.

→ [Bär]: Christian Bär – *Lineare Algebra und analytische Geometrie.*
Schönes, übersichtliches Lehrbuch. Deckt nicht alles ab, enthält dafür etwas mehr Geometrie als dieser Lehrtext.

→ [Beu]: Albrecht Beutelspacher – *Lineare Algebra.*
Lockerer Umgangston, gut verständlich, deckt aber nur wenige Inhalte des Kurses ab.

→ [Bo]: Siegfried Bosch – *Lineare Algebra.*
Ein Lehrbuch, das kompakt viele wichtige Inhalte behandelt. Oft weicht die Perspektive von diesem Lehrtext ab.

→ [Fi]: Gerd Fischer, Boris Springborn – *Lineare Algebra.*
Ein Standardlehrbuch, das kurz und knapp die wichtigsten Inhalte behandelt.

→ [Gö]: Laurenz Göllmann – *Lineare Algebra.*
Umfangreiches Lehrbuch mit einem etwas anderen, rechenlastigen Ansatz.

→ [KaSt]: Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel – *Lineare Algebra.*
Umfangreiches Lehrbuch mit vielen schönen Abbildungen und Hinweisen.

### Struktur des Lehrtextes

Der Kurstext besteht aus sieben Kurseinheiten. Jede Kurseinheit beginnt mit Studierhinweisen bestehend aus Kommentaren zum Inhalt, Literaturangaben und einem Fahrplan durch die Kurseinheit. Die Unterabschnitte im Kurstext sind vollständig nummeriert (1.1.1, 1.1.2, ...) um das Suchen im Kurstext und das Fragenstellen zu erleichtern. Die jeweils letzte Unterabschnittsnummer auf einer Seite findet man immer oben rechts in der Kopfzeile, sodass sie beim Blättern leicht zu den entsprechenden Stellen gelangen.

Der Kurstext enthält viele Übungsaufgaben, deren Lösungen Sie jeweils am Ende jeder Kurseinheit finden. Die Übungsaufgaben sind wichtig um den Stoff zu begreifen. Schlagen Sie die Lösungen nicht voreilig nach. Ein blaues „L" am rechten Rand dient in der PDF-Version jeweils als Link zur Lösung der Aufgabe. **L**

Damit Sie mathematische Ergebnisse schneller erkennen, sind **Satz**, **Lemma**, **Korollar**, und so weiter farbig hinterlegt. Jede **Definition** wird mit einer Umrandung hervorgehoben. Das Ende eines Beweise ist mit dem Symbol $\square$ markiert.

Sätze und Definitionen, die ich für besonders wichtig halte, sind am äußeren Rand durch einen Balken hervorgehoben.

Das „gefährliche Kurve"-Symbol von Bourbaki wird verwendet, um auf mögliche Missverständnisse hinzuweisen.

Am Ende des Kurstextes finden Sie einen Index, ein Literaturverzeichnis und ein Symbolverzeichnis. Abbildungen sind in der gedruckten Version dieses Textes schwarz-weiß. In der PDF-Version finden Sie die Abbildungen in Farbe.

# Notation

Die folgenden Symbole und Bezeichnungen werden im Kurstext verwendet. Im Kurs neu eingeführte Symbole und Schreibweisen findet man im Symbolverzeichnis.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Die natürlichen Zahlen ohne Null $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ |
| $\mathbb{N}_0$ | Die natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | Die rationalen Zahlen. |
| $\mathbb{R}$ | Die reellen Zahlen |
| $\mathbb{Z}$ | Die ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ |
| $\mathrm{Abb}(X, Y)$ | Die Menge aller Abbildungen $X \to Y$ |
| $f\|_U$ | Einschränkung der Abbildung $f$ auf die Teilmenge $U$ |
| $\subseteq$ | Teilmenge |
| $\bigcup$ | Vereinigung |
| $\bigsqcup$ | disjunkte Vereinigung |

# Auszug aus dem griechischen Alphabet

*Steffen Kionke*

# Lineare Algebra

Kurseinheit 2:
Konzepte der Linearen Algebra

Fakultät für
**Mathematik und Informatik**

FernUniversität in Hagen

# Studierhinweise zur zweiten Kurseinheit

In der zweiten Kurseinheit wenden wir uns der Linearen Algebra zu – also der Lehre von den Vektorräumen und den linearen Abbildungen. Hier werden Begriffe und Konzepte bereitgestellt, die wir im weiteren Verlauf des Kurses einsetzen.

Die Kurseinheit beginnt mit einem kleinen Exkurs über das Auswahlaxiom – also mit einem Ausflug in die Mengenlehre. Ich hoffe, dass Sie aus daraus etwas Hintergrundwissen mitnehmen, obwohl das Auswahlaxiom in der Linearen Algebra nur eine Nebenrolle spielt. (Das Auswahlaxiom verwenden wir in dieser Kurseinheit zweimal und dann nie wieder.)

Als nächstes werden wichtige Begriffe aus den Mathematischen Grundlagen wiederholt und teilweise ergänzt oder zumindest aus einer anderen Perspektive präsentiert. Das ist eine gute Gelegenheit um die eigene Erinnerung aufzufrischen und in den Mathematischen Grundlagen nachzuschlagen. Versuchen Sie Lücken im Verständnis dieser Grundbegriffe schnell zu schließen, denn diese werden Ihnen später im Kurs auf die Füße fallen!

Im Anschluss lernen wir drei fundamentale Konzepte der Linearen Algebra kennen: die *direkte Summe*, den *Faktorraum* und den *Dualraum*. Die direkte Summe ist eine Zerlegung eines Vektorraumes in kleinere Unterräume. Sie wird ein ständiger Begleiter sein und es ist wichtig, dass Sie sich damit gründlich auseinandersetzen. Der Faktorraum und der Dualraum sind für uns zunächst zwei „abstrakte" Konstruktionen um aus einem Vektorraum neue Vektorräume zu bauen. Um ein gutes Verständnis dieser Konstruktionen zu erhalten, sollten Sie sich möglichst viele Beispiele anschauen.

Zum Abschluss führen wir noch einen nützlichen Begriff ein: *Äquivalenzrelationen*. Das Konzept der Äquivalenzrelation dient dazu „Ähnlichkeit" zwischen Objekten zu formalisieren und man trifft wahrscheinlich in allen Gebieten der Mathematik darauf. Auf den ersten Blick wirken Äquivalenzrelationen wie abstrakter Unfug, aber wenn man das Konzept einmal verstanden hat, ist es wirklich hilfreich um Zusammenhänge zu benennen.

## Lernziele

Nach dem Durcharbeiten der Kurseinheit sollten Sie

- → wissen, was das *Lemma von Zorn* ist,
- → den *Basisergänzungssatz* kennen,

→ verstehen, was es heißt, dass ein Vektorraum die *direkte Summe* von Unterräumen ist,

→ den *Satz vom Komplement* verstehen,

→ mit der Konstruktion des *Faktorraumes* vertraut sein und den *Homomorphiesatz* anwenden können,

→ die Definition des *Dualraumes* kennen und erklären können, was eine *Dualbasis* und eine *duale Abbildung* ist,

→ wissen, was eine *Äquivalenzrelation* ist und Beispiele benennen können.

### Literaturhinweise

Die Themen dieser Kurseinheit finden Sie in den meisten Lehrbüchern zur Linearen Algebra, allerdings nicht immer in der Ausführlichkeit, die diese Themen aus meiner Sicht verdienen. Nachschlagen können Sie z.B. in

→ [Beu]: 1.2 (Äquivalenzrelationen), 3.3.4 (Faktorräume), 5.4 (Dualraum).

→ [Bo]: 1.6 (direkte Summe), 2.2 (Faktorraum, Äquivalenzrelationen), 2.3 (Dualraum).

→ [Fi]: 2.1 (Äquivalenzrelationen), 2.6 (direkte Summe), 3.2 (Faktorraum), 7.1 (Dualraum).

→ [Gö]: 3.5 & 4.2 (Faktorraum), 4.11 (Dualraum)

→ [KaSt]: 1.4 (Äquivalenzrelationen, Lemma von Zorn), 4.5 (direkte Summe, Faktorraum), 6.9 (Dualraum).

Der Faktorraum wird in [Bo, Fi, Gö] (und einigen anderen Quellen) „Quotientenvektorraum“ genannt.

### Fahrplan durch die Kurseinheit

2.1 → Diese Kurseinheit beginnt in Abschnitt 2.1 mit einem Exkurs in die Mengenlehre. Für diesen Kurs müssen Sie hier nicht alle Details zu verstehen, aber ich hoffe, dass dieses Wissen Ihnen später im Studium weiterhilft.

Wir erklären zuerst das *Auswahlaxiom* 2.1.2 und besprechen dann *partielle Ordnungen* (2.1.4) und zugehörige Begriffe (2.1.6–2.1.12). Damit formulieren wir das *Lemma von Zorn* (2.1.13) und zeigen, wie man damit das Auswahlaxiom beweisen kann (2.1.14).

In Abschnitt 2.2 blicken wir auf zentrale Begriffe aus den Mathematischen Grundlagen zurück, mit denen Sie gut vertraut sein müssen, um diesen Kurs zu meistern. Diesen Abschnitt können Sie wahrscheinlich zügig bearbeiten, wenn Sie den Kurs Mathematische Grundlagen erst vor kurzem absolviert haben. Im ersten Teil wiederholen wir die Grundbegriffe *Vektorraum* (2.2.1) und *Unterraum* (2.2.4). Im zweiten Teil befassen wir uns kurz mit linearer Unabhängigkeit (2.2.7), Basen (2.2.10) und der Dimension (2.2.14). Wir beweisen den wichtigen Basisergänzungssatz (2.2.11 und 2.2.12) in einer Version, die auch unendlich-dimensionale Vektorräume zulässt (dafür benötigen wir das Lemma von Zorn!). ← 2.2

Was eine *lineare Abbildung* (2.2.17) ist, wiederholen wir im dritten Teil. Insbesondere fassen wir nochmal zusammen, wie man mit linearen Abbildungen in Koordinaten (2.2.21) rechnen kann. Besonders wichtig sind *Matrixdarstellungen* (2.2.22), *Transformationsmatrizen* (2.2.25) und die *Transformationsformel* für den Basiswechsel (2.2.27)

In Abschnitt 2.3 lernen wir die *direkte Summe* kennen. Zuerst klären wir, was die Summe einer Familie von Unterräumen ist (2.3.1–2.3.4) und definieren dann, wann man eine Summe *direkt* nennt (2.3.5). Satz 2.3.6 enthält nützliche Charakterisierungen der direkten Summe. Eine Dimensionsformel behandeln wir in Satz 2.3.12. Im zweiten Teil untersuchen wir den Fall von zwei direkten Summanden genauer. Das führt uns zum Begriff des *Komplementes* (2.3.14). Wir beweisen, dass es zu jedem Unterraum ein Komplement gibt (2.3.17). ← 2.3

Im Abschnitt 2.4 lernen wir die Faktorräume kennen. Dabei konstruiert man aus einem Vektorraum $V$ und einem Unterraum $U$ einen neuen Vektorraum $V/U$: den *Faktorraum*. Die Konstruktion ist schwer bekömmlich, weil die Elemente von $V/U$ selbst Teilmengen von $V$ sind. Studierende, denen das Kopfzerbrechen bereitet, können sich am Beispiel der *Parallelenschar* festhalten, das wir immer wieder aufgreifen (2.4.1, 2.4.10, 2.4.13, 2.4.21). ← 2.4

Im ersten Teil definieren wir *affine Unterräume* (2.4.2) und zeigen, dass man diese addieren (2.4.7) und mit Skalaren multiplizieren kann (2.4.8). Wir zeigen, dass die Menge $V/U$ der affinen Unterräume mit diesen Rechenoperationen ein Vektorraum ist (2.4.9) und, dass es eine kanonische lineare Abbildung $\pi\colon V \to V/U$ gibt (2.4.11).

Im zweiten Teil überlegen wir, wie man Basen von $V/U$ bestimmen kann (2.4.14). Damit leiten wir eine Formel für die Dimension von $V/U$ her (2.4.17). Im dritten Teil lernen wir den Homomorphiesatz kennen (2.4.18), der es erlaubt lineare Abbildungen aus Faktorräumen zu definieren.

2.5 → Im Abschnitt 2.5 lernen wir den Dualraum kennen. Der Dualraum $V^*$ eines Vektorraumes $V$ ist der Vektorraum aller Linearformen auf $V$. Auch diese Konstruktion ist zunächst gewöhnungsbedüftig, aber wenn Sie sich trauen damit zu arbeiten, werden Sie merken, dass hier nichts tiefgründiges passiert.

Im ersten Teil definieren wir den Dualraum $V^*$ (2.5.3). Wir besprechen, wie man aus einer Basis von $V$ eine *duale Basis* von $V^*$ erhält (2.5.10) und wie man Koordinaten der Dualbasis berechnen kann (2.5.13–2.5.15).

Die Konstruktion des Dualraumes ist sogar ein „Funktor", d.h., man erhält aus Abbildungen zwischen Vektorräumen automatisch Abbildungen zwischen den Dualräumen: die sogenannten *dualen Abbildungen*. Diese definieren wir im zweiten Teil (2.5.16) und zeigen, dass es sich um lineare Abbildungen handelt (2.5.18). Zum Abschluss beschreiben wir einen Zusammenhang zwischen den Matrixdarstellungen einer Abbildung und ihrer dualen Abbildung (2.5.20).

2.6 → Im letzen Abschnitt 2.6 führen wir *Äquivalenzrelationen* ein (2.6.1) und lernen verschiedene Beispiele kennen (2.6.2–2.6.5). Wir definieren *Äquivalenzklassen* (2.6.6) und stellen fest, dass je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt sind (2.6.8). Im zweiten Teil besprechen wir ein Beispiel aus der Linearen Algebra, dass Sie im Wesentlichen schon aus den Mathematischen Grundlagen kennen.

## 2.1. Vorwort zur Mengenlehre: das Auswahlaxiom

Dieser Kurs behandelt in erster Linie die Theorie der endlich-dimensionalen Vektorräume. Einige fundamentale Ergebnisse sind aber auch für Vektorräume von unendlicher Dimension gültig und können fast auf dieselbe Weise bewiesen werden. Dazu benötigen wir aber ein Hilfsmittel aus der Mengenlehre: das Auswahlaxiom. Diesen Zusammenhang zur Mengenlehre werden wir uns hier kurz diskutieren.

In den Mathematischen Grundlagen haben Sie bereits die Grundbegriffe der Mengenlehre kennengelernt. Die Grundlage ist dabei ein „naiver“ Mengenbegriff, wie ihn Georg Cantor[1] bereits 1895 in [Can95] formulierte:

> Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung [...] zu einem Ganzen.

Natürlich ist diese Definition für die moderne Mathematik etwas zu vague. Außerdem hat sich bald herausgestellt, dass ein solcher „naiver“ Mengenbegriff in sich widersprüchlich ist. Das bekannteste Beispiel dafür ist das Paradoxon von Bertrand Russell[2].

**2.1.1** **Russell'sches Paradoxon**. Es sei

$$R = \{X \mid X \notin X\}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Ist $R$ ein Element von $R$?

Wäre $R \in R$ dann gilt nach Definition von $R$ aber $R \notin R$. Widerspruch! Aber auch umgekehrt erhält man einen Widerspruch: Ist $R \notin R$, dann müsste $R$ nach Definition ein Element von $R$ sein.

