

Prof. Dr. Franz Locher, apl. Prof. Dr. Michael Skrzipek

Modul 61515

Mathematische Grundlagen von Multimedia

LESEPROBE

Fakultät für
**Mathematik und
Informatik**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
0 Töne, Klänge, Geräusche	7
1 Periodizität und Fourier-Reihen	11
1.1 Trigonometrische Funktionen und die Exponentialfunktion	11
1.2 Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen	14
1.3 Das Faltungsintegral und das Gibbs'sche Phänomen	38
2 Nichtperiodische Vorgänge und die Fourier-Transformation	43
2.1 Nichtperiodische Vorgänge und die Fourier-Transformation	43
2.2 Die Plancherel-Identität	62
3 Trigonometrische Interpolation	67
3.1 Trigonometrische Interpolation	67
3.2 Schnelle Fourier-Transformation - FFT	87
3.3 Schnelle Kosinustransformation - DCT	96
4 Kardinale sinc-Interpolation und das Abtasttheorem	103
4.1 Kardinale sinc-Interpolation und das Abtasttheorem	103
5 Digitalisierung analoger Signale	113
5.1 Digitalisierung analoger Signale	113
6 Periodische Vorgänge – Schwingungen und Wellen	121
6.1 Periodische Vorgänge – Schwingungen und Wellen	121
7 Gedämpfte Schwingungen und Resonanz	135
7.1 Gedämpfte Schwingungen und Resonanz	135
8 Mathematik des Hörens	147
8.1 Das Ohr als harmonischer Analysator und seine Leistungsfähigkeit	147
8.2 Das Unschärfeprinzip in der Musik	150
8.3 Der Audio Datenstrom	162
9 Mathematik des Sehens	165
9.1 Die physiologische Auflösung	165
9.2 Die physiologische Auflösung des Auges	166
9.3 Bildbearbeitung durch digitale Filterung	173
9.4 Tensorierung	189

10 Kodierung und Komprimierung	201
10.1 Einleitung	201
10.2 Alphabete	202
10.3 Graphen und Bäume	204
10.4 Stochastische Grundlagen	209
10.5 Informationsgehalt	212
10.6 Verbundquellen	219
10.7 Die Markovsche Entropie	225
10.8 Der LZW-Algorithmus	227
10.9 Shannon-Fano-Kodierung	232
10.10 Huffman-Kodierung	233
10.11 Das ultimative Komprimierungstool	235
Literaturverzeichnis	237

Leseprobe

Vorwort

Über diesen Kurs – Mathematische Modellbildung

Dieser Kurs ist ein Beispiel für die sogenannte *Mathematische Modellbildung* – einen Teilbereich der Mathematik, der an ihrem „Rand“ zu Nachbardisziplinen angesiedelt ist und auch in diese hineinreicht. Es geht dabei immer darum, eine Fragestellung, die außerhalb des Kernbereichs der Mathematik liegt, mathematisch zu beschreiben, „zu mathematisieren“, in Formeln zu fassen. Man erhält so ein *Modell* eines Phänomens, das dem „wirklichen Leben“ entstammt. Ein Modell ist aber in aller Regel nur eine Approximation an das eigentliche Phänomen.

Ein Beispiel: Im Vermessungswesen (Geodäsie) spielen Dreiecke eine grundlegende Rolle. Kleine Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man als eben ansehen, ohne meßbare Fehler zu machen. Das mathematische Modell benutzt dann ebene Dreiecke mit ihrer Theorie (Kongruenzsätze), wie man sie aus der Schule kennt. Große reale Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man aber nicht mehr als eben ansehen, sondern man muß sie als Teile einer Kugeloberfläche betrachten, um nicht zu große Fehler zu machen. Zu deren Beschreibung braucht man andere mathematische Hilfsmittel (Sphärische Trigonometrie), die aber so sind, daß sie für kleine Dreiecke wieder in die einfache Dreieckslehre übergehen. Tatsächlich ist die Erdoberfläche aber keine Kugeloberfläche, sondern „abgeplattet“. Wenn man mit noch höherer Exaktheit arbeiten will, muß man auch diese Abweichungen von der Kugeloberfläche berücksichtigen.

Man sieht also, daß die gewünschte Genauigkeit im Sinne einer gewünschten Approximation des realen Phänomens und seines mathematischen Problems die Modellierung entscheidend beeinflusst. Je genauer man sein will, umso komplizierter wird die Beschreibung und meist auch die Mathematik, die man einsetzen muß. Man kennt eben die „wahren“ Gleichungen nicht, die ein Problem beschreiben – oder es kann sinnvoll sein, Parameter, die in einer konkreten Situation nur einen geringen Einfluß haben, zu vernachlässigen. So steht die Mathematik mit ihren Methoden in engem wechselseitigem Kontakt zu ihren „Auftraggebern“ aus den Anwendungsbereichen (Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Medizin, Sozialwissenschaften, ...). Man muß sich stets darüber im Klaren sein, daß ein außermathematisches Problem nur approximativ durch die Modellierung erfaßt wird, aber die Genauigkeit sollte so gut sein, daß sie vorgegebenen Genauigkeitsansprüchen genügt, oder zumindest sollte man die Fehlertoleranzen im Griff haben. Für einen Parameterbereich kann das eine Modell (ebene Geometrie), für einen anderen Parameterbereich das andere Modell (Kugelgeometrie) und für einen dritten Parameterbereich gar das „abgeplattete“ Kugelmodell das richtige sein. Dies läßt sich nur durch Rückgriff auf das ursprüngliche Problem entscheiden, indem man beispielsweise Resultate, die man „durch Rechnung“ innerhalb des mathematischen Modells gefunden hat, mit den entsprechenden Größen des realen Problems vergleicht. Besonders kritisch ist oft der Übergangsbereich zwischen verschiedenen Modellen für ein Phänomen, weil zunächst vielleicht nicht so evident ist, welches Modell das angemessene ist.

Ein zweites Beispiel: Bewegungen im täglichen Leben lassen sich mit Hilfe der Newtonschen Mechanik modellieren, die ein gutes Modell für die hier vorliegenden Geschwindigkeiten und die geforderte Genauigkeit ist. Bei den hohen Geschwindigkeiten (in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit) in der Atomphysik und der Astrophysik muß man dagegen die Einsteinsche Relativitätstheorie als Ersatzmodell für die Newtonsche Mechanik heranziehen. Wann welches Modell das geeignetere ist, entscheiden die gewünschten Genauigkeitsansprüche. So funktionieren die satellitengestützten Ortungssysteme (GPS oder das Konkurrenzprodukt Galileo) nur, indem man Einstein heranzieht, obwohl die vorkommenden Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen; hier ist die Genauigkeit so hoch, daß „klassisch“ nach Newton eine meßbar falsche Position errechnet wird, die den Grund in einer relativistischen Zeitdilatation hat.