Das Russell'sche Paradoxon wurde dadurch aufgelöst, dass die Mengenlehre *axiomatisiert* wurde. Das heißt, man hat genauer definiert, was eine Menge ist und welche Operationen mit Mengen erlaubt sind. Mit diesen erlaubten Operationen kann das seltsame Objekt $R$ von Russell nicht mehr definiert werden und das Russell'sche Paradoxon verschwindet.

Die heute gebräuchlichen Axiome der Mengenlehre gehen auf Zermelo[3] und Fraenkel[4] zurück. Es ist für unsere Zwecke nicht nötig, diese Axiome im Detail anzugeben; wer

[1]Georg Cantor: deutscher Mathematiker, 1845–1918. Begünder der Mengenlehre.
[2]Bertrand Russell: britischer Philosoph und Mathematiker, 1872–1970.
[3]Ernst Zermelo: deutscher Mathematiker und Logiker, 1871–1953.
[4]Abraham Fraenkel: deutsch-israelischer Mathematiker, 1891–1965.

es genau wissen möchte, kann einen Blick in [Jec03] werfen. Die meisten Axiome der Zermelo-Fraekel Mengenlehre sind so naheliegend, dass man darüber wenig sagen kann (z.B. zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben). Es gibt darunter aber ein Axiom, das man sich einmal genauer ansehen muss, weil es einige überraschende Konsequenzen hat.

2.1.2 **Auswahlaxiom**. Ist $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung zwischen Mengen, dann existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Man sagt, die Abbildung $g$ ist *rechtsinvers* zu $f$. Man kann $g$ auch eine *Auswahlfunktion* nennen: Für jedes $y \in Y$ ist $g(y)$ ein Element im Urbild $f^{-1}(y)$. Da $f$ surjektiv ist, ist das Urbild $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$. Die Funktion $g$ *wählt* also aus jeder der Mengen $f^{-1}(y)$ ein Element aus.

Die Aussage des Auswahlaxioms scheint auf den ersten Blick offensichtlich zu sein. Natürlich ist es möglich aus *einer* nicht-leeren Menge ein Element zu wählen. Auch endlich viele Wahlen kann man problemlos treffen. Ist also $Y$ eine endliche Menge, dann kann man die Existenz einer Auswahlfunktion auch ohne das Auswahlaxiom beweisen. Das Seltsame ist, dass man das Auswahlaxiom wirklich benötigt[5], wenn $Y$ eine unendliche Menge ist, d.h., wenn man unendliche viele Wahlen treffen muss.

Das Auswahlaxiom wird häufig verwendet, um die Existenz von Objekten zu beweisen, die man nicht explizit angegeben kann (z.B. eine Basis eines Vektorraumes von unendlicher Dimension). Dadurch wurde das Auswahlaxiom von Verfechtern einer „konstruktiven“ Mathematik manchmal kritisch beäugt.

Es gibt viele nützliche Resultate, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind, d.h., man kann diese mit dem Auswahlaxiom beweisen und umgekehrt das Auswahlaxiom auch wieder daraus herleiten. Hier wollen wir mit dem *Lemma von Zorn* eine solche Aussage vorstellen. Dazu benötigen wir einige Begriffe.

2.1.3 **Relationen**. Erinnern wir uns zunächst, dass eine binäre *Relation* $R$ auf einer Menge $M$ eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ ist. Zwei Elemente $x, y \in M$ weisen die „Beziehung“ $R$ auf, wenn $(x, y)$ in $R$ liegt. Wir schreiben dann $xRy$ anstelle von $(x, y) \in R$. Meistens verwenden wir daher für binäre Relationen keine Buchstaben, sondern Symbole wie $\leq, <, \preceq, \sim, \approx, \ldots$.

2.1.4 **Definition** Sei $M$ eine Menge. Eine binäre Relation $\preceq$ auf $M$ heißt *partielle Ordnung*, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind

[5] Genauer heißt das: Das Auswahlaxiom lässt sich nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre herleiten (zumindest sofern nicht die anderen Axiome in sich widerspüchlich sind).

(PO1) $\preceq$ ist *reflexiv*, d.h., für alle $x$ in $M$ gilt

$$x \preceq x.$$

(PO2) $\preceq$ ist *antisymmetrisch*, d.h., für alle $x, y \in M$ gilt

$$x \preceq y \text{ und } y \preceq x \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

(PO3) $\preceq$ ist *transitiv*, d.h., für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x \preceq y \text{ und } y \preceq z \quad \Longrightarrow \quad x \preceq z.$$

Eine partielle Ordnung $\preceq$ nennt man *Totalordnung*, wenn für alle $x, y \in M$ immer $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.

**2.1.5** **Beispiel**. (a) Die Relation $\leq$ auf den reellen Zahlen ist eine Totalordnung; siehe Abschnitt 12.1 in [MG].

(b) Es sei $X$ eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von $X$ nennt man die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ von $X$. Die Enthaltungsrelation $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung auf der Potenzmenge. Hat $X$ mindestens zwei Elemente $a \neq b$, dann ist dies keine Totalordnung, denn keine der beiden Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ enthält die andere.

(c) Für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ scheiben wir $m \mid n$, wenn $m$ die Zahl $n$ teilt. Die Teilerrelation „|“ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$. Die Teilerrelation ist keine Totalordnung, z.B., teilt 2 nicht die Zahl 3 und 3 teilt nicht die Zahl 2.

**2.1.6** **Definition** Es sei $M$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung $\preceq$. Ein Element $m \in M$ heißt *maximal*, wenn aus $m \preceq x$ bereits $m = x$ folgt für alle $x \in M$. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Eine *obere Schranke* für $N$ ist ein Element $s \in M$ mit der Eigenschaft

$$x \preceq s$$

für alle $x \in N$.

**2.1.7** **Vorsicht mit dem Begriff „maximal“** Den Begriff „maximal“ muss man sich hier genau anschauen. Ein Element $m$ ist maximal, wenn es *keine* Elemente gibt, die echt größer als $m$ sind. Ein maximales Element muss *nicht* größer als alle anderen Elemente sein. Ist $\preceq$ die partielle Ordnung auf der Menge $M = \{x, y\}$, sodass weder $x \preceq y$ noch $y \preceq x$ gelten, dann sind beide Elemente $x$ und $y$ maximal. Insbesondere kann eine partiell geordnete Menge mehrere verschiedene maximale Elemente besitzen.

**2.1.8** **Aufgabe**. Es sei $M$ eine Menge mit einer Totalordnung $\preceq$. Zeigen Sie, dass für beliebige $x_1, \ldots, x_k \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ existiert, sodass **L**

$$x_i \preceq x_j$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt.

**2.1.9** **Beispiel**. (a) In den reellen Zahlen mit der Relation $\leq$ gibt es keine maximalen Elemente. Die Zahl 5 ist eine obere Schranke für das Intervall $(-2, 3]$. Auch 3 und 500 sind obere Schranken für $(-2, 3]$.

(b) Es sei $X$ eine Menge. Die Menge $X$ ist ein maximales Element bezüglich Inklusion in der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.

(c) In den natürlichen Zahlen mit der Teilerrelation „|“ gibt es keine maximalen Elemente. Die Zahl 30 ist eine obere Schranke an die Menge $\{2, 3, 5\}$.

**2.1.10** **Induzierte Ordnungen**. Sei $M$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung $\preceq$ und sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Schränkt man $\preceq$ zu einer Relation auf $N$ ein, so erhält man eine partielle Ordnung auf $N$. In der Tat, sind die Eigenschaften aus Definition 2.1.4 für alle $x, y, z \in M$ erfüllt, dann natürlich auch für alle $x, y, z$ in der Teilmenge $N$. Man sagt, die partielle Ordnung auf $N$ wurde von der Ordnung auf $M$ *induziert*.

Ist $\preceq$ eine Totalordnung, dann ist die induzierte Ordnung auf einer Teilmenge $N$ ebenfalls eine Totalordnung.

**2.1.11** **Definition** Sei $M$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung $\preceq$. Eine *Kette* $K$ in $M$ ist eine Teilmenge $K \subseteq M$, auf der die induzierte Ordnung eine Totalordnung ist. Das heißt, für alle $x, y \in K$ gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

**2.1.12** **Beispiel**. (a) In einer totalgeordneten Menge ist jede Teilmenge eine Kette.

(b) In der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die Teilmenge

$$K_1 = \Big\{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 6, 400\}, \{1, 3, 6, 7, 400\}\Big\}$$

eine Kette bzgl. der Inklusion $\subseteq$. Genauso ist auch

$$K_2 = \Big\{\{n^2 \mid n \leq m\} \mid m \in \mathbb{N}\Big\}$$

eine Kette.

Mit diesen Begriffen können wir das Lemma von Zorn formulieren.

2.1.13 **Lemma von Zorn.** *Sei $M$ eine nicht-leere Menge mit einer partiellen Ordnung $\preceq$. Besitzt jede Kette in $M$ eine obere Schranke in $M$, dann hat $M$ (mindestens) ein maximales Element.*

Wie beweist man das Lemma von Zorn? Die Grundidee ist einfach: Wenn $M$ keine maximalen Elemente hat, dann sollte man in der Lage sein eine Kette zu konstruieren, die keine obere Schranke besitzt. Um diese Kette zu finden, verwendet man das Auswahlaxiom. Die kurzen Beweise verwenden dabei transfinite Methoden, die wir hier nicht zur Verfügung haben. Es gibt auch elementare Beweise, aber auch diese Beweise erfordern zusätzliche Terminologie, weshalb wir hier darauf verzichten. Die interessierten Leserinnen und Leser finden machbare Beweise des Lemmas in [Kne50] oder [Lew91].

Zum Abschluss wollen wir stattdessen erklären, wie man umgekehrt das Auswahlaxiom aus dem Lemma von Zorn herleiten kann. Anhand des Beweises kann man gut verstehen, wie das Lemma eingesetzt wird.

2.1.14 **Beweis des Auswahlaxioms mit dem Lemma von Zorn**.

*Beweis*. Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren die Menge $M$ als Menge aller Paare $(U, g)$, wobei $U \subseteq Y$ eine Teilmenge von $Y$ ist und $g\colon U \to X$ eine Abbildung mit $f \circ g = \mathrm{id}_U$ ist. Die Menge $M$ ist nicht leer, denn für ein $y \in Y$ und ein Urbild $x \in f^{-1}(y)$ ist $(\{y\}, y \mapsto x)$ ein Element von $M$.

Auf $M$ definieren wir nun eine partielle Ordnung $\preceq$. Wir setzen $(U, g) \preceq (U', g')$ genau dann, wenn

$$U \subseteq U' \quad \text{und} \quad g'|_U = g$$

erfüllt sind. Wir behaupten, dass jede Kette $K$ in $M$ eine obere Schranke besitzt. Sei $K$ eine Kette. Dann definieren wir eine Teilmenge $V \subseteq Y$ durch

$$V = \bigcup_{(U,g)\in K} U.$$

Auf $V$ definieren wir die Abbildung $h\colon V \to X$ wie folgt: Für jedes $v \in V$ gibt es ein $(U, g) \in K$ mit $v \in U$ und wir setzen $h(v) := g(v)$. Weil $K$ eine Kette ist, muss man dazu keine Wahl treffen: Ist $(U', g')$ in $K$ mit $v \in U'$, dann gilt $(U, g) \preceq (U', g')$ oder $(U', g') \preceq (U, g)$; also $g(v) = g'(v)$. Es gilt nun $f \circ h = \mathrm{id}_V$, denn für $v \in U$ mit $(U, g) \in K$ gilt $f(h(v)) = f(g(v)) = v$. Also ist $(V, h) \in M$ eine obere Schranke an $K$.

Durch das Lemma von Zorn muss es in $M$ ein maximales Element $(U, g)$ geben. Wir behaupten, dass $U = Y$ gilt und $g$ damit die gesuchte Auswahlfunktion ist. Nehmen wir für einen Widerspruch an, es sei $U \neq Y$. Dann gibt es ein Element $y \in Y \setminus U$. Wir wählen ein Urbild $x \in f^{-1}(y)$ und definieren $U' = U \cup \{y\}$ und $g' \colon U' \to X$ durch $g'(u) = g(u)$ für alle $u \in U$ und $g'(y) = x$. Dann gilt $(U, g) \preceq (U', g')$ und $(U, g) \neq (U', g')$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $(U, g)$. $\square$

Das beendet unseren kurzen Exkurs in die Mengenlehre. Lassen Sie sich von diesem knappen Überblick nicht entmutigen. Das Lemma von Zorn ist auf den ersten Blick nur schwer fassen und es wird auch nur in wenigen Beweisen in dieser Kurseinheit eine Rolle spielen.

# 2.2. Rückblick und Ergänzungen: Vektorräume und Basen

## I. Vektorräume

Der Begriff des Vektorraumes, den Sie aus dem Kurs „Mathematische Grundlagen“ kennen, ist für uns von zentraler Bedeutung. Deshalb wiederholen wir hier einige Begriffe und erinnern an wichtige Eigenschaften. Alle Details finden Sie in den „Mathematischen Grundlagen“ [MG, Kapitel 6].

2.2.1 **Vektorräume**. Sei $K$ ein Körper. Ein $K$-*Vektorraum* $V$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen: einer Addition

$$V \times V \to V \quad \text{mit} \quad (v, w) \mapsto v + w$$

und einer Skalarmultiplikation

$$K \times V \to V \quad \text{mit} \quad (a, v) \mapsto av.$$

Dabei sollen folgende Axiome erfüllt sein:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $a, b \in K$ und $v \in V$ gilt $(ab)v = a(bv)$. Ist 1 das Einselement in $K$, dann gilt $1v = v$ für alle $v \in V$.

(iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (a+b)v &= av + bv \\ a(v+w) &= av + aw \end{aligned}$$

für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$.

Das neutrale Element der Addition 0 heißt *Nullvektor*.

2.2.2 **Beispiel**. Das wichtigste Beispiel eines Vektorraumes ist der Raum $K^n$ der Spaltenvektoren mit $n$ Einträgen aus $K$. Bei der Addition in $K^n$ werden die Einträge komponentenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}.$$

Bei der Skalarmultiplikation mit $a \in K$ wird jeder Eintrag im Vektor $v$ mit $a$ multipliziert:

$$a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 \\ av_2 \\ \vdots \\ av_n \end{pmatrix}.$$

**2.2.3** **Beispiel**. Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $X$ eine Menge. Es sei $\mathrm{Abb}(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von $X$ nach $V$. Auf $\mathrm{Abb}(X, V)$ definieren wir eine Addition „punktweise“, das heißt

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

für alle $x \in X$. Dabei verwenden wir auf der rechten Seite die Addition im Vektorraum $V$. Genauso kann man eine Skalarmultiplikation $K \times \mathrm{Abb}(X, V) \to \mathrm{Abb}(X, V)$ „punktweise“ definieren durch

$$(cf)(x) \coloneqq cf(x).$$

für alle $x \in X$ und $c \in K$. Bezüglich dieser Rechenoperationen ist $\mathrm{Abb}(X, V)$ ein $K$-Vektorraum. Durch die punktweise Definition lassen sich alle Axiome direkt aus den Axiomen von $V$ herleiten. Zur Illustration schauen wir uns das Assoziativgesetz der Addition an. Für alle $f, g, h \in \mathrm{Abb}(X, V)$ und $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) && \text{(Assoz. von + in V)} \\ &= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x). \end{aligned}$$

Weil diese Gleichung für alle $x \in X$ gilt, folgt daraus $(f + g) + h = f + (g + h)$. Alle anderen Axiome kann man auf dieselbe Weise herleiten (Übungsaufgabe!).

**2.2.4** **Unterräume**. Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Unterraum* von $V$, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Der Nullvektor liegt in $U$.

(b) Für alle $u, u' \in U$ gilt $u + u' \in U$.

(c) Für alle $u \in U$ und $a \in K$ gilt $au \in U$.

2.2.5 **Beispiel**. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Unterraum.

Die folgende Aufgabe enthält einen kleinen Trick, wie man schnell nachprüfen kann, ob eine nicht-leere Teilmenge ein Unterraum ist.

2.2.6 **Aufgabe**. Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ eine nicht-leere Teilmenge. Zeigen Sie: $U$ ist genau dann ein Unterraum, wenn **L**

$$au + u' \in U$$

für alle $a \in K$ und $u, u' \in U$ gilt.

## II. Basen

2.2.7 $\boxed{\textbf{Definition}}$ Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist. Das heißt: sind $v_1, \dots, v_n \in S$ paarweise verschieden und sind $a_1, \dots, a_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

dann gilt $a_i = 0$ für alle $i$.

2.2.8 **Wie prüft man lineare Unabhängigkeit**? Wie kann man für gegebene Vektoren $v_1, \dots, v_k \in K^n$ entscheiden, ob sie linear unabhängig sind? Dazu kann man die Vektoren als Spalten in eine Matrix $A$ schreiben und den Rang mit dem Gauß-Verfahren berechnen. Dann gilt:

$$v_1, \dots, v_k \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rg}(A) = k$$

Das folgt aus [MG, Korollar 9.2.5].

Tipp zu Rechnen: Wir werden am Ende dieser Kurseinheit sehen, dass $\mathrm{Rg}(A^T) = \mathrm{Rg}(A)$ gilt (2.6.16).

2.2.9 **Aufgabe**. Sind die Vektoren **L**

$$v_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{6} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \overline{4} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{F}_7^3$?

**2.2.10** **Definition** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $\mathcal{B} \subseteq V$ nennt man *Basis* von $V$.

Aus den Mathematischen Grundlagen wissen Sie bereits, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt. Mit dem Auswahlaxiom können wir dieses Resultat nun auch für beliebige Vektorräume zeigen. Wir formulieren zuerst ein allgemeines Ergebnis.

**2.2.11** **Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit Teilmengen $S \subseteq E$. Ist $S$ linear unabhängig und $E$ ein Erzeugendensystem von $V$, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ mit*

$$S \subseteq \mathcal{B} \subseteq E.$$

*Beweis.* Wir wollen mit dem Lemma von Zorn 2.1.13 argumentieren und definieren dazu die Menge $M$ aller linear unabhängigen Teilmengen $C \subseteq E$, die $S$ enthalten. Wegen $S \in M$ ist $M$ nicht leer. Die Inklusionsrelation „$\subseteq$" induziert eine partielle Ordnung auf der Menge $M$.

Wir behaupten, dass jede Kette in $M$ eine obere Schranke in $M$ besitzt. Sei dazu $\mathcal{C} \subset M$ eine Kette. Ist $\mathcal{C}$ leer, so ist $S \in M$ eine obere Schranke. Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{C}$ nicht leer ist und definieren $D$ als die Vereinigung aller Kettenglieder, d.h.,

$$D = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Wir wollen zeigen, dass $D$ eine obere Schranke für $\mathcal{C}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $D$ in $M$ liegt. Da alle $C \in \mathcal{C}$ in $E$ enthalten sind, ist sicherlich auch $D$ eine Teilmenge von $E$. Da $\mathcal{C}$ nicht leer ist, gilt auch $S \subseteq D$. Wir prüfen nun, dass $D$ linear unabhängig ist. Seien $v_1, \ldots, v_n \in D$ paarweise verschieden und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0.$$

Da $v_i$ in $D$ liegt, gibt es eine Menge $C_i \in \mathcal{C}$ mit $v_i \in C_i$. Da $\mathcal{C}$ total geordnet ist, gibt es ein $j$ mit $C_i \subseteq C_j$ für alle $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$; siehe Aufgabe 2.1.8. Da $C_j$ linear unabhängig ist, schließen wir $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Insgesamt ist also auch $D$ linear unabhängig.

Nach dem Lemma von Zorn 2.1.13 gibt es (mindestens) ein maximales Element $\mathcal{B} \in M$. Wir behaupten, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$ ist. Nach Definition von $M$ ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Wir müssen also nachweisen, dass $\mathcal{B}$ auch ein Erzeugendensystem von $V$ ist. Es sei $U = \langle \mathcal{B} \rangle$, der von $\mathcal{B}$ erzeugte Unterraum von $V$. Für einen

Widerspruch nehmen wir $U \neq V$ an. Da $E$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist, liegt $E$ nicht im Unterraum $U$ (sonst wäre $\langle E\rangle \subseteq U$). Wir finden also ein Element $v \in E$ mit $v \notin U$. Wir definieren

$$C = \mathcal{B} \cup \{v\}$$

und behaupten, dass $C$ linear unabhängig ist. Dies liefert den gewünschten Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{B}$, denn dann wäre $C \in M$ und $\mathcal{B} \subsetneq C$.

Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ paarweise verschieden und $a_1, \ldots, a_n, b \in K$ mit

$$bv + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

gegeben. Wir zeigen, dass alle Koeffizienten $a_i$ und $b$ verschwinden. Es ist $b = 0$, denn andernfalls könnten wir die Gleichung nach $v$ auflösen und damit wäre

$$v = -\sum_{i=1}^{n} b^{-1} a_i v_i$$

ein Element von $U$; wegen $v \notin U$ kann das nicht sein. Aus der verbliebenen Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ folgt aber $a_1 = \cdots = a_n = 0$, denn $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig. Damit ist $C$ linear unabhängig und wir haben den gewünschten Widerspruch erzeugt. □

Aus diesem allgemeinen Ergebnis können wir nun den nützlichen Basisergänzungssatz ableiten.

**2.2.12 Basisergänzungssatz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum.*

*(a) Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ kann zu einer Basis von $V$ ergänzt werden.*

*(b) Jedes Erzeugendensystem $E \subseteq V$ enthält eine Basis von $V$.*

*Beweis.* Beide Aussagen folgen direkt aus Satz 2.2.11. Für Aussage (a) setzt man $E = V$, für Aussage (b) setzt man $S = \emptyset$. □

Insbesondere folgt aus (b) mit $E = V$ folgendes wichtiges Ergebnis.

**2.2.13 Korollar.** *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

Man kann zeigen, dass je zwei Basen eines Vektorraumes immer dieselbe Anzahl an Elementen haben; man sagt auch, sie haben dieselbe *Kardinalität*. Für endlich erzeugte Vektorräume kennen Sie diese Aussage aus 7.3.6 in [MG]. Deshalb ist folgende Definition sinnvoll.

**2.2.14** **Definition** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Die Kardinalität einer Basis $\mathcal{B}$ nennt man die *Dimension von* $V$;

$$\dim_K(V) = |\mathcal{B}|.$$

Einen Vektorraum, der eine endliche Basis besitzt, nennt man *endlich-dimensional*.

**2.2.15** **Bemerkung zu unendlich-dimensionalen Vektorräumen**. Besitzt der Vektorraum $V$ keine endliche Basis, dann sagt man, dass $V$ *unendlich-dimensonal* ist. Wir schreiben schlicht $\dim_K(V) = \infty$. Das ist eigentlich etwas ungenau, denn man kann in der Mengelehre verschiedene Abstufungen von „unendlich“ definieren und die Dimension unendlich-dimensionaler Vektorräume genauer messen.

Bei endlich-dimensionalen Vektorräumen wird es oft nötig sein den Elementen einer Basis eine feste Reihenfolge zuzuweisen. Wir sprechen dann von einer geordneten Basis.

**2.2.16** **Definition** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Ein Tupel $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ heißt *geordnete Basis*, wenn die Einträge paarweise verschieden sind und die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$ ist.

## III. Lineare Abbildungen

**2.2.17** **Definition** Seien $U$ und $V$ zwei $K$-Vektorräume. Ein Abbildung $\varphi\colon U \to V$ nennt man *$K$-linear*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(L1) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ für alle $u_1, u_2 \in U$

(L2) $\varphi(au) = a\varphi(u)$ für alle $a \in K$ und $u \in U$

Wenn der zugrundeliegende Körper $K$ aus dem Kontext klar hervorgeht, sagen wir kurz, dass $\varphi$ linear ist.

**2.2.18** **Aufgabe**. Sei $\varphi\colon U \to V$ eine Abbildung zwischen zwei $K$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass $\varphi$ genau dann linear ist, wenn für alle $u_1, u_2 \in U$ und alle $a \in K$ die Gleichung **L**

$$\varphi(au_1 + u_2) = a\varphi(u_1) + \varphi(u_2) \tag{2.2.a}$$

gilt.

**2.2.19** **Beispiel**. Wir betrachten die Vektorräume $K^n$ und $K^m$. Ist $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix, dann ist

$$f_A \colon K^n \to K^m \quad \text{mit} \quad f_A(x) = Ax$$

eine $K$-lineare Abbildung. Jede lineare Abbildung zwischen $K^n$ und $K^m$ ist von dieser Form; vgl. [MG, Satz 9.1.9].

**2.2.20** $\boxed{\textbf{Definition}}$ Eine bijektive $K$-lineare Abbildung $\varphi \colon U \to V$ nennt man *Isomorphismus*. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}$ ist ebenfalls wieder linear; siehe [MG, 8.1.8].

Zwei Vektorräume $U$ und $V$ nennt man *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus zwischen $U$ und $V$ gibt; man schreibt dann $U \cong V$.

Ist $U \cong V$ und $V \cong W$, dann auch $U \cong W$, denn die Verkettung von Isomorphismen ist wieder ein Isomorphismus; siehe [MG, 8.1.10].

**2.2.21** **Koordinaten**. Sei $U$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine geordnete Basis. Jeder Vektor $v \in U$ lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben:

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_i u_i$$

mit $a_i \in K$. Man nennt $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ den *Koordinatenvektor* von $v$ bzgl. $\mathcal{B}$. Die Abbildung $\kappa_{\mathcal{B}} \colon U \to K^n$ mit $v \mapsto \kappa_{\mathcal{B}}(v)$ ist ein Isomorphismus; siehe [MG, 8.2.2]

**2.2.22** **Matrixdarstellung einer linearen Abbildung**. Es seien $U, V$ zwei $K$-Vektorräume von endlicher Dimension und es sei $\varphi \colon U \to V$ eine $K$-lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine geordnete Basis von $U$ und sei $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_m)$ eine geordnete Basis von $V$. Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ kann man den Vektor $\varphi(u_j)$ als Linearkombination in der Basis $\mathcal{C}$ schreiben:

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i.$$

Die $(m \times n)$-Matrix ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{i,j}$ nennt man die *Matrixdarstellung* von $\varphi$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Die lineare Abbildung $\varphi$ ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ festgelegt; siehe [MG, 8.4.1]. Weil man aus den Einträgen in der Matrix ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

ablesen kann, wohin $\varphi$ die Basisvektoren abbildet, ist die lineare Abbildung $\varphi$ eindeutig durch ihre Matrixdarstellung bestimmt.

Für alle $u \in U$ gilt die Beziehung (siehe [MG, 9.2.1])

$$ {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\ \kappa_{\mathcal{B}}(u) = \kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(u)); \tag{2.2.b} $$

das heißt, die Matrixdarstellung beschreibt die Abbildung $\varphi$ in den Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

**2.2.23** **Beispiel**. Sei $K$ ein Körper. Sei $e_i$ der Vektor in $K^n$, dessen Einträge alle verschwinden außer dem einem Eintrag 1 an der Stelle $i$. Die geordnete Basis $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nennen wir die *Standardbasis* von $K^n$. Für $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ betrachten wir die zugehörige lineare Abbildung $f_A\colon K^n \to K^m$ mit $f_A(x) = Ax$; siehe 2.2.19. Ist $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $K^n$ und $\mathcal{C}$ die Standardbasis von $K^m$, dann gilt

$$ {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = A, $$

denn $f_A(e_j) = Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$.

Das folgende nützliche Lemma versteckt sich in den Ergebnissen aus [MG].

**2.2.24** **Lemma.** *Sei $\varphi\colon U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen und seien $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ geordnete Basen von $U$ bzw. $V$.*

*Dann ist $\varphi$ genau dann ein Isomorphismus, wenn ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine invertierbare Matrix ist.*

*Beweis.* Ist $\varphi$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1}$. Dann gilt nach [MG, Aufgabe 9.3.2] ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\varphi^{-1}) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}$; insbesondere ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ invertierbar.

Nehmen wir umgekehrt an, dass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ invertierbar ist, dann handelt es sich um eine quadratische $(n \times n)$-Matrix mit $n = \dim_K(U) = \dim_K(V)$. Nach [MG, 4.5.4] hat die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ den Rang $n$. Aus [MG, 9.2.4] folgt dann, dass auch $\mathrm{Rg}(\varphi) = n$ gilt, d.h., dass $\varphi$ surjektiv ist. Da $U$ und $V$ dieselbe Dimension haben, ist $\varphi$ damit schon ein Isomorphismus; siehe [MG, 8.3.17] □

**2.2.25** **Transformationsmatrizen**. Es sei $U$ ein $K$-Vektorraum. Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geordnete Basen von $U$, dann nennt man

$$ {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_U) $$

die *Transformationsmatrix* zum Basiswechsel von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$. Für alle $u \in U$ gilt

$$ {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_U)\kappa_{\mathcal{B}}(u) = \kappa_{\mathcal{B}'}(u). $$

Die Transformationsmatrix rechnet also die Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ in die Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}'$ um. Aus [MG, 9.3.2] ist bekannt, dass ${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_U)^{-1} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_U)$ gilt.

**2.2.26** **Beispiel**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit den geordneten Basen

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Um die Transformationsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ zu bestimmen, schreiben wir die Vektoren der Basis $\mathcal{B}'$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ (dazu muss man ein lineares Gleichungssystem lösen). Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathcal{B}'$ die Standardbasis ist, können wir direkt ablesen, wie die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Linearkombination in der Standardbasis geschrieben werden. Die Transformationsmatrix ${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ erhält man dann einfach, indem man die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten in eine Matrix schreibt:

$${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass diese Matrizen invers zueinander sind. Alternativ hätten wir ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ bestimmen können, indem wir die Matrix ${}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ bestimmen und die Inverse berechnen.

Die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ hängt von den gewählten Basen ab. Was passiert mit der Matrixdarstellung, wenn man andere Basen wählt?

**2.2.27** **Transformationsformel für lineare Abbildungen.** *Es seien $U, V$ zwei $K$-Vektorräume und sei $\varphi\colon U \to V$ eine $K$-lineare Abbildung.*

*Sind $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ geordnete Basen von $U$ und $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ geordnete Basen von $V$, dann gilt*

$${}_{\mathcal{C}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}_{\mathcal{C}'}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)\ {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\ {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_U).$$

*Beweis*. Das folgt aus [MG, 9.3.1] indem man $\varphi = \mathrm{id}_V \circ \varphi \circ \mathrm{id}_U$ schreibt. □

# 2.3. Direkte Summe von Vektorräumen

In diesem Abschnitt lernen wir ein wichtiges Hilfsmittel für das Arbeiten mit Vektorräumen kennen: die direkte Summe. Die direkte Summe erlaubt es - grob gesagt - Vektorräume zu „zerlegen“. Wir werden dies häufig verwenden um Probleme und Fragestellungen zu Vektorräumen auf kleinere Unterräume zu reduzieren.