Wir werden in diesem Kurs Phänomene modellieren, die aus der Physiologie stammen – akustische oder optische Vorgänge. Die Beurteilung, ob ein Modell gut oder schlecht ist, könnte man durch physikalische Messungen durchführen. Da wir aber eigentlich nur an der Güte interessiert sind, die unsere Sinnesorgane anzeigen, werden wir Genauigkeitsschranken an Hand der in unserem Gehör oder in den Augen feststellbaren Unterschiede formulieren. Die Meßinstrumente sind unsere Sinnesorgane. Dabei kann es vorkommen, daß die Fehlertoleranz, die unsere Sinnesorgane tolerieren, um mehrere Zehnerpotenzen oberhalb derjenigen liegt, die mit physikalischen Meßmethoden erkannt werden kann. Dazu kommt, daß die Sinnesorgane eher *qualitativ* als exakt quantitativ beurteilen: Ob ein Foto als „scharf“ wahrgenommen oder ein Ton als „rein“ empfunden wird, ist sehr subjektiv, wobei die physikalischen Meßparameter (z.B. Frequenz), die in der physiologischen Wahrnehmung zu einer positiven Bewertung führen, über ein breites Band streuen können.

Was kommt in diesem Kurs auf Sie zu?

- ▷ Beschreibung und Analyse periodischer Vorgänge, beispielsweise Töne oder Klänge,
- ▷ Beschreibung und Analyse nichtperiodischer Vorgänge, beispielsweise Geräusche, zeitliche Ausschnitte aus periodischen Vorgängen, zeitlich abklingende (quasi-)periodische Vorgänge,
- ▷ Trigonometrische Interpolation zur Darstellung periodischer Vorgänge und die numerisch schnellen Algorithmen der FFT und der DCT,
- ▷ Kardinale sinc-Interpolation und das Abtasttheorem von Whittacker-Shannon-Kotelnikov,
- ▷ Digitalisierung analoger Signale,
- ▷ Schwingungen und Wellen – akustische Phänomene,
- ▷ Gedämpfte Schwingungen und Resonanz,
- ▷ Modellierung des Hörens,
- ▷ Modellierung des Sehens,
- ▷ Kodierung und Komprimierung von Daten.

Die Stoffauswahl ist sicher subjektiv gefärbt. Aber das Gesamtgebiet „Multimedia“ ist zu groß, um es in einem einzelnen Kurs mathematisch modellieren zu können. Es sind eher „Fallstudien“ zu einigen zentralen Teilen des Multimediabereichs entstanden. Damit soll dem Mathematikstudenten die Möglichkeit gegeben werden, mathematische Modellierung exemplarisch zu lernen; dem nichtmathematischen Anwender bietet sich andererseits die Möglichkeit, Mathematik für seine Probleme kennenzulernen.

In diesem Sinne!

Leseprobe

Leseprobe

0 Töne, Klänge, Geräusche

Für ein Verständnis von Geräten, die akustische Signale (Sprache, Musik) aufnehmen, verarbeiten, übertragen oder wiedergeben (Telefon, Hifi-Anlage, ...), benötigt man gewisse Kenntnisse aus der Akustik und der Physiologie der Tonerzeugung und Tonwahrnehmung. Akustische Vorgänge haben ihren Ursprung in Bewegungen von Luftteilchen, die das Sinnesorgan „Gehör“ aufnimmt, in elektrische Impulse umwandelt und an das Gehirn weiterleitet. Dabei findet eine „Verarbeitung“, d. h. eine Analyse nach Tonhöhe und Lautstärke, räumliche Trennung nach unterschiedlichen Tonquellen, Identifikation einer Tonquelle durch Vergleich mit bekannten und vom Gedächtnis gespeicherten Mustern, ... teilweise im Ohr und zum anderen Teil im Gehirn statt.

Am einfachsten zu beschreiben ist ein *Ton*, der aus einer periodischen Schwingung gleichbleibender *Frequenz* der Luftteilchen gegenüber einer Ruhelage (Schallwelle) besteht. Töne gleicher Frequenz können sich hinsichtlich ihrer *Amplitude* (Maximalausschlag) unterscheiden, die ein Maß für die *Lautstärke* ist. Für die Auslenkung $f(t)$ der Luftteilchen gegenüber der Ruhelage als Funktion der Zeit t gilt also (bei geeignetem gewähltem Koordinatensystem)

$$f(t) = a \sin(2\pi kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $a > 0$ die Amplitude, und die Frequenz k gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an. Ist die Einheit der Zeitskala 1 sec., so erhält man k in der (Pseudo-) Einheit Hz (Hertz). Es ist allerdings eine mathematische Fiktion, wenn man einen realen Ton als periodischen Vorgang beschreibt, da jeder irgendwie erzeugte Ton nur eine endliche Dauer hat. Ein realer Ton ist also ein zeitlich begrenzter Ausschnitt aus einem periodischen Vorgang. Damit man einen realen Ton als solchen wahrnimmt, muß er mindestens aus mehreren „vollen Schwingungsbögen“ bestehen, d. h. die *Tondauer* muß wesentlich größer als die Periodenlänge sein (Abb. 0.1).

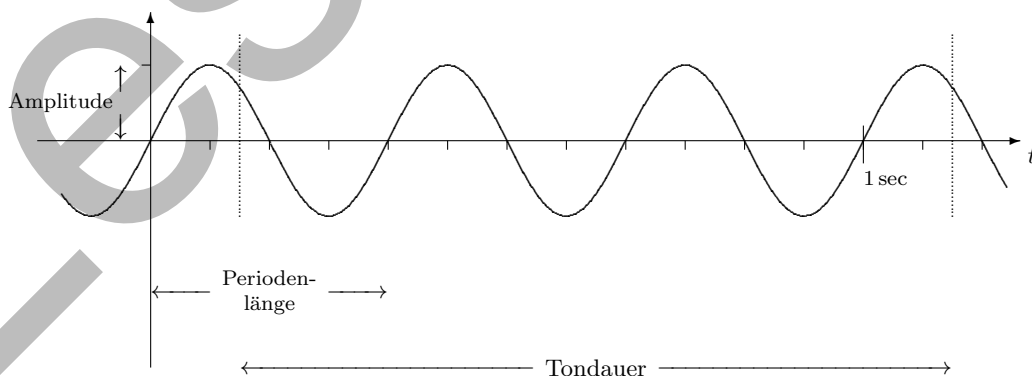


Abb. 0.1. Ton (Frequenz 3 Hz) und Tondauer (1 sec)