## I. Definition und Eigenschaften

Zunächst beginnen wir mit Summen von Unterräumen. Aus den Mathematischen Grundlagen kennen Sie folgende Aussage: Sind $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Unterräume eines Vektorraumes $V$, dann ist auch

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \ \in U_2\}$$

ein Unterraum vom $V$. Diese Konstruktion funktioniert natürlich auch für 3, 4, 5 oder mehr Unterräume.

2.3.1 **Definition und Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Sind $U_1, \dots, U_k$ Unterräume von $V$, so definieren wir*

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_k := \big\{u_1 + u_2 + \cdots + u_k \mid u_i \in U_i \text{ für alle } 1 \le i \le k\big\}.$$

*Man nennt $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ die* Summe der Unterräume *$U_1, \dots, U_k$ und schreibt dafür auch $\sum_{i=1}^{k} U_i$.*

*Die Summe $\sum_{i=1}^{k} U_i$ ist wieder ein Unterraum von $V$.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion nach $k$. Für $k = 1$ ist nichts zu tun und für $k = 2$ kennen wir die Aussage aus den Mathematischen Grundlagen [MG, Prop. 6.2.11].

Als Induktionsvoraussetzung können wir also annehmen, dass $\sum_{i=1}^{k-1} U_i$ ein Unterraum ist. Dann sehen wir aus der Definition der Summe, dass

$$\sum_{i=1}^{k} U_i = \left(\sum_{i=1}^{k-1} U_i\right) + U_k$$

gilt. Mit der Aussage für zwei Unterräume schließen wir, dass $\sum_{i=1}^{k} U_i$ ein Unterraum ist. □

**2.3.2** **Beispiel**. Die lineare Hülle einer Menge von Vektoren ist ein Beispiel einer Summe. Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Sind $v_1, \dots, v_k \in V$, dann gilt

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_k \rangle.$$

Um das zu sehen, verwenden die Definition der linearen Hülle aus [MG, 6.3.2]. Es ist $\langle v \rangle = \{av \mid a \in K\}$. Also gilt

$$\langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \mid a_i \in K \right\}$$

und dies ist per Definition die lineare Hülle der Vektoren $v_1, \dots, v_k$.

**2.3.3** **Aufgabe**. Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und es seien $S, T \subseteq V$ zwei Teilmengen. Zeigen Sie: $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$. **L**

Im Allgemeinen kann man ein Element $v$ in der Summe $U_1 + U_2 + \dots + U_k$ auf viele verschiedene Weisen in der Form

$$v = u_1 + u_2 + \dots + u_k$$

mit $u_i \in U_i$ schreiben.

**2.3.4** **Beispiel**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die Unterräume

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\}$$

und

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Dann gilt $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, denn die Standardbasisvektoren $e_2$ und $e_3$ liegen in $U_1$ und der Standardbasisvektor $e_1$ liegt in $U_2$, d.h.,

$$U_1 + U_2 \supseteq \langle e_2, e_3 \rangle + \langle e_1 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kann man nun aber auf unendlich viele verschiedene Weisen in der Form $u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ schreiben. Beispielsweise gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}}_{\in U_2}.$$

Besonders nützlich ist daher folgende spezielle Situation:

2.3.5 **Definition** Sei $V$ ein Vektorraum und seien $U_1, \dots, U_k$ Unterräume von $V$. Man sagt, die Summe $\sum_{i=1}^k U_i$ ist *direkt*, wenn jeder Vektor $v \in \sum_{i=1}^k U_i$ auf genau eine Weise in der Form

$$v = \sum_{i=1}^k u_i$$

mit $u_i \in U_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ geschrieben werden kann.

Man notiert die Summe durch $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ (oder kürzer $\bigoplus_{i=1}^k U_i$) um auszudrücken, dass die Summe dieser Unterräume eine direkte Summe ist.

Diese Definition der direkten Summe ist nützlich, ist aber nicht gut geeignet um in konkreten Fällen nachzuweisen, dass eine Summe direkt ist. Bevor wir Beispiele besprechen, leiten wir eine alternative Charakerisierung der direkten Summe her.

2.3.6 **Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $U_1, U_2, \dots, U_k$ Unterräume. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

*(i) Die Summe $\sum_{i=1}^k U_i$ ist direkt.*

*(ii) Für alle $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ gilt*

$$U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k U_i = \{0\}.$$

*(iii) Aus $\sum_{i=1}^k u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$ für alle $i \leq k$ folgt $u_i = 0$ für alle $i \leq k$.*

*Beweis.* (i) $\implies$ (ii): Wir nehmen an, dass die Summe direkt ist. Weil jeder Unterraum den Nullvektor enthält, ist $0 = \sum_{i=1}^k 0$ eine Schreibweise des Nullvektors. Sei $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ und sei

$$v \in U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k U_i.$$

wir schreiben $v = \sum_{i \neq j} u_i$ mit $u_i \in U_i$ für alle $i \neq j$. Es sei $u_j = -v \in U_j$. Dann ist

$$0 = \sum_{i=1}^k u_i$$

und weil wir schon eine Summendarstellung für den Nullvektor kennen und diese Darstellung nach Definition der direkten Summe eindeutig ist, folgt $u_i = 0$ für alle $i$. Insbesondere gilt $v = 0$ und damit

$$U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} U_i = \{0\}.$$

(ii) $\implies$ (iii): Es sei $\sum_{i=1}^{k} u_i = 0$. Sei $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Dann ist

$$-u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} u_i \in U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} U_i = \{0\}.$$

Also ist $u_j = 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

(iii) $\implies$ (i): Es sei $v \in \sum_{i=1}^{k} U_i$. Sind

$$v = \sum_{i=1}^{k} u_i = \sum_{i=1}^{k} u_i'$$

zwei Summendarstellungen von $v$ mit $u_i, u_i' \in U_i$, dann gilt $\sum_{i=1}^{k}(u_i - u_i') = 0$. Da $u_i - u_i' \in U_i$ liegt ($U_i$ ist ein Unterraum), folgt aus (iii), dass $u_i - u_i' = 0$ für alle $i \leq k$ ist. Das heißt, die beiden Summendarstellungen von $v$ sind identisch. $\square$

Für die direkte Summe zweier Unterräume erhalten wir eine besonders einfache Beschreibung.

**2.3.7** **Korollar.** *Es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Die Summe $U_1 + U_2$ ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.*

*Beweis.* Das folgt aus 2.3.6 (ii), denn für $j = 1$ und $j = 2$ erhält man jeweils die Bedingung $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. $\square$

**2.3.8** **Beispiel.** Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit den Unterräumen

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Summe $U_1 + U_2$ ist direkt. In der Tat, es gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, denn ein Vektor $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in $U_1$, wenn $a = 0$ ist.

**2.3.9** **Beispiel**. Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Es seien $v_1, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit $v_i \neq 0$ für alle $i$. Die Summe

$$\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_k \rangle$$

ist genau dann direkt, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind. Das folgt direkt aus der Bedingung 2.3.6 (iii).

**2.3.10** **Aufgabe**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ mit den Unterräumen **L**

$$U_1 = \left\{ x \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

und

$$U_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 = 0 \text{ und } x_3 = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Summe $U_1 + U_2$ direkt ist.

**2.3.11** **Aufgabe**. Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ die disjunkte Vereinigung von Teilmengen $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ist. Zeigen Sie, dass **L**

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle \mathcal{B}_i \rangle$$

gilt.

**2.3.12** **Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Wir nehmen an, dass $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ die direkte Summe von Unterräumen $U_1, \dots, U_k$ ist. Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis von $U_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dann ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ eine Basis von $V$.*

*Ist $V$ endlich-dimensional, dann gilt $\dim_K(V) = \sum_{i=1}^k \dim_K(U_i)$.*

*Beweis*. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist. Indem wir Aufgabe 2.3.3 wiederholt anwenden, erhalten wir

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathcal{B}_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} U_i = V,$$

d.h., $\mathcal{B}$ erzeugt $V$.

Als nächstes prüfen wir, ob $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ seien $v_1^{(i)}, \dots, v_{r_i}^{(i)} \in \mathcal{B}_i$ paarweise verschiedene Vektoren (mit $r_i \in \mathbb{N}_0$). Seien $a_1^{(i)}, \dots, a_{r_i}^{(i)} \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0.$$

Da $\sum_{j=1}^{r_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)} \in U_i$ ist und die Summe direkt ist, folgt aus 2.3.6, dass

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt. Da die Vektoren $v_1^{(i)}, \ldots, v_{r_i}^{(i)}$ paarweise verschiedene Basisvektoren (und damit linear unabhängig) sind, folgt $a_j^{(i)} = 0$ für alle $j \leq r_i$. Die Menge $\mathcal{B}$ ist also linear unabhängig und damit eine Basis.

Ist $V$ endlich-dimensional, dann gilt

$$\dim_K(V) = |\mathcal{B}| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{B}_i| = \sum_{i=1}^{k} \dim_K(U_i). \qquad \square$$

**2.3.13** **Aufgabe**. Es seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume. Wir nehmen an, dass $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ und $W = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ jeweils direkte Summen von $k$ Unterräumen sind. Es sei $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\varphi(V_i) \subseteq W_i$. Zeigen Sie, dass dann gilt **L**

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\varphi|_{V_i}).$$

Dabei bezeichnet $\varphi|_{V_i}$ die Einschränkung von $\varphi$ auf $V_i$.

## II. Komplemente

**2.3.14** **Definition** Sei $V$ ein Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Ein Unterraum $W \subseteq V$ heißt *Komplement* von $U$ in $V$, wenn

$$V = U \oplus W$$

gilt. Das heißt, es gelten $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$.

**2.3.15** **Anmerkungen zur Definition**. (a) Ist $W$ ein Komplement zu $U$ in $V$, dann ist auch $U$ ein Komplement zu $W$ in $V$. Man sagt daher auch, dass $U$ und $W$ zueinander komplementäre Unterräume von $V$ sind.

(b) Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sind $U, W \subseteq V$ komplementäre Unterräume, dann gilt mit 2.3.12

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(V).$$

**2.3.16** **Beispiel**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Es sei $U$ ein 2-dimensionaler Unterraum, d.h., eine Ebene durch den Ursprung. Da $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 hat und $U$ die Dimension 2, schließen wir aus Satz 2.3.12, dass jedes Komplement zu $U$ ein-dimensional sein muss.

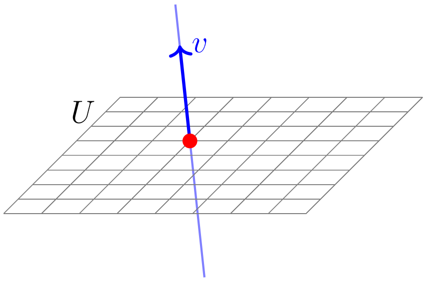



Abbildung 2.1.: Zwei komplementäre Unterräume im $\mathbb{R}^3$.

Es sei $v \in \mathbb{R}^3$. Wann ist die Gerade $\langle v \rangle$ ein Komplement zu $U$? Falls $v \in U$ liegt, gilt $U + \langle v \rangle = U$, also ist $\langle v \rangle$ kein Komplement. Sei also $v \notin U$. Dann liegt auch $av$ mit $a \neq 0$ nicht in $U$ und damit gilt

$$\langle v \rangle \cap U = \{0\}.$$

Insbesondere ist die Summe direkt und mit 2.3.12 folgt

$$\dim_{\mathbb{R}}(\langle v \rangle \oplus U) = 1 + 2 = 3.$$

Folglich ist $\langle v \rangle \oplus U = \mathbb{R}^3$ und $\langle v \rangle$ ist ein Komplement zu $U$.

Im Beispiel haben wir gesehen, dass es zu einem Unterraum im Allgemeinen viele verschiedene Komplemente geben kann. Der nächste Satz stellt sicher, dass zu jedem Unterraum immer mindestens ein Komplement existiert.

**2.3.17** **Satz vom Komplement.** *Sei $V$ ein Vektorraum. Zu jedem Unterraum $U \subseteq V$ existiert ein Komplement.*

*Beweis.* Der Satz vom Komplement benötigt das Auswahlaxiom. Wir werden den Satz mit dem Lemma von Zorn beweisen, weil dies ein schönes Beispiel dafür ist, wie das Lemma eingesetzt wird[6].

Wir definieren die Menge $M$ aller Unterräume $W \subseteq V$ mit $U \cap W = \{0\}$. Die Menge ist bezüglich der Inklusion $\subseteq$ partiell geordnet. Wir behaupten, dass jede Kette $K$ in $M$ eine obere Schranke in $M$ besitzt.

[6] Alternativ könnte man auch mit dem Basisergänzungssatz argumentieren

Sei $K$ eine Kette. Wir definieren

$$W' = \bigcup_{W \in K} W$$

als Vereinigung aller Elemente von $K$. Dann ist $W'$ wieder ein Unterraum von $V$. Es seien $w_1, w_2 \in W'$ und $a \in K$. Da $w_i$ in der Vereinigung liegt, gibt es jeweils ein $W_i \in K$ mit $w_i \in W_i$. Da $K$ eine Kette ist gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$. Sagen wir (o.B.d.A.) es gilt $W_1 \subseteq W_2$, also $w_1, w_2 \in W_2$. Da $W_2$ ein Unterraum ist, schließen wir

$$aw_1 + w_2 \in W_2 \subseteq W'.$$

Also ist $W'$ nach 2.2.6 ein Unterraum von $V$. Es gilt auch $U \cap W' = \bigcup_{W \in K} U \cap W = \{0\}$. Also ist $W' \in M$ eine obere Schranke für $K$.

Das Lemma von Zorn 2.1.13 liefert uns nun ein maximales Element $W$ in $M$. Wir behaupten, dass $W$ ein Komplement zu $U$ ist. Nach Definition von $M$ gilt $U \cap W = \{0\}$. Wir zeigen nun, dass $U + W = V$ ist. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass es einen Vektor $v \in V$ gibt, der nicht in $U + W$ liegt. Wir definieren $Z = W + \langle v \rangle$. Wir behaupten, dass $Z \cap U = \{0\}$ ist und $Z$ damit in $M$ liegt.

Sei $u \in U \cap Z$. Wir schreiben $u = w + av$ mit $w \in W$ und $a \in K$. Dann erhalten wir

$$av = u - w \in U + W$$

und damit $a = 0$, denn $v$ liegt nicht in $U + W$. Daraus folgt nun, dass $u = w$ in $U \cap W = \{0\}$ liegt, d.h., $U \cap Z = \{0\}$.

Daraus folgt $Z \in M$ und wegen $W \subsetneq Z$ ist dies ein Widerspruch zur Maximalität von $W$. Es muss also $U + W = V$ sein und $W$ ist das gesuchte Komplement. □

**2.3.18** **Aufgabe**. Beweisen Sie mit dem Satz vom Komplement das „lineare Auswahlaxiom“: Zu jeder surjektiven $K$-linearen Abbildung existiert ein $K$-lineares Rechtsinverses. **L**

Zum Abschluss überlegen wir uns, wie man ein Komplement bestimmen kann. Dazu muss man nur eine Basis von $U$ zu einer Basis von $V$ ergänzen.