Sind mehrere Töne unterschiedlicher Amplituden a_i und Frequenzen k_i , $i = 1, 2, \dots$, überlagert, so spricht man von einem *Klang*, der also ebenfalls ein periodischer Vorgang ist und

sich gemäß

$$f(t) = a_1 \sin(2\pi k_1 t) + a_2 \sin(2\pi k_2 t) + \dots$$

beschreiben läßt (Abb. 0.2). Klänge spielen in der Musik eine fundamentale Rolle: Einerseits besteht die polyphone Musik (mehrstimmiger Chor, Orchester) aus der Überlagerung der Einzelstimmen, also aus Klängen (Akkorde). Zum anderen sind die von Menschen gesungenen oder mit Musikinstrumenten (Klavier, Geige, Orgel, ...) erzeugten Töne in Wirklichkeit Klänge, da dem erzeugten (und von der Partitur geforderten) Ton der Frequenz k sogenannte *Obertöne* mit Frequenzen $2k, 3k, \dots$, aber vergleichsweise kleinen Amplituden überlagert sind. Die durch die menschliche Anatomie oder die Bauart eines Musikinstruments bedingten Obertöne sind der Grund für die unterschiedliche *Klangfarbe* (Abb. 0.3). Diese ist die Ursache dafür, daß derselbe Ton auf dem Klavier anders als auf der Geige, auf der einen Orgel anders als auf der anderen Orgel klingt. Entzieht man der von einem Instrument erzeugten Musik durch Filterung die instrumentenspezifischen Obertöne, so klingt ein Klavier wie eine Trompete oder eine Geige. Mit Hilfe der Klangfarbe kann man also unterschiedliche Tonquellen identifizieren (auch Sänger oder Sprecher).

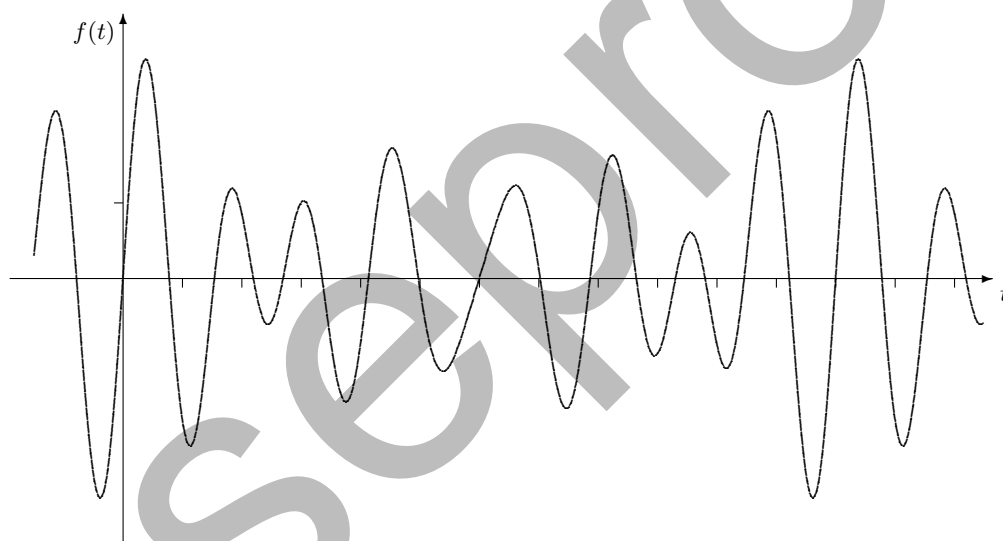


Abb. 0.2. Dreiklang c-f-g, $f(t) = \sin(2t) + \sin(\frac{8}{3}t) + \sin(3t)$

Wie reale Töne sind auch reale Klänge eine mathematische Fiktion hinsichtlich der Periodizität. Ein realer Klang hat ebenfalls eine endliche Dauer und entsteht somit durch Ausblendung aus einem periodischen Vorgang. Eine wichtige Kenngröße eines Klangs ist seine *Grenzfrequenz (Bandbreite)*, d. h. die maximale vorkommende Frequenz, da diese bei der *digitalen* Verarbeitung akustischer Signale (s.u.) eine fundamentale Rolle spielt.

Während Töne und Klänge periodische Vorgänge (oder real zumindest lange zeitliche Abschnitte periodischer Vorgänge) sind, spricht man von einem *Geräusch*, wenn der akustische Vorgang keine erkennbare Periodizität aufweist. Während sich Musik und die Bildung der Vokale mit der menschlichen Stimme adäquat mit Hilfe von Tönen und Klängen beschreiben lassen, trifft dies für die Konsonanten und die typischen „Umweltgeräusche“ (Windgeräusche, Motorenlärm, ...) nicht zu. Bei einem Geräusch sind sehr viele Frequenzen mit teilweise extrem kurzen Tondauern überlagert (Abb. 0.4).

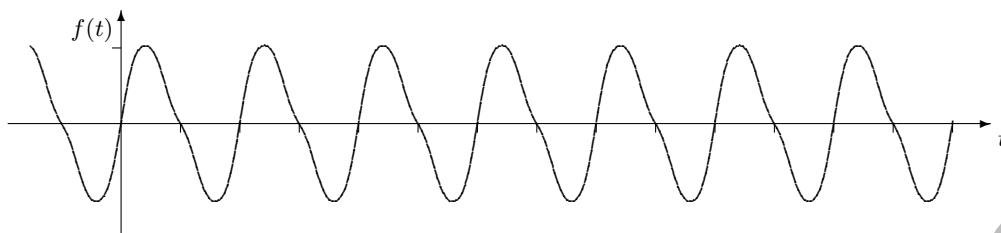


Abb. 0.3. Klangfarbe, $f(t) = \sin(2t) + \frac{1}{5} \sin(4t) + \frac{1}{25} \sin(8t)$