**2.3.19** **Lemma.** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $U$ ein Unterraum. Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis mit $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, dann ist*

$$W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

*ein Komplement von $U$ in $V$.*

*Beweis.* Aus 2.3.3 schließen wir

$$U + W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle + \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots v_n \rangle = V.$$

Warum gilt $U \cap W = \{0\}$? Sei $v \in U \cap W$. Wir können also $v$ auf zwei Weisen als Linearkombination schreiben:

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{j=k+1}^{n} a_j v_j$$

mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in K$. Damit erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_j v_j.$$

Da die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und damit $v = 0$. □

2.3.20 **Beispiel**. Wir betrachten den Raum $\mathbb{F}_2^4$ mit dem Unterraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die beiden Vektoren mit den Vektoren

$$v_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{F}_2^4$. Hier muss man einmal prüfen, dass diese Vektoren wirklich linear unabhängig sind, d.h., dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat. Also ist $W = \langle v_3, v_4 \rangle$ ein Komplement zu $U$ in $\mathbb{F}_2^4$.

## 2.4. Faktorräume

Hat man einen Vektorraum $V$ und einen Unterraum $U$, so kann man damit immer einen neuen Vektorraum konstruieren: den sogenannten *Faktorraum* $V/U$. Diese Konstruktion werden wir in diesem Abschnitt kennenlernen. Die Vektoren im Faktorraum sind selbst Mengen (genauer: „affine Unterräume“ von $V$). Bei der ersten Begegnung wirkt die Konstruktion des Faktorraumes daher etwas abstrakt und unintuitiv. Sobald man sich aber an das Arbeiten mit Faktorräumen gewöhnt hat, wird man feststellen, dass diese Objekte sehr vielseitige Hilfsmittel sind. Der Faktorraum ist ein wunderbares Beispiel viele für weiterführende Ideen der Algebra, wo ähnliche „Faktorobjekte“ (Faktorgruppen, Faktorringe, Faktormoduln...) eine zentrale Bedeutung haben.

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel. Wir verzichten dabei auf einige Details, denn wir werden danach in einer viel allgemeineren Situation alle Beweise ausführen.

**2.4.1** **Die Parallelenschar als Vektorraum**. Wir betrachten den zwei-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem ein-dimensionalen Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Punkte im Unterraum $U$ bilden eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Es sei $\mathcal{G}$ die Menge aller

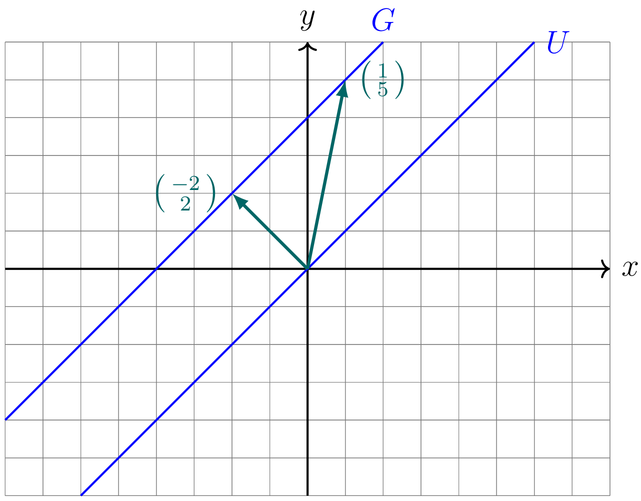



Abbildung 2.2.: Die Gerade $U$ und die parallele Gerade $G$ im $\mathbb{R}^2$.

zu $U$ parallelen Geraden; man spricht auch von der zugehörigen *Parallelenschar*. Eine parallele Gerade erhält man, indem man alle Punkte auf $U$ durch Addition mit einem Vektor verschiebt. Zum Beispiel ist

$$G = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + U := \left\{ \begin{pmatrix} -2+t \\ 2+t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

die zu $U$ parallele Gerade durch den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Verschiedene „Verschiebungsvektoren" können dabei dieselbe parallele Gerade erzeugen. Zum Beispiel gilt

$$G = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + U$$

Zwei zu $U$ parallele Geraden $v + U$ und $w + U$ sind dabei entweder gleich oder disjunkt.

Wir definieren nun eine Addition auf der Parallelenschar. Sind $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ dann definiert man

$$G_1 + G_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in G_1, w_2 \in G_2\}.$$

Jetzt kommt die spannende Beobachtung: $G_1 + G_2$ ist ebenfalls eine zu $U$ parallele Gerade! Genauer gilt: $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$. Es ist hilfreich das an einem Beispiel zu überprüfen: Berechnen Sie $(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + U) + (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + U)$. Wir haben also eine Addition auf der Parallelenschar $\mathcal{G}$ definiert. Die Addition ist kommutativ, weil die Addition in $\mathbb{R}^2$ kommutativ ist. Es gibt sogar ein neutrales Element zu dieser Addition: die Gerade $U$, d.h. $G_1 + U = G_1 = U + G_1$ **L**

Als nächstes definieren wir eine Skalarmultiplikation auf $\mathcal{G}$. Ist $G_1 \in \mathcal{G}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann setzen wir

$$aG_1 = \{av \mid v \in G_1\}.$$

Wieder kann man zeigen: $aG_1$ ist ebenfalls eine zu $U$ parallele Gerade! Genauer gilt: $a(v + U) = av + U$.

Man kann nun beweisen, dass die Parallelenschar $\mathcal{G}$ mit dieser Addition und dieser Skalarmultiplikation wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

## I. Konstruktion des Faktorraumes

Alles was wir gerade im Beispiel 2.4.1 gesehen haben, funktioniert ganz allgemein über jedem Körper und mit jedem Unterraum $U$ eines Vektorraumes. Welche Objekte ersetzen die zu $U$ parallelen Geraden? Mengen von Punkten, die man durch „Verschiebung" von $U$ erhält.

2.4.2 **Definition** Sei $V$ ein Vektorraum. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum und $v \in V$, dann nennt man

$$v + U = \{v + u \in V \mid u \in U\}$$

den *affinen Unterraum* zu $U$ durch den Punkt $v$.

2.4.3 **Affine Unterräume vs. Unterräume** Ein affiner Unterraum ist im Allgemeinen *kein* Unterraum im Sinne von 2.2.4. Die affinen Unterräume zu $U$ nennt man manchmal auch *Nebenklassen* von $U$.

2.4.4 **Beispiel**. Im Kurs Mathematische Grundlagen sind Sie affinen Unterräumen schon beim Lösen von linearen Gleichungssystemen begegnet. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Besitzt dieses Gleichungssystem eine Lösung $x_0 \in K^n$, dann hat die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ die Form

$$\mathcal{L} = x_0 + U$$

wobei $U$ der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist, d.h., $U = \mathrm{Ker}(A)$. Die Lösungsmenge ist also ein affiner Unterraum von $K^m$.

Im nächsten Lemma sehen wir, dass je zwei affine Unterräume zum selben Unterraum $U$ gewissermaßen „parallel“ sind.

2.4.5 **Lemma.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U$ ein Unterraum. Je zwei affine Unterräume zu $U$ sind entweder gleich oder disjunkt.*

*Die affinen Unterräume $v + U$ und $w + U$ sind genau dann gleich, wenn $v - w$ in $U$ liegt.*

*Beweis*. Es seien $v_1 + U$ und $v_2 + U$ zwei affine Unterräume zu $U$ durch die Punkte $v_1, v_2 \in V$. Angenommen $v_1 + U$ und $v_2 + U$ sind nicht disjunkt, dann gibt es einen Punkt $x \in (v_1 + U) \cap (v_2 + U)$. Es gibt also Vektoren $u_1, u_2 \in U$ mit

$$x = v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

Dann gilt $v_1 = v_2 + (u_2 - u_1)$. Ist $y = v_1 + u$ mit $u \in U$ nun ein beliebiger Punkt im affinen Unterraum $v_1 + U$, dann erhält man

$$y = v_1 + u = v_2 + \underbrace{(u_2 - u_1 + u)}_{\in U} \in v_2 + U.$$

Das heißt, $v_1 + U \subseteq v_2 + U$. Dasselbe Argument mit vertauschten Rollen liefert $v_2 + U \subseteq v_1 + U$; also gilt $v_1 + U = v_2 + U$.

Kommen wir nun zur zweiten Aussage. Nehmen wir zuerst $v+U=w+U$ an. Dann ist $v \in v+U=w+U$ und man kann $v$ in der Form $v=w+u$ mit $u \in U$ schreiben. Dann gilt aber auch $v-w=u \in U$.

Gilt umgekehrt $v-w \in U$, dann ist $v=w+(v-w) \in w+U$. Damit sind $v+U$ und $w+U$ nicht disjunkt und somit gilt $v+U=w+U$. □

**2.4.6** $\boxed{\textbf{Definition}}$ Sei $V$ ein Vektorraum mit einem Unterraum $U$. Dann bezeichnet

$$V/U=\{v+U \mid v \in V\}$$

die Menge der affinen Unterräume zu $U$ in $V$. Man spricht $V/U$ als „$V$ modulo $U$“.

**2.4.7** **Addition affiner Unterräume**. Sei $V$ ein Vektorraum mit einem Unterraum $U$. Auf der Menge $V/U$ definieren wir nun eine Addition. Sind $A, B \in V/U$, dann setzen wir

$$A+B=\{x+y \in V \mid x \in A, y \in B\}.$$

Wir zeigen, dass $A+B$ wieder ein affiner Unterraum von $V$ ist. Es seien $A=v+U$ und $B=w+U$ mit $v, w \in V$. Sind $x=v+u_1 \in A$ und $y=w+u_2 \in B$ gegeben (dabei sind $u_1, u_2 \in U$), dann gilt

$$x+y=v+w+\underbrace{(u_1+u_2)}_{\in U} \in v+w+U;$$

also ist $A+B \subseteq v+w+U$. Umgekehrt durchlaufen $u_1, u_2$ alle Elemente von $U$, wenn $x$ und $y$ die Elemente von $A$ bzw. $B$ durchlaufen, also gilt $A+B=v+w+U$. Damit erhalten wir die eingängliche Formel

$$(v+U)+(w+U)=v+w+U. \tag{2.4.a}$$

**2.4.8** **Skalarmultiplikation mit affinen Unterräumen**. Sei $V$ ein Vektorraum mit einem Unterraum $U$. Auf der Menge $V/U$ definieren wir nun eine Skalarmultiplikation $K \times V/U \to V/U$. Für $a \in K$ und $A \in V/U$ setzen wir

$$aA=\{ax \in V \mid x \in A\}.$$

Wir zeigen, dass $aA$ wieder ein affiner Unterraum von $V$ ist. Es sei $A=v+U$ mit $v \in V$. Ist $x=v+u \in A$ mit $u \in U$, dann gilt

$$ax=a(v+u)=av+\underbrace{au}_{\in U} \in av+U;$$

also ist $aA \subseteq av + U$. Mit $x \in A$ durchläuft $u$ alle Elemente von $U$, also gilt $aA = av + U$. Daraus erhalten wir die Formel

$$a(v + U) = av + U. \tag{2.4.b}$$

2.4.9 **Satz vom Faktorraum.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U$ ein Unterraum. Die Menge $V/U$ bildet mit den Rechenoperationen aus 2.4.7 und 2.4.8 einen $K$-Vektorraum.*

*Man nennt $V/U$ den* Faktorraum *von $V$ nach $U$.*

*Beweis.* Wir verifizieren die Vektorraumaxiome aus 2.2.1.

2.2.1 (i):
Wir werden die Gruppenaxiome aus 1.1.1 mithilfe der Formel (2.4.a) herleiten. Zuerst halten wir fest, dass die Addition kommutativ ist; es gilt

$$(v + U) + (w + U) = v + w + U = w + v + U = (w + U) + (v + U)$$

für alle $v, w \in V$, denn die Addition in $V$ ist kommutativ.

(G1): Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\big((v_1 + U) + (v_2 + U)\big) + (v_3 + U) &= (v_1 + v_2 + U) + (v_3 + U) \\
&= (v_1 + v_2) + v_3 + U && \text{(Assoz. in } V\text{)} \\
&= v_1 + (v_2 + v_3) + U \\
&= (v_1 + U) + (v_2 + v_3 + U) \\
&= (v_1 + U) + \big((v_2 + U) + (v_3 + U)\big).
\end{aligned}$$

Das Assoziativgesetz ist somit erfüllt.

(G2): $U = 0 + U$ ist das neutrale Element, denn mit (2.4.a) gilt

$$(v + U) + U = v + U = U + (v + U).$$

für alle $v \in V$.

(G3): Das Inverse zu $v + U$ ist $-v + U$, denn mit (2.4.a) erhält man

$$(v + U) + (-v + U) = v + (-v) + U = 0 + U = U$$

und die Kommutativität liefert $(-v + U) + (v + U) = 0$.

2.2.1 (ii):
Es seien $a, b \in K$ und $v \in V$. Da $V$ das Axiom 2.2.1 (ii) erfüllt, folgt aus (2.4.b)

$$(ab)(v+U) = (ab)v + U = a(bv) + U = a(bv+U) = a(b(v+U)).$$

Genauso einfach erhalten wir $1(v+U) = 1v + U = v + U$ für alle $v \in V$.

2.2.1 (iii):
Auch die Distributivgesetze leiten wir mithilfe der Formeln (2.4.a) und (2.4.b) aus den Distributivgesetzen für $V$ her. Für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(a+b)(v+U) &= (a+b)v + U = av + bv + U \\ &= (av+U) + (bv+U) = a(v+U) + b(v+U)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\big((v+U)+(w+U)\big) &= a(v+w+U) = a(v+w) + U \\ &= av + aw + U = (av+U) + (aw+U) \\ &= a(v+U) + a(w+U)\end{aligned}$$

□

Natürlich gibt es eine Verbindung zwischen dem Vektorraum $V$ und dem Faktorraum $V/U$: die sogenannte „kanonische Projektion“. Schauen wir uns dazu nochmal die Parallelenschar aus 2.4.1 an.

**2.4.10 Die kanonische Projektion auf die Parallelenschar**. Wir betrachten wieder den zwei-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem ein-dimensionalen Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

und der zugehörigen Parallelenschar $\mathcal{G}$. Wie wir gerade gesehen haben, ist $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2/U$ der Faktorraum von $\mathbb{R}^2$ nach $U$.

Jeder Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ liegt auf *genau einer* der Parallelen $G$ in $\mathcal{G}$ – nämlich genau auf der Geraden $G = v + U$. Ordnet man nun jedem Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ die parallele Gerade $v + U$ in $\mathcal{G}$ zu, dann erhält man eine Abbildung

$$\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{G} \quad \text{mit} \quad \pi(v) = v + U.$$

Die Abbildung $\pi$ ist surjektiv, denn auf jeder Geraden liegt mindestens ein Punkt. Man nennt $\pi$ die *kanonische Projektion* auf $\mathcal{G}$. Wir werden nun allgemein sehen, dass $\pi$ sogar eine lineare Abbildung ist!

2.4.11 **Definition und Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Die Abbildung*

$$\pi\colon V \to V/U \quad \textit{mit} \quad \pi(v) = v + U$$

*ist surjektiv und $K$-linear. Der Kern von $\pi$ ist* $\mathrm{Ker}(\pi) = U$.

*Man nennt $\pi$ die* kanonische Projektion *auf $V/U$ oder auch* Faktorabbildung.

Beweis. Für jedes $v \in V$ liegt $v + U$ im Bild von $\pi$, denn $v + U = \pi(v)$; damit ist die kanonische Projektion surjektiv.