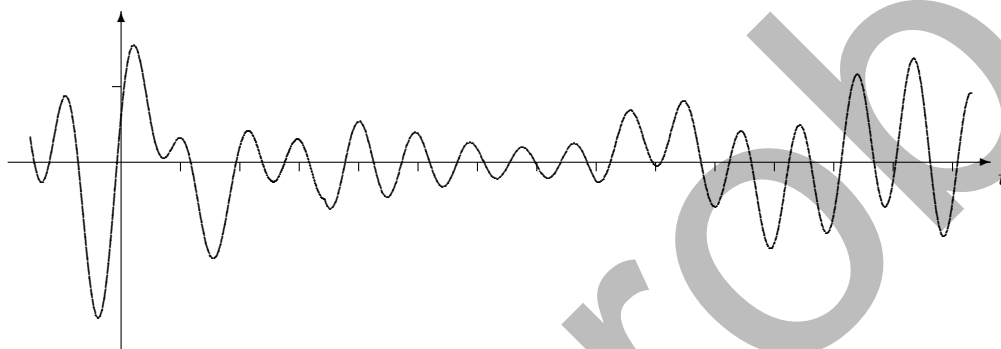


Abb. 0.4. Geräusch

Wichtig ist auch bei einem Geräusch die *Grenzfrequenz (Bandbreite)*, die maximal in ihm enthalten ist, da sie die *Abtastrate (sampling rate, s.u.)* bestimmt.

Für eine adäquate Dimensionierung von Geräten zur Verarbeitung akustischer Signale ist auch von Interesse, über welchen Bereich die vorkommenden Frequenzen streuen. Das menschliche Gehör kann — abhängig vom Lebensalter — Frequenzen von 16 Hz bis maximal 20 kHz wahrnehmen. Die *Hörgrenzen* liegen also bei ca. 16 Hz und 20 kHz, sie unterscheiden sich um etwas mehr als 10 Oktaven. Der Frequenzbereich unterhalb von 16 Hz wird als *Infra-schall*, derjenige oberhalb von 20 kHz als *Ultraschall* bezeichnet. Der letztere spielt in der Medizindiagnostik (Ultraschalluntersuchung) eine große Rolle.

Bei der *Erzeugung von Musik* mit Hilfe von Musikinstrumenten oder beim Gesang muß man zwischen den auf einem Musikinstrument oder beim Singen möglichen Grundtönen und den die Klangfarbe bestimmenden Obertönen unterscheiden. Der ungefähre *Tonumfang* bei den Grundtönen ist aus Abb. 0.5 ersichtlich. Man sieht, daß die Orgel den maximalen Tonumfang hat, der sich über 8 Oktaven erstreckt.

Beim Gesang wird die Melodie fast ausschließlich mit Hilfe der Vokale erzeugt (Ausnahme: Summen). Beim Sprechen — also auch beim Gesang — spielen aber auch die Konsonanten eine zentrale Rolle als Träger von Information. Um sie bilden zu können, sind (z. B. bei s, z, f, k) Frequenzen bis 10 kHz erforderlich. Aber die Sprache bleibt, wie man experimentell festgestellt hat, gut verständlich, wenn man — wie beim digitalen Telefon üblich — Frequenzen oberhalb von 3.4 kHz unterdrückt.

Das Ausblenden hoher Frequenzen im Hörbereich hat also in der Musik und beim Telefonieren unterschiedliche Auswirkungen: In der Musik ändert sich die Klangfarbe der Singstimmen und der Musikinstrumente, also insgesamt der Charakter des Musikstücks. Beim Telefonieren kann dagegen die Sprachverständlichkeit leiden, wenn zu tiefe Frequenzen ausgeblendet

Tonquelle	Ungefäher Tonbereich	
	Bezeichnung	Frequenz in Hz
Männerstimme bei ruhigem Sprechen	$g^{-1} - g$	96 – 192
Frauenstimme bei ruhigem Sprechen	$g - g^1$	192 – 384
Singstimme im Chorgesang		
für Baß	$c^{-1} - e^1$	64 – 320
für Tenor	$c - a^1$	128 – 427
für Alt	$f - e^2$	171 – 640
für Sopran	$c^1 - a^2$	256 – 853
für Koloratursängerin	$- c^4$	– 2048
Klavier	$a^{-3} - a^4$	27 – 3413
Violine	$g - a^3$	192 – 1707
Orgel	$c^{-3} - c^5$	16 – 4096
Hörbereich	$c^{-3} - e^7$	16 – 20480

Abb. 0.5. Tonbereiche der menschlichen Stimme und einiger Musikinstrumente

werden.

Insgesamt hat man folgende Konsequenzen gezogen, die teilweise durch internationale Vereinbarungen, zum anderen durch Industriestandards nachgehalten werden:

- Beim Telefon dürfen Frequenzen erst oberhalb von 3.4 kHz, neuerdings teilweise auch erst oberhalb von 7 kHz, unterdrückt werden.
- Im Audibereich sollen Frequenzen erst oberhalb von 15 kHz, meist erst oberhalb von 20 kHz, unterdrückt werden.

Beide Vorgaben bedingen unterschiedliche Mindestabtastraten, worauf wir an späterer Stelle zurückkommen werden.

1 Periodizität und Fourier-Reihen

1.1 Trigonometrische Funktionen und die Exponentialfunktion

Wir setzen voraus, daß der Leser weiß, wie man im Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen rechnet, was man unter Polarkoordinaten versteht und was die Konjugierte \bar{z} einer Zahl z ist. In der Analysis werden im Reellen die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und die Exponentialfunktion untersucht. Wir werden diese Funktionen auch im Komplexen behandeln. Dazu „setzen wir die im Reellen definierten Funktionen ins Komplexe fort“. Darunter hat man folgendes zu verstehen.

Bekanntlich konvergieren die Taylor-Reihen von Sinus, Kosinus und der Exponentialfunktion auf ganz \mathbb{R} , d.h. für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \quad \cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \exp(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}.$$

Da diese Reihen auf \mathbb{R} absolut konvergieren, konvergieren sie auch für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ absolut. Man erhält also durch die Festsetzungen

$$\sin z := \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \quad \cos z := \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ jeweils einen wohldefinierten Wert, also auf ganz \mathbb{C} definierte, komplexwertige Funktionen, wobei diese für reelles Argument mit den entsprechenden, aus der Analysis bekannten Funktionen übereinstimmen. Wir erwähnen, daß die aus dem Reellen bekannten Eigenschaften auch im Komplexen erhalten bleiben. So sind Sinus und Kosinus 2π -periodisch,

$$\begin{aligned} \sin(z + 2k\pi) &= \sin z, \\ \cos(z + 2k\pi) &= \cos z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

während die Exponentialfunktion den Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \exp(u + v) &= \exp(u) \cdot \exp(v), \\ [\exp(u)]^v &= \exp(uv), \quad u, v \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

genügt.

Die reellen Funktionen Sinus (\sin), Kosinus (\cos) und die Exponentialfunktion (\exp) haben sehr unterschiedliches Verhalten: \exp ist auf ganz \mathbb{R} monoton, während \sin und \cos periodisch sind. Die komplexen Funktionen \sin , \cos und \exp sind dagegen eng verwandt. Dies liegt am formal ähnlichen Aufbau der Taylor-Reihen. Für

$$\exp(iz) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{\nu} z^{\nu}}{\nu!}, \quad i^2 = -1,$$

folgt nämlich durch Umordnen, was wegen der absoluten Konvergenz der Reihe erlaubt ist,

$$\exp(iz) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{2\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^{2\nu+1} z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Man erhält somit die fundamentale *Eulersche Formel*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z.$$

Da \cos eine gerade und \sin eine ungerade Funktion ist, wie man an der Reihendarstellung erkennt, folgt

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z,$$

also durch Addition und Subtraktion der beiden Identitäten

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)). \end{aligned}$$

Setzt man $\eta := iz$, also $z = -i\eta$, so folgt auch

$$\exp(\eta) = \cos(i\eta) - i \sin(i\eta).$$

Wichtig sind die bekannten Differentiations- und Integrationsformeln.

1.1.1 Satz

Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \quad (\cos(z))' = -\sin(z),$$

$$(2) \quad (\sin(z))' = \cos(z),$$

$$(3) \quad (\exp(z))' = \exp(z),$$

$$(4) \quad \int^z \cos(t) dt = \sin(z) + \text{const},$$

$$(5) \quad \int^z \sin(t) dt = -\cos(z) + \text{const},$$

$$(6) \quad \int^z \exp(t) dt = \exp(z) + \text{const}.$$

Als Folgerung aus den Integrationsformeln erhält man mit Hilfe der Periodizität die wichtigen *Orthogonalitätsbeziehungen*.

1.1.2 Satz

Es gilt für $\nu, \mu \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \exp(i\nu t) \exp(-i\mu t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } \nu \neq \mu, \\ 1, & \text{falls } \nu = \mu, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin(\nu t) \sin(\mu t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } \nu \neq \pm\mu, \\ \pm 1, & \text{falls } \nu = \pm\mu, \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(\nu t) \cos(\mu t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } \nu \neq \pm\mu, \\ 1, & \text{falls } \nu = \pm\mu \neq 0, \\ 2, & \text{falls } \nu = \mu = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \int_a^{a+2\pi} \cos(\nu t) \sin(\mu t) dt = 0.$$

Beweis. (1) Mit Hilfe der Funktionalgleichung der exp-Funktion folgt für $\nu \neq \mu$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \exp(i\nu t) \exp(-i\mu t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \exp(i(\nu - \mu)t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(i(\nu - \mu)t)}{i(\nu - \mu)} \Big|_a^{a+2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen der 2π -Periodizität. Für $\nu = \mu$ erhält man

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \exp(i\nu t) \exp(-i\mu t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} dt = 1.$$

Die Fälle (2), (3) und (4) lassen sich mit Hilfe der Eulerschen Formeln auf (1) zurückführen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos(\nu t) \sin(\mu t) dt &= \int_a^{a+2\pi} \frac{\exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t)}{2} \cdot \frac{\exp(i\mu t) - \exp(-i\mu t)}{2i} dt \\ &= \frac{1}{4i} \int_a^{a+2\pi} \{ \exp(i(\nu + \mu)t) - \exp(i(\nu - \mu)t) + \exp(i(\mu - \nu)t) - \exp(-i(\nu + \mu)t) \} dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

wie man durch Anwendung von (1) sieht. □

1.1.3 Bemerkungen

- Statt 2π -periodischer Funktionen kann man für $T > 0$ allgemein T -periodische Funktionen f betrachten. Mit Hilfe der sogenannten *Kreisfrequenz*

$$\omega := \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

skalieren wir die t -Achse gemäß

$$\tau := \omega t, \quad t = \frac{\tau}{\omega}$$

und definieren für die T -periodische Funktion f die Funktion g durch

$$g(\tau) := f\left(\frac{\tau}{\omega}\right) = f(t).$$

Für diese gilt dann

$$g(\tau) = f(t) = f(t + T) = f\left(\frac{\tau}{\omega} + T\right) = f\left(\frac{\tau + \omega T}{\omega}\right) = f\left(\frac{\tau + 2\pi}{\omega}\right) = g(\tau + 2\pi).$$

Durch die obige Skalierung geht also die T -periodische Funktion f in die 2π -periodische Funktion g über und umgekehrt.

- Neben der Kreisfrequenz ist auch die reziproke *Periodendauer*

$$\nu := \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

von Bedeutung; man bezeichnet ν als *Frequenz* der T -periodischen Funktion f .

- Wir haben also folgenden Zusammenhang: Zu einer T -periodischen Funktion f gehören die Kreisfrequenz ω , Periodendauer T und Frequenz ν gemäß

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Zu der durch Skalierung gemäß

$$g := f\left(\frac{\cdot}{\omega}\right), \quad f = g(\omega \cdot),$$

erzeugten 2π -periodischen Funktion g gehören die Kreisfrequenz 1, Periodendauer 2π und Frequenz $\frac{1}{2\pi}$.

□

1.2 Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen

Die einfachsten 2π -periodischen Funktionen sind die Sinus- und Kosinus-Funktionen und deren Linearkombinationen.

1.2.1 Definition

Für $a_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0, \dots, n$, $b_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, n$, bezeichnet man die 2π -periodische Funktion $\mathcal{T}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

als *reelles trigonometrisches Polynom vom Grad n* .

1.2.2 Bemerkung

Mittels

$$\begin{aligned} \omega &:= \frac{2\pi}{T}, \quad T > 0, \\ \tau &:= \frac{T}{2\pi}, \quad \tau = \frac{1}{\omega} \iff 1 = \frac{2\pi}{T}\tau = \omega\tau, \\ \tilde{\mathcal{T}}_n &:= \mathcal{T}_n\left(\frac{2\pi}{T} \cdot\right) = \mathcal{T}_n(\omega \cdot), \end{aligned}$$

kann man statt 2π -periodischer allgemeiner T -periodische Funktionen beschreiben. Wir werden uns in diesem Abschnitt zunächst auf 2π -periodische Funktionen der Einfachheit wegen beschränken. An späterer Stelle werden aber allgemeiner T -periodische Phänomene betrachtet werden. \square

Wichtig ist, daß man die Koeffizienten a_ν, b_ν mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen entsprechend Satz 1.1.2 deuten kann.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \cos(\mu t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n [a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)] \right\} \cos(\mu t) dt \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\mu t) dt + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{a_\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\nu t) \cos(\mu t) dt + \frac{b_\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\nu t) \cos(\mu t) dt \right\} \\ &= a_0 \delta_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \delta_{\nu \mu} \\ &= a_\mu, \quad \mu = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt mit Satz 1.1.2

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \sin(\mu t) dt = b_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Wir halten fest.