Wir rechnen nun nach, dass $\pi$ linear ist; siehe [MG, 8.1]. Es seien $v, w \in V$. Aus (2.4.a) folgt nun

$$\pi(v + w) = v + w + U = (v + U) + (w + U) = \pi(v) + \pi(w).$$

Sei $a \in K$. Dann gilt mit (2.4.b)

$$\pi(av) = av + U = a(v + U) = a\pi(v).$$

Wir bestimmen noch den Kern von $\pi$. Der Nullvektor in $V/U$ ist $U = 0 + U$. Wann gilt $\pi(v) = 0 + U$? Nach 2.4.5 ist dies genau dann der Fall, wenn $v - 0 = v$ in $U$ liegt, d.h., $\mathrm{Ker}(\pi) = U$. □

Das folgende Lemma enthält ein Hilfsresultat, dass wir erst später benötigen. Der Beweis gibt aber ein gutes Beispiel ab, wie man mit Faktorräumen arbeitet.

2.4.12 **Lemma.** *Es seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $U, W_1, \ldots, W_s \subseteq V$ Unterräume. Es sei $\pi\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion. Angenommen es gelten $U = \bigoplus_{i=1}^{s}(U \cap W_i)$ und $V/U = \bigoplus_{i=1}^{s} \pi(W_i)$, dann gilt auch $V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$.*

Beweis. *Schritt 1: $V = \sum_{i=1}^{s} W_i$.*

Sei $v \in V$ beliebig. Wir bilden $v$ mit der Projektion $\pi$ nach $V/U$ ab. Da $V/U = \sum_{i=1}^{s} \pi(W_i)$ gilt, finden wir Vektoren $w_i \in W_i$ für alle $i \in \{1, 2 \ldots, s\}$, sodass

$$\pi(v) = \sum_{i=1}^{s} \pi(w_i) = \pi\left(\sum_{i=1}^{s} w_i\right)$$

gilt. Durch Umstellen dieser Gleichung folgt, dass der Vektor $u = v - \sum_{i=1}^{s} w_i$ in $U = \mathrm{Ker}(\pi)$ liegt; siehe 2.4.11. Da außerdem $U = \sum_{i=1}^{s}(U \cap W_i)$ gilt finden wir

Vektoren $u_i \in U \cap W_i$, sodass $u = \sum_{i=1}^{s} u_i$ gilt. Da $W_i$ ein Unterraum ist, liegt auch $u_i + w_i$ in $W_i$. Insgesamt erhalten wir damit

$$v = u + \sum_{i=1}^{s} w_i = \sum_{i=1}^{s} (u_i + w_i) \in \sum_{i=1}^{s} W_i.$$

Da $v \in V$ beliebig war, ist $V$ die Summe der Unterräume $W_1, \dots, W_s$.

*Schritt 2:* $V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$.

Wir zeigen, dass die Summe direkt ist, indem wir Bedingung (iii) aus Satz 2.3.6 nachweisen. Angenommen, es sind Vektoren $w_i \in W_i$ mit $\sum_{i=1}^{s} w_i = 0$ gegeben. Wir wenden die kanonische Projektion $\pi$ an und erhalten

$$0 = \pi(0) = \pi\left(\sum_{i=1}^{s} w_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\pi(w_i)}_{\in \pi(W_i)}.$$

Da die Summe der Unterräume $\pi(W_1), \dots, \pi(W_s)$ von $V/U$ direkt ist, gilt nach Satz 2.3.6 $\pi(w_i) = 0$ für alle $i \leq s$. Das heißt, $w_i \in \mathrm{Ker}(\pi) \cap W_i = U \cap W_i$. Nach Voraussetzung ist auch die Summe der Unterräume $U \cap W_1, \dots, U \cap W_s$ direkt und aus der Gleichung $\sum_{i=1}^{s} w_i = 0$ und Satz 2.3.6 folgt somit $w_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. □

## II. Die Dimension des Faktorraumes

Schließlich wollen wir uns überlegen, wie $V/U$ „aussieht“. Welche Dimension hat $V/U$? Wie findet man eine Basis von $V/U$? Sehen wir uns dazu wieder die Parallelenschar an.

**2.4.13** **Die Dimension der Parallelenschar**. Im zwei-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir den ein-dimensionalen Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit der zugehörigen Parallelenschar $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2/U$.

Nun benötigen wir ein Komplement zu $U$ in $\mathbb{R}^2$. In diesem Fall ist ein Komplement $W$ von $U$ einfach ein von $U$ verschiedener ein-dimensionaler Unterraum. Konkret wählen wir

$$W = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

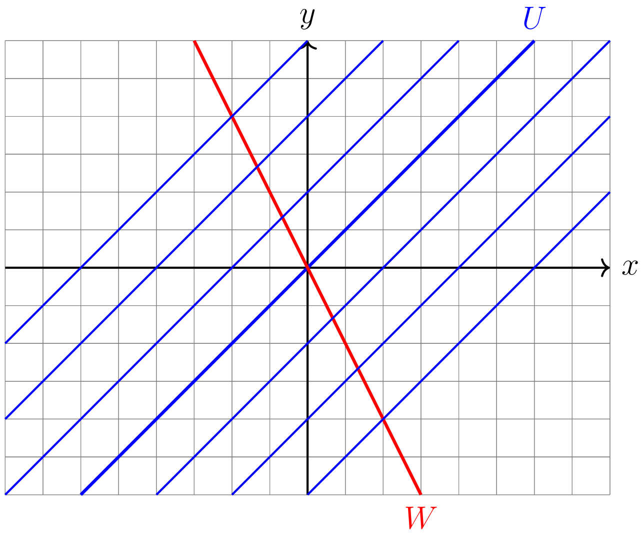



Abbildung 2.3.: Die komplementäre Gerade $W$ schneidet jedes Element von $\mathcal{G}$ in genau einem Punkt.

Das Komplement $W$ schneidet jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ in genau einem Punkt! Und umgekehrt liegt jeder Punkt vom $W$ auf genau einer Geraden aus $\mathcal{G}$. Diese Beobachtung liefert uns eine Bijektion zwischen $W$ und $\mathcal{G}$.

Wir werden nun sehen, dass diese Bijektion wieder eine $K$-lineare Abbildung ist. Damit sind $\mathcal{G}$ und die komplementäre Gerade $W$ isomorph. Insbesondere hat der Faktorraum $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2/U$ die Dimension 1.

2.4.14 **Satz.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Ist $W$ ein Komplement zu $U$ in $V$, dann ist die Einschränkung der kanonischen Projektion auf $W$*

$$\pi|_W : W \to V/U$$

*ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen.*

*Insbesondere gilt: Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $W$, dann ist $\pi(\mathcal{B})$ eine Basis von $V/U$.*

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass $\pi$ linear ist. Wir zeigen nun, dass $\pi|_W$ bijektiv ist.

*Surjektiv:* Sei $v \in V$. Es gilt $V = U \oplus W$, also können wir $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ schreiben. Dann gilt $v - w \in U$ und mit Lemma 2.4.5 folgt

$$\pi|_W(w) = \pi(w) = w + U = v + U.$$

Da $v$ beliebig war, ist $\pi|_W$ surjektiv.

*Injektiv:* Da $W$ ein Komplement zu $U$ ist und $\mathrm{Ker}(\pi) = U$ ist (siehe 2.4.11), gilt

$$\mathrm{Ker}(\pi|_W) = \mathrm{Ker}(\pi) \cap W = U \cap W = \{0\}.$$

Wegen [MG, Prop. 8.3.10] ist $\pi|_W$ damit injektiv.

Der Zusatz folgt aus der Feststellung, dass jeder Isomorphismus von Vektorräumen Basen auf Basen abbildet; vgl. [MG, Kor. 8.3.18]. □

2.4.15 **Beispiel**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem ein-dimensionalen Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir wollen eine Basis des Faktorraumes $\mathbb{C}^3/U$ bestimmen.

Wir suchen ein Komplement von $U$ in $\mathbb{C}^3$. Dazu ergänzen wir $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ zu einer Basis von $\mathbb{C}^3$; vgl. Beispiel 2.3.16. Zum Beispiel wählen wir $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (Hier muss man einmal nachprüfen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind). Dann ist $W = \langle v_2, v_3 \rangle$ ein Komplement und $\{v_2, v_3\}$ ist eine Basis von $W$. Also bilden die Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U$$

eine Basis des Faktorraumes $\mathbb{C}^3/U$.

Aus Satz 2.4.14 wollen wir noch einige nützliche Folgerungen ableiten.

2.4.16 **Korollar.** *Sei $V$ ein Vektorraum und sei $U$ ein Unterraum. Sind $W_1, W_2$ Komplemente zu $U$ in $V$, dann gilt $W_1 \cong W_2$.*

*Beweis.* Aus Satz 2.4.14 folgt $W_1 \cong V/U \cong W_2$. □

2.4.17 **Korollar.** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt die Dimensionsformel*

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(V/U).$$

*Beweis.* Nach dem Satz vom Komplement 2.3.17 gibt es ein Komplement $W$ zu $U$ in $V$ und es gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(W);$$

siehe 2.3.15. Da $W$ und $V/U$ isomorph sind, gilt $\dim_K(W) = \dim_K(V/U)$. □

### III. Der Homomorphiesatz

Zum Abschluss wollen wir uns noch überlegen, wie man lineare Abbildungen aus einem Faktorraum $V/U$ in einen Vektorraum $W$ definieren kann. Dabei gibt es eine kleine Subtilität zu beachten. Wenn man eine Abbildung $f\colon V/U \to W$ definieren möchte und einen Wert für $f(v+U)$ angeben soll, ist man versucht, für die Abbildungsvorschrift den Verschiebungsvektor $v$ zu verwenden. Darin liegt eine Gefahr: Der Verschiebungsvektor $v$ ist nicht eindeutig! Man muss daher immer sicherstellen, dass der Wert von $f(v+U)$ wirklich nur vom affinen Unterraum $v+U$ und nicht vom speziellen Verschiebungsvektor $v$ abhängt (andernfalls wäre $f$ ja gar keine Abbildung!). Man sagt dann, dass $f$ *wohldefiniert* ist.

Lineare Abbildungen von $V/U \to W$ konstruiert man oft dadurch, dass man eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ „faktorisiert" (wir werden gleich sehen, was das bedeutet). Weil diese Konstruktion so häufig verwendet wird, gibt es den folgenden *Homomorphiesatz*, der sicherstellt, dass faktorisierte lineare Abbildungen stets wohldefiniert sind.

2.4.18 **Homomorphiesatz.** *Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von $V$. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, dann definiert*

$$\overline{\varphi}(v+U) := \varphi(v)$$

*eine wohldefinierte $K$-lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon V/U \to W$.*

*Ist $\pi\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion, dann gilt $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.*

*Beweis.* Es seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 + U = v_2 + U$. Aus 2.4.5 wissen wir, dass dann $v_1 - v_2 = u$ in $U$ liegt. Wegen $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ gilt dann

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_1 - v_2 + v_2) = \varphi(u) + \varphi(v_2) = 0 + \varphi(v_2) = \varphi(v_2).$$

Damit hängt der Wert $\varphi(v)$ nur vom affinen Unterraum $v+U$ ab und $\overline{\varphi}$ ist damit wohldefiniert.

Wir prüfen, dass $\overline{\varphi}$ linear ist. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\overline{\varphi}\big((v_1+U)+(v_2+U)\big) = \overline{\varphi}\big(v_1+v_2+U\big)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(v_1 + v_2) && \text{(Def. von } \overline{\varphi}\text{)} \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) && (\varphi \text{ linear}) \\ &= \overline{\varphi}(v_1 + U) + \overline{\varphi}(v_2 + U) \end{aligned}$$

Für alle $v \in V$ gilt $\overline{\varphi}(\pi(v)) = \overline{\varphi}(v + U) = \varphi(v)$, d.h. $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$. □

2.4.19 **Bemerkung**. Die Beziehung $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ stellt man oft im einem *kommutativen Digramm* dar:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Ein Diagramm ist kommutativ, wenn die verschiedenen Wege entlang der Abbildungspfeile dasselbe Ergebnis lieferen.

2.4.20 **Korollar.** *Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine surjektive $K$-lineare Abbildung. Dann gilt*

$$V/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong W.$$

*Beweis.* Wir definieren $U := \mathrm{Ker}(\varphi)$. Aus dem Homomorphiesatz wissen wir, dass es eine lineare Abbildung

$$\overline{\varphi}\colon V/U \to W$$

mit $\overline{\varphi}(v + U) = \varphi(v)$ gibt. Wir zeigen, dass $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus ist.

Da $\varphi$ surjektiv ist, gibt es für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $w = \varphi(v)$. Dann gilt aber auch $w = \overline{\varphi}(v + U)$ und somit ist auch $\overline{\varphi}$ surjektiv.

Es sei nun $v + U$ im Kern von $\overline{\varphi}$. Dann gilt

$$0 = \overline{\varphi}(v + U) = \varphi(v)$$

und damit liegt $v$ in $\mathrm{Ker}(\varphi) = U$, d.h. $v + U = 0 + U$ und der Kern von $\overline{\varphi}$ besteht nur aus dem Nullvektor von $V/U$. Damit ist $\overline{\varphi}$ injektiv. □

Sehen wir uns dazu nochmal die Parallelenschar an.

2.4.21 **Eine lineare Abbildung auf der Parallelenschar**. Im zwei-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir den ein-dimensionalen Unterraum

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit der zugehörigen Parallelenschar $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2/U$.

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y.$$

Der Unterraum $U$ ist der Kern der Abbildung $\varphi$. Die Parallelen in $\mathcal{G}$ sind genau die Niveaulinien von $\varphi$, d.h., für jedes $c \in \mathbb{R}$ beschreibt die Gleichung

$$x - y = c$$

ein Element der Parallelenschar $\mathcal{G}$. In anderen Worten: das Urbild $\varphi^{-1}(c)$ ist ein Element von $\mathcal{G}$.

Das heißt, $\varphi$ nimmt auf jeder zu Geraden $G \in \mathcal{G}$ konstant einen Wert $c$ an. Man kann also problemlos $\overline{\varphi}(G) = c$ definieren und erhält dadurch die faktorisierte lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon \mathbb{R}^2/U \to \mathbb{R}$.

## 2.5. Der Dualraum

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere wichtige Konstruktion kennen, die es erlaubt aus einem Vektorraum $V$ einen neuen Vektorraum $V^*$ zu erhalten - den sogenannten „Dualraum“ zu $V$. Der Dualraum besteht aus allen $K$-linearen Abbildungen von $V$ in den Körper $K$.

**2.5.1** **Erinnerung: Vektorräume von linearen Abbildungen**. Es sei $K$ ein Körper. Sind $V, W$ zwei Vektorräume über $K$, dann bezeichnet $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge der $K$-linearen Abbildungen von $V$ nach $W$. Die Bezeichung Hom ist gebräuchlich, da man lineare Abbildungen auch *Homomorphismen* nennt.

Aus den Mathematischen Grundlagen ist bekannt, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ selbst wieder ein $K$-Vektorraum ist; siehe [MG, 9.1.2]. Die Addition zweier $K$-linearer Abbildungen $\varphi, \psi \colon V \to W$ ist dabei punktweise definiert, d.h.,

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

für alle $v \in V$. Ebenso ist die Skalarmultiplikation punktweise definiert, d.h.

$$(a\varphi)(v) := a\varphi(v)$$

für alle $a \in K$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Sind $V$ und $W$ endlich-dimensional, sagen wir $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(W) = m$, dann ist $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ isomorph zum Vektorraum $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ aller $m \times n$-Matrizen; siehe [MG, 9.1.9]. Insbesondere gilt dann

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = mn. \tag{2.5.a}$$

Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ besteht aus Abbildungen von $V$ nach $W$. Es stellt sich heraus, dass dies sogar ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ ist.