1.2.3 Satz

Für die Koeffizienten eines reellen trigonometrischen Polynoms \mathcal{T}_n ,

$$\mathcal{T}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

gilt

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \cos(\mu t) dt, \quad \mu = 0, \dots, n,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \sin(\mu t) dt, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Die Orthogonalitätsbeziehungen liefern auch die sogenannte *Energie* eines trigonometrischen Polynoms. Wir werden später sehen, daß der Ausdruck

$$E := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{T}_n(t)]^2 dt}$$

ein Maß für die mittlere Energie eines 2π -periodischen Vorgangs ist. Man erhält unter Beachtung, daß die gemischten Terme bei der Integration Null ergeben,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \mathcal{T}_n(t) dt = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n [a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)] \right\} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^n [a_\mu \cos(\mu t) + b_\mu \sin(\mu t)] \right\} dt \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a_0^2}{4} + \sum_{\nu=1}^n [a_\nu^2 [\cos(\nu t)]^2 + b_\nu^2 [\sin(\nu t)]^2] \right\} dt. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(\nu t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(\nu t)]^2 dt = \frac{1}{2}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

erhält man schließlich

$$E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{T}_n(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^n [a_\nu^2 + b_\nu^2] \right\}.$$

Wir halten fest.

1.2.4 Satz

Für die Energie

$$E := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{T}_n(t)]^2 dt}$$

eines trigonometrischen Polynoms \mathcal{T}_n ,

$$\mathcal{T}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

gilt

$$E^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^n [a_\nu^2 + b_\nu^2] \right\}.$$

Die naheliegende Frage, wieso man \mathcal{T}_n als trigonometrisches „Polynom“ bezeichnet, findet ihre Antwort mit Hilfe der Eulerschen Formeln. Mit

$$\begin{aligned} \cos(\nu t) &= \frac{1}{2} \{ \exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t) \}, \\ \sin(\nu t) &= \frac{1}{2i} \{ \exp(i\nu t) - \exp(-i\nu t) \} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{2} [\exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t)] + \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu}{2i} [\exp(i\nu t) - \exp(-i\nu t)] \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left[\frac{a_\nu}{2} - \frac{b_\nu}{2i} \right] \exp(-i\nu t) + \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \left[\frac{a_\nu}{2} + \frac{b_\nu}{2i} \right] \exp(i\nu t) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu + ib_\nu}{2} \exp(-i\nu t) + \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu - ib_\nu}{2} \exp(i\nu t) \\ &= \sum_{\nu=-n}^{-1} \frac{a_{-\nu} + ib_{-\nu}}{2} \exp(i\nu t) + \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu - ib_\nu}{2} \exp(i\nu t). \end{aligned}$$

Geht man nun mittels $z = \exp(it)$ von der reellen Achse zum Einheitskreis der komplexen z -Ebene über, so folgt

$$\begin{aligned} t_n(z) &:= \mathcal{T}_n(t) \\ &= \sum_{\nu=-n}^{-1} \frac{a_{-\nu} + ib_{-\nu}}{2} z^\nu + \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu - ib_\nu}{2} z^\nu. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &:= \frac{a_0}{2}, \\ \alpha_{-\nu} &:= \frac{a_\nu + ib_\nu}{2} \\ \alpha_\nu &:= \frac{a_\nu - ib_\nu}{2} \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, n, \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2\alpha_0, \\ a_\nu &= \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}, \\ b_\nu &= i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}) \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, n,$$

so gilt wegen $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ offensichtlich

$$\alpha_{-\nu} = \overline{\alpha_\nu}, \quad \nu = 0, \dots, n.$$

Man erhält somit die Darstellung

$$t_n(z) = \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu z^\nu, \quad \alpha_{-\nu} = \overline{\alpha_\nu},$$

also ein sogenanntes *Laurent-Polynom* (in Anklang an die sogenannten *Laurent-Reihen* der Funktionentheorie); schließlich ist p_n ,

$$\begin{aligned} p_n(z) := z^n t_n(z) &= \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu z^{\nu+n} \\ &= \sum_{\nu=0}^{2n} \alpha_{\nu-n} z^\nu \end{aligned}$$

ein „echtes“ Polynom vom Grad $2n$. Wir halten fest.

1.2.5 Satz

Ein reelles trigonometrisches Polynom \mathcal{T}_n ,

$$\mathcal{T}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

hat mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &:= \frac{a_0}{2}, \\ \alpha_{-\nu} &:= \frac{a_\nu + ib_\nu}{2} \\ \alpha_\nu &:= \frac{a_\nu - ib_\nu}{2} \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2\alpha_0 \\ a_\nu &= \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}, \\ b_\nu &= i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}) \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, n$$

die äquivalente Darstellung als komplexes Exponentialpolynom

$$\mathcal{T}_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu \exp(i\nu t)$$

sowie mit $z = \exp(it)$ als *Laurent-Polynom*

$$t_n(z) = \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu z^\nu;$$

schließlich ist p_n ,

$$p_n(z) = z^n t_n(z) = \sum_{\nu=0}^{2n} \alpha_{\nu-n} z^\nu,$$

ein („gewöhnliches“) algebraisches Polynom.

Für spätere Anwendungen ist die Frage wichtig, wieviele Nullstellen ein trigonometrisches Polynom in einem Periodenintervall besitzt.

1.2.6 Satz

Ein trigonometrisches Polynom \mathcal{T}_n ,

$$\mathcal{T}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

besitzt in einem halboffenen Intervall $[a, a + 2\pi)$, $a \in \mathbb{R}$, höchstens $2n$ Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt.