**2.5.2** **Aufgabe**. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ ist. **L**

### I. Dualraum und Dualbasen

**2.5.3** $\boxed{\textbf{Definition}}$ Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Man nennt

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

den *Dualraum* zu $V$. Die Elemente im Dualraum nennt man auch *Linearformen*.

**2.5.4** **Bemerkung**. (a) Ist $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum der Dimension $n$, dann folgt aus (2.5.a), dass der Dualraum $V^*$ ebenfalls Dimension $n$ hat. Die Vektorräume $V$ und $V^*$ sind also isomorph; siehe [MG, 8.3.19]. Dennoch sollte man sich $V$ und $V^*$ nicht als „gleich" vorstellen, denn es gibt keinen *kanonischen* Isomorphismus zwischen diesen Räumen. Ein Isomorphismus ist „kanonisch", wenn man ihn ohne eine Auswahl zu treffen (z.B. die Wahl einer Basis) angeben kann.

(b) Ist $V$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, dann sind $V$ und $V^*$ *nicht* isomorph. Diese Aussage ist nicht offensichtlich und hat damit zu tun, dass es unendliche Mengen verschiedener Mächtigkeit gibt.

Die Elemente im Dualraum sind Linearformen, also lineare Abbildungen. Das macht es etwas schwierig, sich den Dualraum vorzustellen. Wir wollen es im nächsten Beispiel dennoch versuchen.

**2.5.5** **Beispiel**. Sei $K$ ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum $V = K^n$ aller Spaltenvektoren der Länge $n$. Es sei $e_1, e_2, \dots, e_n$ die Standardbasis. Eine Linearform $\alpha \in V^*$ ist eindeutig durch die Werte

$$\alpha(e_1), \alpha(e_2), \dots, \alpha(e_n)$$

auf der Standardbasis bestimmt. Es sei $\mathrm{M}_{1,n}(K)$ die Menge der Zeilenvektoren der Länge $n$. Wir definieren die $K$-lineare Abbildung

$$E\colon V^* \to \mathrm{M}_{1,n}(K) \quad \text{durch} \quad \alpha \mapsto (\alpha(e_1), \alpha(e_2), \dots, \alpha(e_n)).$$

Wegen Satz 8.4.1 [MG] ist $E$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Unter Verwendung dieses Isomorphismus kann man sich den Dualraum zum Raum der Spaltenvektoren $K^n$ also als den Raum der Zeilenvektoren vorstellen.

Aber weshalb verwendet man hier überhaupt Zeilenvektoren? Eine Linearform $\alpha$ ist eine lineare Abbildung und $E(\alpha) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\alpha)$ ist die Matrixdarstellung von $\alpha$ zur Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ von $K^n$ und der Basis $\mathcal{C} = (1)$ von $K$. Das bedeutet, es gilt mit (2.2.b)

$$\alpha(v) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\alpha)v = E(\alpha)v.$$

Der Zeilenvektor $E(\alpha)$ liefert also mithilfe der Matrix-Vektor-Multiplikation die Linearform $\alpha$ auf $K^n$.

Im folgenden Lemma wollen wir uns davon überzeugen, dass der Dualraum immer ausreichend viele Linearformen enthält um mit allem Vektoren (außer dem Nullvektor) etwas nicht-triviales zu machen. Dazu verwenden wir den Satz vom Komplement.

2.5.6 **Lemma.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Für alle $v \neq 0$ in $V$ gibt es eine Linearform $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(v) \neq 0$.*

*Beweis.* Es sei $U = \langle v \rangle$ der von $v$ aufgespannte Unterraum. Nach dem Satz vom Komplement 2.3.17 finden wir ein Komplement $W \subseteq V$, d.h., $U \oplus W = V$. Jeder Vektor $x \in V$ lässt sich also eindeutig in der Form

$$x = cv + w$$

mit $c \in K$ und $w \in W$ schreiben. Damit definieren wir eine Linearform $\alpha$ auf $V$, indem wir $\alpha(cv+w) = c$ definieren, wenn $w \in W$ und $c \in K$ ist. Das ist eine lineare Abbildung, denn ist $x = cv + w$ und $x' = c'v + w'$ mit $c, c' \in K$ und $w, w' \in W$, dann gilt

$$\alpha(ax + x') = \alpha((ac + c')v + \underbrace{aw + w'}_{\in W}) = ac + c' = a\alpha(x) + \alpha(x')$$

für alle $a \in K$. Aus Aufgabe 2.2.18 folgt nun, dass $\alpha$ linear ist, d.h., $\alpha \in V^*$. Es gilt $\alpha(v) = 1$ und damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

2.5.7 **Aufgabe**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{F}_7^3$ und den Vektor L

$$v = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{3} \\ \overline{2} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Linearform $\alpha \in (\mathbb{F}_7^3)^*$ an, die $\alpha(v) \neq 0$ erfüllt.

2.5.8 **Notation**. Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$, dann definieren wir Linearformen $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ durch

$$v_i^*(v_j) = \delta_{i,j};$$

dabei bezeichnet $\delta$ das *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

wobei mit 1 und 0 immer die Elemente im Körper $K$ gemeint sind. Als lineare Abbildung ist $v_i^*$ eindeutig durch die Werte auf der Basis $v_1, \dots, v_n$ definiert.

2.5.9 **Vorsicht mit der Notation $v_i^*$** Die Notation $v_i^*$ ist gefährlich, denn die Linearform $v_i^*$ hängt nicht nur von $v_i$ sondern von der ganzen Basis $v_1, \dots, v_n$ ab. Wir verwenden die Notation daher nur, wenn vorher eine Basis fest gewählt wurde.

2.5.10 **Definition und Satz.** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Dann ist $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ eine Basis von $V^*$.*

*Man nennt $\mathcal{B}^*$ die* Dualbasis *zu $\mathcal{B}$.*

*Beweis.* Wir wissen bereits aus (2.5.a), dass $V$ und $V^*$ dieselbe Dimension haben, d.h., $\dim_K(V^*) = n$. Es ist daher ausreichend zu zeigen, dass die Linearformen $v_1^*, \dots, v_n^*$ linear unabhängig sind; siehe [MG, Prop. 7.4.4].

Dazu seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^* = 0$$

gegeben. Was bedeutet es, dass eine Linearform gleich 0 ist? Das heißt, das man beim Einsetzen eines beliebigen Vektors immer das Ergebnis 0 erhält. Setzen wir nun, den Basisvektor $v_j$ ein, dann erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{i,j} = a_j.$$

Da $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig war, sind die Linearformen $v_1^*, \dots, v_n^*$ damit linear unabhängig. □

2.5.11 **Bemerkung**. Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$, dann nennen wir $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die *geordnete Dualbasis* zu $\mathcal{B}$.

2.5.12 **Beispiel**. Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Mithilfe des Isomorphismus $E\colon V^* \to \mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ aus 2.5.5 stellen wir uns den Dualraum $(\mathbb{R}^2)^*$ als Raum der Zeilenvektoren der Länge 2 vor.

Gegeben ist die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir suchen die Dualbasis $v_1^*$, $v_2^*$ oder genauer die zugehörigen Zeilenvektoren $u_1 = E(v_1^*) = (u_{1,1}, u_{1,2})$ und $u_2 = E(v_2^*) = (u_{2,1}, u_{2,2})$. Diese Zeilenvektoren sind durch die Gleichungen

$$u_1 v_1 = 1, \quad u_1 v_2 = 0, \quad u_2 v_1 = 0, \quad u_2 v_2 = 1 \tag{2.5.b}$$

eindeutig bestimmt. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2u_{1,1} & - & u_{1,2} & = & 1 \\ u_{1,1} & + & 3u_{1,2} & = & 0 \\ 2u_{2,1} & - & u_{2,2} & = & 0 \\ u_{2,1} & + & 3u_{2,2} & = & 1 \end{array}$$

für das man mit etwas Rechnen die Lösung

$$u_1 = (\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}), \quad u_2 = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$$

findet.

Man kann die Lösung im Beispiel 2.5.12 auch etwas eleganter herleiten, wenn man die folgende Beobachtung einsetzt.

**2.5.13** **Die Dualbasis ausrechnen**. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis der Raumes $K^n$. Es sei $v_1^*, \ldots, v_n^*$ die Dualbasis von $(K^n)^*$. Die zugehörigen Zeilenvektoren nennen wir $u_i \coloneqq E(v_i^*)$ für $1 \leq i \leq n$. Nach Definition der Dualbasis gilt

$$u_i v_j = \delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ist $A$ die Matrix deren Spalten $v_1, \ldots, v_n$ sind und ist $B$ die Matrix, deren Zeilen $u_1, \ldots, u_n$ sind. Dann gilt also $BA = I_n$. Damit ist $A$ invertierbar und es gilt $B = A^{-1}$; siehe [MG, 4.5.6].

Wir halten fest: Schreibt man die Basis Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in eine Matrix $A$, dann sind die Zeilen der inversen Matrix $A^{-1}$ genau die Zeilenvektoren $E(v_1^*), E(v_2^*), \ldots, E(v_n^*)$, die die Dualbasis beschreiben.

**2.5.14** **Beispiel**. Versuchen wir das nochmal im Beispiel 2.5.12. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix mit den Spalten $v_1, v_2$. Die inverse Matrix ist

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir lesen die Dualbasis aus den Zeilen der inversen Matrix $A^{-1}$ ab und erhalten

$$u_1 = (\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}) \quad \text{und} \quad u_2 = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}).$$

**2.5.15** **Aufgabe**. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis **L**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die Dualbasis $v_1^*, v_2^*, v_3^*$ in Form von Zeilenvektoren an.

## II. Duale Abbildungen

Wie wir gerade gesehen haben, kann man zu jedem Vektorraum $V$ seinen Dualraum $V^*$ definieren. Hier werden wir uns jetzt überlegen, wie sich diese Konstruktion mit linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen verträgt.

Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und es sei $\alpha\colon W \to K$ eine Linearform auf $W$. Die Komposition linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung (siehe [MG, 8.1.9]). Also ist dann

$$\alpha \circ \varphi\colon V \to K$$

eine Linearform auf $V$. Dies definiert eine Abbildung vom Dualraum $W^*$ in den Dualraum $V^*$.

**2.5.16** **Definition** Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen $V$ und $W$. Man nennt die Abbildung

$$\varphi^*\colon W^* \to V^* \quad \text{mit} \quad \varphi^*(\alpha) := \alpha \circ \varphi$$

die *duale Abbildung* zu $\varphi$.

**2.5.17** **Beispiel**. Wir betrachten die identische Abbildung $\mathrm{id}_V\colon V \to V$. Die duale Abbildung dazu ist die identische Abbildung auf $V^*$, denn es gilt

$$\mathrm{id}_V^*(\alpha) = \alpha \circ \mathrm{id}_V = \alpha$$

für alle $\alpha \in V^*$.

**2.5.18** **Satz.** *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung zwischen zwei $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Die duale Abbildung $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ ist $K$-linear.*

*Beweis.* Es seien $\alpha, \beta \in W^*$. Dann gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\alpha+\beta)(v) &= (\alpha+\beta)(\varphi(v)) && \text{(Def. von } \varphi^*\text{)}\\
&= \alpha(\varphi(v)) + \beta(\varphi(v)) && \text{(Def. von + in } W^*\text{)}\\
&= \varphi^*(\alpha)(v) + \varphi^*(\beta)(v) && \text{(Def. von } \varphi^*\text{)}\\
&= \big(\varphi^*(\alpha) + \varphi^*(\beta)\big)(v). && \text{(Def. von + in } V^*\text{)}
\end{aligned}$$

Da $v \in V$ beliebig war, schließen wir $\varphi^*(\alpha+\beta) = \varphi^*(\alpha) + \varphi^*(\beta)$.

Sei nun $a \in K$ beliebig. Dann gilt für alle $v \in V$

$$\varphi^*(a\alpha)(v) = (a\alpha)(\varphi(v)) = a\alpha(\varphi(v)) = a\varphi^*(\alpha)(v).$$

Daraus folgt $\varphi^*(a\alpha) = a\varphi^*(\alpha)$. Damit haben wir gezeigt, dass $\varphi^*$ eine $K$-lineare Abbildung ist. □

Der folgende Satz beschreibt, wie sich die Komposition von Abbildungen und die Dualisierung miteinander vertragen. In der Sprache der Kategorientheorie würde man sagen, dass die Dualisierung einen *kontravarianten Funktor* auf der Kategorie der $K$-Vektorräume definiert.

**2.5.19 Satz.** *Seien $U, V, W$ drei $K$-Vektorräume mit $K$-linearen Abbildungen $\psi\colon U \to V$ und $\varphi\colon V \to W$. Es gilt*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*.$$

*Beweis.* Für alle $\alpha \in W^*$ gilt

$$(\varphi\circ\psi)^*(\alpha) = \alpha \circ (\varphi \circ \psi) = (\alpha \circ \varphi) \circ \psi = \psi^*(\alpha \circ \varphi) = \psi^*(\varphi^*(\alpha)) = (\psi^* \circ \varphi^*)(\alpha);$$

dabei verwenden wir, dass die Komposition von Abbildungen assoziativ ist. Da $\alpha$ beliebig war, folgt daraus $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$. □

Wir wissen, dass man lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mithilfe der Matrixdarstellung beschreiben kann, sobald man geordnete Basen der Räume gewählt hat. Wir werden uns nun überlegen, wie die Darstellungsmatrix der dualen Abbildung bezüglich der entsprechenden Dualbasen aussieht.

**2.5.20 Satz.** *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen $K$-Vektorräumen. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$ und es sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von $W$.*

*Sind $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{C}^*$ die geordneten Dualbasen zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, dann gilt*

$${}_{\mathcal{B}^*}\mathrm{M}_{\mathcal{C}^*}(\varphi^*) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)^T.$$

<u>*Beweis*</u>. Sei ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})_{\substack{i\le m,\\ j\le n}}$, d.h., $a_{ij} \in K$ ist der Eintrag von ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ an der Stelle $(i, j)$. Es gilt also

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{2.5.c}$$

für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Genauso sei ${}_{\mathcal{B}^*}\mathrm{M}_{\mathcal{C}^*}(\varphi^*) = (b_{jk})_{\substack{j\le n\\ k\le m}}$. Es gilt also

$$\varphi^*(w_k^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j^* \tag{2.5.d}$$

für alle $k \in \{1, \dots, m\}$. Für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
b_{\ell k} &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j^*(v_\ell) \\
&= \varphi^*(w_k^*)(v_\ell) && \text{(2.5.d)} \\
&= (w_k^* \circ \varphi)(v_\ell) = w_k^*(\varphi(v_\ell)) && \text{(Def. duale Abb.)} \\
&= w_k^*\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} w_i\Big) && \text{(2.5.c)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} w_k^*(w_i) = a_{k\ell}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $b_{\ell k} = a_{k\ell}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \in \{1, \dots, n\}$ folgt nun

$${}_{\mathcal{B}^*}\mathrm{M}_{\mathcal{C}^*}(\varphi^*) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)^T. \qquad \square$$

## 2.7. Lösungen der Aufgaben in Kurseinheit 2

**L2.1.8** **Lösung.** Es sei $M$ eine Menge mit einer Totalordnung $\preceq$. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion nach $k$. Für den Induktionsanfang $k = 1$ setzen wir $j = 1$ und es gilt $x_1 \preceq x_1$.