Beweis. Die Nullstellen von p_n auf dem Einheitskreis entsprechen eindeutig Nullstellen von \mathcal{T}_n im Intervall $[0, 2\pi)$. Da p_n den Grad $2n$ hat, hat p_n genau $2n$ komplexe Nullstellen mit Vielfachheit gezählt und somit auf dem Einheitskreis höchstens $2n$ Nullstellen mit Vielfachheit gezählt. Also hat \mathcal{T}_n im Intervall $[0, 2\pi)$ höchstens $2n$ Nullstellen und wegen der 2π -Periodizität höchstens $2n$ Nullstellen in einem Intervall $[a, a + 2\pi)$, $a \in \mathbb{R}$, jeweils mit Vielfachheit gezählt. \square

Die Tatsache, daß man für ein trigonometrisches Polynom \mathcal{T}_n ,

$$\mathcal{T}_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\},$$

die Koeffizienten a_ν, b_ν als Integrale

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \cos(\nu t) dt, \quad \nu = 0, \dots, n,$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(t) \sin(\nu t) dt, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

erhält, gibt Anlaß, für eine „beliebige“ 2π -periodische Funktion f die entsprechenden Integrale

$$a_\nu := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(\nu t) dt, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_\nu := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\nu t) dt, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

zu betrachten und dann die sogenannte zugehörige *Fourier-Reihe*

$$(\mathcal{F}_p(f))(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{\nu} \cos(\nu t) + b_{\nu} \sin(\nu t)\}$$

zu bilden.

Die Bezeichnung \mathcal{F}_p bezieht sich auf den sogenannten *inversen* (auch *Synthese-*) *Fourier-Operator*. Dieser ordnet den beiden Folgen $(a_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}_0}$, $(b_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ und damit mittelbar der 2π -periodischen Funktion f die – zunächst formal gebildete, also ohne Rücksicht auf Konvergenzprobleme – 2π -periodische Funktion $\mathcal{F}_p(f)$ zu gemäß

$$\mathcal{F}_p(f) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{\nu} \cos(\nu \cdot) + b_{\nu} \sin(\nu \cdot)\}.$$

Ist f integrierbar, so existieren die Koeffizienten a_{ν} , $\nu = 0, 1, \dots$, b_{ν} , $\nu = 1, 2, \dots$. Die Eulerschen Formeln legen es nahe, *komplexe* Fourier-Koeffizienten

$$c_{\nu} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

zu betrachten. Aus

$$a_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t)}{2} dt, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\exp(i\nu t) - \exp(-i\nu t)}{2i} dt, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

folgt dann unmittelbar

$$a_{\nu} = c_{-\nu} + c_{\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_{\nu} = \frac{c_{-\nu} - c_{\nu}}{i}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Für $\nu = 0$ erhält man

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

und für $\nu = 1, 2, \dots$, folgt durch Addition bzw. Subtraktion

$$c_{-\nu} = \frac{a_{\nu} + ib_{\nu}}{2},$$

$$c_{\nu} = \frac{a_{\nu} - ib_{\nu}}{2}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Die Fourier-Reihe

$$(\mathcal{F}_p(f))(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{\nu} \cos(\nu t) + b_{\nu} \sin(\nu t)\}$$

geht mit Hilfe der Eulerschen Formeln über in

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}_p(f))(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ a_{\nu} \frac{\exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t)}{2} + b_{\nu} \frac{\exp(i\nu t) - \exp(-i\nu t)}{2i} \right\} \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{\nu} - ib_{\nu}}{2} \exp(i\nu t) + \frac{a_{\nu} + ib_{\nu}}{2} \exp(-i\nu t) \right\} \\
 &= c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{-\nu} \exp(-i\nu t) \\
 &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu t).
 \end{aligned}$$

Wir halten fest.

1.2.7 Satz

Definiert man die reellen bzw. komplexen Fourier-Koeffizienten einer integrierbaren 2π -periodischen Funktion f durch

$$\begin{aligned}
 a_{\nu} &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(\nu t) dt, \quad \nu = 0, 1, \dots, \\
 b_{\nu} &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\nu t) dt, \quad \nu = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

bzw. durch

$$c_{\nu} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

so gilt

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= 2c_0, \\
 a_{\nu} &= c_{-\nu} + c_{\nu} \\
 b_{\nu} &= \frac{c_{-\nu} - c_{\nu}}{i}
 \end{aligned} \right\} \nu = 1, 2, \dots \quad \iff \quad \left\{ \begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a_0}{2} \\
 c_{-\nu} &= \frac{a_{\nu} + ib_{\nu}}{2} \\
 c_{\nu} &= \frac{a_{\nu} - ib_{\nu}}{2}
 \end{aligned} \right\} \nu = 1, 2, \dots$$

sowie

$$(\mathcal{F}_p(f))(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{\nu} \cos(\nu t) + b_{\nu} \sin(\nu t)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu t).$$

1.2.8 Beispiel

(1) Wir betrachten den sogenannten 2π -periodischen Rechteckimpuls $\text{rect}_p(\cdot; a)$ zur „Breite“ a ,

$$\text{rect}_p(t; a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| < a < \pi, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } |t| = a, \\ 0, & \text{falls } a < |t| \leq \pi, \\ 2\pi\text{-periodisch} & \text{sonst.} \end{cases}$$

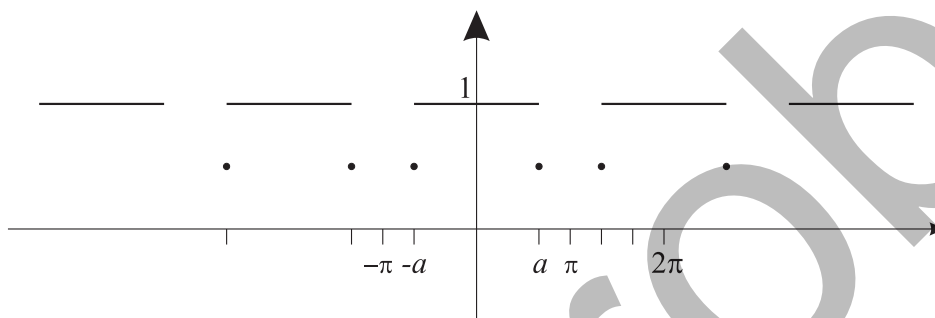


Abb. 1.1. Graph von $\text{rect}_p(\cdot; a)$

Wir erhalten für die komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{rect}_p(t) \exp(-i\nu t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{rect}_p(t) \exp(-i\nu t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \exp(-i\nu t) dt. \end{aligned}$$

Für $\nu \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(-i\nu t)}{-i\nu} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(-i\nu a) - \exp(i\nu a)}{-i\nu} \\ &= \frac{1}{\nu\pi} \frac{\exp(i\nu a) - \exp(-i\nu a)}{2i} \\ &= \frac{\sin(\nu a)}{\nu\pi} \\ &= \frac{a}{\pi} \frac{\sin(\nu a)}{\nu a} \\ &= \frac{a}{\pi} \text{sinc}(\nu a), \quad 0 \neq \nu \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wenn sinc ,

$$\text{sinc}(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } t = 0, \\ \frac{\sin(t)}{t}, & \text{falls } 0 \neq t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

die sogenannte Sinus-cardinalis-Funktion bezeichnet.