Sei nun $k > 1$ und seien $x_1, \ldots, x_k \in M$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Index $j_1 \leq k-1$, sodass

$$x_i \preceq x_{j_1} \tag{2.7.a}$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ gilt. Falls $x_k \preceq x_{j-1}$ ist, setzen wir $j = j_1$ und sind fertig. Anderenfalls muss $x_{j_1} \preceq x_k$ sein, denn $\preceq$ ist eine Totalordnung. In diesem Fall definieren wir $j = k$. Für $i \leq k-1$ erhalten wir

$$x_i \preceq x_{j_1} \preceq x_k$$

aus (2.7.a) durch Transitivität und $x_k \preceq x_k$ folgt aus der Reflexivität.

**L2.2.6** **Lösung.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ eine nicht-leere Teilmenge.

*Behauptung:* $U$ ist genau dann ein Unterraum, wenn

$$au + u' \in U \tag{2.7.b}$$

für alle $a \in K$ und $u, u' \in U$ gilt.

Nehmen wir zunächst an, dass $U$ ein Unterraum ist. Dann gilt für alle $a \in K$ und $u, u' \in U$ auch $au \in U$ (wegen 2.2.4 (c)) und durch 2.2.4 (b) auch $au + u' \in U$.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $U$ die Bedingung (2.7.b) erfüllt. Wir überlegen uns, dass $U$ den Nullvektor enthält. Da $U$ nicht-leer ist, gibt es mindestens einen Vektor $w \in U$. Also gilt

$$0 = -w + w = (-1)w + w \in U.$$

Mit $a = 1$ folgt aus (2.7.b), dass $U$ unter Addition abgeschlossen ist, d.h. 2.2.4 (b) ist erfüllt. Mit $u' = 0$ und $a$ beliebig, sehen wir, dass $U$ unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, d.h., 2.2.4 (c) ist erfüllt.

**L2.2.9** **Lösung.** Wir schreiben die Vektoren als Spalten in eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{6} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{F}_7)$$

und berechnen dann den Rang mit dem Gauß-Verfahren.

Wir ziehen das zweifache der ersten Zeile jeweils von der zweiten und vierten Zeile ab und wir addieren die erste zur dritten Zeile. Dann erhalten wir

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Addiert man die zweite Zeile zur dritten, dann gelangt man zur Matrix

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Hier ist abzusehen, dass die Treppennormalform zwei nicht-verschwindende Zeilen besitzt, d.h., es ist $\mathrm{Rg}(A) = 2$. Die Vektoren sind also linear abhängig.

L2.2.18 **Lösung.** Sei $\varphi\colon U \to V$ eine Abbildung zwischen zwei $K$-Vektorräumen.

Wir nehmen an, dass für alle $u_1, u_2 \in U$ und alle $a \in K$ die Gleichung (2.2.a) gilt. Setzt man $a = 1$, dann erhält man (L1). Mit allgemeinem $a \in K$ und $u_2 = 0$ erhält man (L2). Also ist $\varphi$ linear.

Nehmen wir umgekehrt an, dass $\varphi$ linear ist. Mit (L1) und (L2) erhalten wir für alle $u_1, u_2 \in U$ und $a \in K$

$$\varphi(au_1 + u_2) = \varphi(au_1) + \varphi(u_2) = a\varphi(u_1) + \varphi(u_2).$$

L2.3.3 **Lösung.** *Behauptung*: $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

Wir zeigen die Gleichheit, indem wir zeigen, dass diese Unterräume sich gegenseitig enthalten.

Alle Linearkombinationen von Elementen aus $S$ liegen auch in $\langle S \cup T \rangle$, d.h., $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$. Genauso gilt auch $\langle T \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$. Da $\langle S \cup T \rangle$ ein Unterraum ist (also unter Addition abgeschlossen ist), folgt

$$\langle S \rangle + \langle T \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle.$$

Sei umgekehrt $v \in \langle S \cup T \rangle$. Das heißt, es gibt Elemente $v_1, \ldots, v_n \in S \cup T$ und Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Durch Umsortieren der Vektoren können wir annehmen, dass $v_1, \ldots, v_k \in S$ und $v_{k+1}, \ldots, v_n \in T$ für ein $0 \leq k \leq n$ gilt. Daraus schließen wir

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i \in \langle S \rangle + \langle T \rangle;$$

also $\langle S \cup T \rangle \subseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

L2.3.10 **Lösung.** Wir zeigen, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Es sei $x \in U_1 \cap U_2$. Da $x \in U_2$ ist, gilt $x_1 = 0 = x_3$. Daraus folgt

$$x_2 = -x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_4 = -x_3 = 0$$

und insgesamt $x = 0$.

L2.3.11 **Lösung.** Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ die disjunkte Vereinigung von Teilmengen $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ist und wollen zeigen, dass

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle \mathcal{B}_i \rangle$$

gilt. Da $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist, sehen wir mit Aufgabe 2.3.3, dass

$$\sum_{i=1}^{k} \langle \mathcal{B}_i \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle = V$$

ist. Wir prüfen mit 2.3.6 (iii), dass die Summe direkt ist. Es seien dazu Vektoren $u_i \in \langle \mathcal{B}_i \rangle$ mit $\sum_{i=1}^{k} u_i = 0$ gegeben. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ schreiben wir

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} v_{ij}$$

als Linearkombination paarweise verschiedener Basisvektoren $v_{ij} \in \mathcal{B}_i$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{k} u_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} v_{ij}.$$

Da die Vereinigung der $\mathcal{B}_i$ disjunkt ist, kommt jeder Basisvektor aus $\mathcal{B}$ höchstens einmal in der Summe vor. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, folgt nun $a_{ij} = 0$ für alle $i, j$ und damit $u_i = 0$ für alle $i$. Damit ist die Summe direkt.

L2.3.13 **Lösung.** Gegeben sind $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ und $W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit der Eigenschaft $\varphi(V_i) \subseteq W_i$.

Wir behaupten, dass
$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Ker}(\varphi|_{V_i})$$
gilt.

Sei dazu $v = \sum_{i=1}^k v_i \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ mit $v_i \in V_i$. Es gilt
$$0 = \varphi(v) = \sum_{i=1}^k \underbrace{\varphi(v_i)}_{\in W_i}.$$

Da $W$ die direkte Summe der Unterräume $W_i$ ist, gilt somit $\varphi(v_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Damit ist $\operatorname{Ker}(\varphi) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Ker}(\varphi|_{V_i})$.

Warum ist die Summe direkt? Da die Summe der Unterräume $V_i$ direkt ist, gilt mit Satz 2.3.6 für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$
$$\operatorname{Ker}(\varphi|_{V_i}) \cap \sum_{i' \neq i} \operatorname{Ker}(\varphi|_{V_{i'}}) \subseteq V_i \cap \sum_{i' \neq i} V_{i'} = \{0\}$$
und aus Satz 2.3.6 folgt wieder, dass auch die Summe der Kerne direkt ist.

L2.3.18 **Lösung.** Es seien $V_1, V_2$ zwei $K$-Vektorräume und es sei $\varphi\colon V_1 \to V_2$ eine surjektive $K$-lineare Abbildung. Wir wählen ein Komplement $W$ zu $\operatorname{Ker}(\varphi)$ in $V_1$, d.h.,
$$V_1 = W \oplus \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Wir behaupten, dass $\varphi|_W$ – die Einschränkung von $\varphi$ auf $W$ – ein Isomorphismus von $W$ und $V_2$ ist. Wegen $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap W = \{0\}$ ist $\varphi|_W$ injektiv. Es sei $v_2 \in V_2$ beliebig. Da $\varphi$ surjektiv ist, finden wir ein $v_1 \in V_1$ mit $\varphi(v_1) = v_2$. Wir schreiben nun
$$v_1 = w + u$$
mit $w \in W$ und $u \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Dann erhalten wir
$$v_2 = \varphi(v_1) = \varphi(w) + \underbrace{\varphi(u)}_{=0} = \varphi(w);$$
d.h., $\varphi|_W$ ist surjektiv.

Insgesamt ist $\varphi|_W$ also bijektiv und $K$-linear und damit ein Isomorphismus von Vektorräumen. Nach 8.1.8 in [MG] ist auch die Umkehrabbildung $\psi := (\varphi|_W)^{-1}$ ein Isomorphismus. Fassen wir $\psi$ als Abbildung nach $V_1$ auf, so gilt

$$\varphi \circ \psi = \varphi \circ (\varphi|_W)^{-1} = \varphi|_W \circ (\varphi|_W)^{-1} = \mathrm{id}_{V_2},$$

weil $(\varphi|_W)^{-1}$ nur Werte in $W$ annimmt. Damit ist $\psi$ die gesuchte rechtsinverse Abbildung zu $\varphi$.

L2.4.1 **Lösung.** Gegeben sind die beiden Geraden

$$G_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} -2+s \\ 2+s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Addieren wir einen zwei beliebige Punkte aus $G_1$ und $G_2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -2+s \\ 2+s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+(s+t) \\ 2+(s+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (s+t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $s+t$ jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annimmt erhalten wir

$$G_1 + G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + U.$$

L2.5.2 **Lösung.** Wir zeigen, dass $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$ ist. Wir bemerken zunächst, dass die Addition und Skalarmultiplikation auf beiden Räumen jeweils punktweise definiert wurden und es sich damit um dieselben Verknüpfungen handelt.

Nun verwenden wir das Kriterium aus Aufgabe 2.2.6. Sind $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $b \in K$, dann prüfen wir nach, dass auch $\varphi + b\psi$ linear. Zuerst stellen wir fest, dass für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (\varphi + b\psi)(v_1 + v_2) &= \varphi(v_1+v_2) + b\psi(v_1+v_2) \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + b\psi(v_1) + b\psi(v_2) \qquad (\varphi, \psi \text{ linear}) \\ &= (\varphi + b\psi)(v_1) + (\varphi + b\psi)(v_2). \end{aligned}$$

Für alle $v \in V$ und $a \in K$ gilt außerdem

$$(\varphi + b\psi)(av) = \varphi(av) + b\psi(av) = a\varphi(v) + ab\psi(v) = a(\varphi + b\psi)(v).$$

Also ist $\varphi + b\psi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$.

**L2.5.7 Lösung.** In der Praxis ist es ganz einfach, auch wenn es im Beweis von Lemma 2.5.6 kompliziert scheint, eine entsprechende Linearform zu finden. Der zweite Eintrag des Vektors $v = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{3} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_7^3)^*$ ist $\overline{3} \neq 0$. Daher hat Projektion auf die zweite Koordinate, also die Linearform $\alpha \colon \mathbb{F}_7^3 \to \mathbb{F}_7$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2,$$

die Eigenschaft $\alpha(v) = \overline{3} \neq 0$.

**L2.5.15 Lösung.** Zur Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wollen wir die Dualbasis $v_1^*, v_2^*, v_3^*$ durch die Zeilenvektoren $E(v_1^*), E(v_2^*), E(v_3^*)$ beschreiben. Wir verwenden das Verfahren aus 2.5.13. Dazu bilden wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Spalten $v_1, v_2, v_3$ und berechnen die inverse Matrix $A^{-1}$ mit dem bekannten Verfahren aus [MG, 4.5.6]. Wir schreiben

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und ziehen die erste von der dritten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dann addieren wir 4 mal die zweite zur letzten Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Schließlich multiplizieren wir die zweite Zeile mit $-1$ und haben die Inverse bestimmt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bilder der Dualbasis $E(v_1^*), E(v_2^*), E(v_3^*)$ sind nun genau die Zeilen der Matrix $A^{-1}$; also

$$E(v_1^*) = (1, 0, 0), \quad E(v_2^*) = (0, -1, 0), \quad E(v_3^*) = (-1, 4, 1).$$

**L2.6.5** **Lösung.** Für $z, w \in \mathbb{C}^\times$ schreiben wir $z \smile w$, wenn es eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}^\times$ mit $rz = w$ gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation:

*reflexiv:* Sei $z \in \mathbb{C}^\times$. Für die reelle Zahl $r = 1$ gilt $1 \cdot z = z$ und damit $z \smile z$.

*symmetrisch:* Seien $z, w \in \mathbb{C}^\times$ mit $z \smile w$. Es gibt also eine Zahl $r \in \mathbb{R}^\times$ mit $rz = w$. Da $r \neq 0$ gilt, besitzt $r$ ein multiplikatives Inverses $r^{-1}$. Es gilt $z = r^{-1}w$ und damit $w \smile z$.

*symmetrisch:* Seien $z, w, s \in \mathbb{C}^\times$ mit $z \smile w$ und $w \smile s$ gegeben. Es gibt also reelle Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^\times$ mit $r_1 z = w$ und $r_2 w = s$. Es gilt also auch $r_2 r_1 z = r_2 w = s$ Da $\mathbb{R}^\times$ eine Gruppe bzgl. Multiplikation ist (siehe 1.1.10), gilt $r = r_2 r_1 \in \mathbb{R}^\times$ und damit $z \smile s$.

**L2.6.9** **Lösung.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Für $x, y \in V$ schreiben wir $x \sim_U y$, wenn $x - y$ in $U$ liegt. Wir zeigen nun, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

*reflexiv:* Der Nullvektor $0$ liegt in $U$. Für alle $x \in V$ gilt $0 = x - x$ und somit $x \sim_U x$.

*symmetrisch:* Seien $x, y \in V$ mit $x \sim_U y$ gegeben. Es gilt damit $x - y = u \in U$. Da $U$ ein Unterraum ist, liegt auch $-u \in U$. Das heißt, $y - x = -u \in U$ und damit gilt $y \sim_U x$.

*transitiv:* Seien $x, y, z \in V$ mit $x \sim_U y$ und $y \sim_U z$ gegeben. Es gilt also $x - y = u \in U$ und $y - z = u' \in U$. Dann gilt auch

$$x - z = x - y + y - z = u + u' \in U,$$

denn $U$ ist ein Unterraum und damit unter Addition abgeschlossen.

Was sind die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation? Es gilt

$$[x]_{\sim_U} = \{x + u \mid u \in U\} = x + U.$$

Die Äquivalenzklasse von $x$ ist also genau der affine Unterraum zu $U$ durch den Punkt $x$; siehe 2.4.2.

# Literaturverzeichnis


[Bär] C. Bär. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer Spektrum, Berlin, 2018.

[Beu] A. Beutelspacher. *Lineare Algebra*. Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2014. 8. Auflage.

[Bo] S. Bosch. *Lineare Algebra*. Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2021. 6. Auflage.

[Can95] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Art. I. *Math. Ann.*, 46:481–512, 1895. doi:10.1007/BF02124929.

[Fi] G. Fischer and B. Springborn. *Lineare Algebra*. Grundkurs Mathematik. Springer-Verlag, Berlin, 2020. 19. Auflage.

[Fis17] G. Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2017. 4. Auflage.

[Gö] L. Göllmann. *Lineare Algebra*. Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2020. 2. Auflage.

[Jec03] T. Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[KaSt] C. Karpfinger and H. Stachel. *Lineare Algebra*. Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2020.

[Kne50] H. Kneser. Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom. *Math. Z.*, 53:110–113, 1950. doi:10.1007/BF01162404.

[Lew91] J. Lewin. A simple proof of Zorn's lemma. *Amer. Math. Monthly*, 98(4):353–354, 1991. doi:10.2307/2323807.

[LM11] A. Langville and C. Meyer. *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, 2011.

[MG] L. Unger. *Mathematische Grundlagen*. FernUniversität in Hagen, 2020.

# Symbolverzeichnis

# Index