Für $\nu = 0$ folgt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a dt = \frac{a}{\pi}.$$

Es gilt also

$$c_\nu(\text{rect}_p(\cdot; a)) = \frac{a}{\pi} \text{sinc}(\nu a), \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten folgt wegen der geraden Symmetrie der sinc-Funktion

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = \frac{2a}{\pi}, \\ a_\nu &= c_{-\nu} + c_\nu = \frac{2a}{\pi} \text{sinc}(\nu a), \\ b_\nu &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{2a}{\pi} \text{sinc}(\nu a), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \\ b_\nu &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(2) Als nächstes betrachten wir die 2π -periodische „Dachfunktion“ dach_p ,

$$\text{dach}_p(t; a) := \begin{cases} \frac{1}{a}(a+t), & \text{falls } -a < t \leq 0, \\ \frac{1}{a}(a-t), & \text{falls } 0 < t \leq a < \pi, \\ 0, & \text{falls } a \leq |t| \leq \pi, \\ 2\pi\text{-periodisch} & \text{sonst.} \end{cases}$$

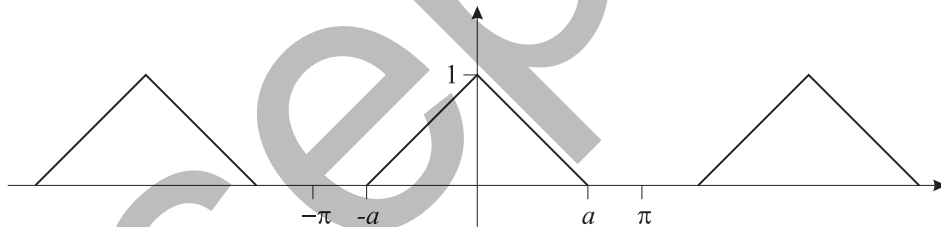


Abb. 1.2. Graph von $\text{dach}_p(\cdot; a)$

Für die Fourier-Koeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{dach}_p(t; a) \exp(-i\nu t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi a} \left\{ \int_{-a}^0 (a+t) \exp(-i\nu t) dt + \int_0^a (a-t) \exp(-i\nu t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \left\{ \int_0^a (a-t) \exp(i\nu t) dt + \int_0^a (a-t) \exp(-i\nu t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi a} \int_0^a (a-t) \cos(\nu t) dt. \end{aligned}$$

Für $\nu = 0$ folgt

$$c_0 = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2\pi},$$

während für $\nu \neq 0$ partielle Integration

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{1}{\pi a} \left\{ (a-t) \frac{\sin(\nu t)}{\nu} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{\sin(\nu t)}{\nu} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi a} \int_0^a \frac{\sin(\nu t)}{\nu} dt \\ &= -\frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cos(\nu t) \Big|_0^a \\ &= -\frac{1}{\pi a} \cdot \frac{\cos(\nu a) - 1}{\nu^2} \end{aligned}$$

liefert.
Wegen

$$\cos(\nu a) - 1 = -2 \left(\sin \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{2}{\pi a} \frac{\left(\sin \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2}{\nu^2} = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{\left(\sin \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2}{\left(\frac{\nu a}{2} \right)^2} \\ &= \frac{a}{2\pi} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Es gilt also einheitlich für $\nu \in \mathbb{Z}$

$$c_\nu = \frac{a}{2\pi} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2.$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{a}{\pi} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\nu a}{2} \right) \right)^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \\ b_\nu &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

Während für innermathematische Untersuchungen der Variablen t keine besondere Bedeutung zukommt – sie skaliert „nur“ die unabhängige Variable – ist es bei der Anwendung auf außermathematische Probleme (Modellbildung) anders. Hier hat t in aller Regel die Bedeutung der Zeit (t : von lat. *tempus* = Zeit), ist also eine Größe mit Maßeinheit. Als Grundeinheit wählt man meistens 1 sec, wobei auch größere Einheiten – Minute, Stunde, Jahr oder sogar Jahrmillionen (in der Geologie) – oder auch kleine Einheiten – Millisekunde, Mikrosekunde, Nanosekunde, Femtosekunde – je nach Problem verwendet werden. Alle Bemaßungen durch affine Transformationen, die auch eine Verschiebung des Nullpunktes der Zeitachse beinhalten können,

$$t' = t_0 + \alpha t, \quad \alpha > 0,$$

führen zu äquivalenten Zeitachsen. Die Zeitachse ist dabei stets *linear* skaliert. In der Praxis ist dann die Wahl einer Zeiteinheit angebracht, die am praktikabelsten ist, also große Zeitschritte bei langsam ablaufenden Vorgängen (typisch: Geologie) über mittlere Zeitschritte bei biologischen Prozessen bis hin zu sehr kurzen oder sogar ultrakurzen Zeitschritten in der Nachrichtentechnik, bei Zeitschritten von Prozessoren oder in der Mikrophysik.

Es hat sich eingebürgert, daß man den Definitionsbereich einer periodischen Funktion als den *Zeitbereich* bezeichnet, weil eben die Variable t in der Regel die Zeit bezeichnet. Dem

steht der sogenannte *Frequenzbereich* gegenüber, den man dadurch erhält, daß man die Fourierkoeffizienten über einer Koordinatenachse abträgt. Bei periodischen Funktionen kommen nur Koeffizienten c_ν , $\nu \in \mathbb{Z}$ vor, so daß man einen „diskreten“ Graphen erhält (vgl. Abb. 1.3). Man macht sich leicht klar, daß die Maßeinheiten des Zeitbereichs und des Frequenzbereichs reziprok zueinander sein müssen: In die Definition der Fourierkoeffizienten c_ν geht der Term $\exp(i\nu t)$ ein. Da die \exp -Funktion nicht auf physikalische Maßeinheiten angewendet werden kann (es gibt keine Einheit $\exp(\text{cm})$ oder $\exp(\text{sec})$) muß das Argument $i\nu t$ von $\exp(i\nu t)$ dimensionslos sein. Also ist die Dimension von ν reziprok zur Dimension von t , also $1/\text{sec} = \text{Hz}$ oder $1/\text{m sec} \dots$. Die Frequenzachse ist also stets reziprok zur Zeitachse bemßt.

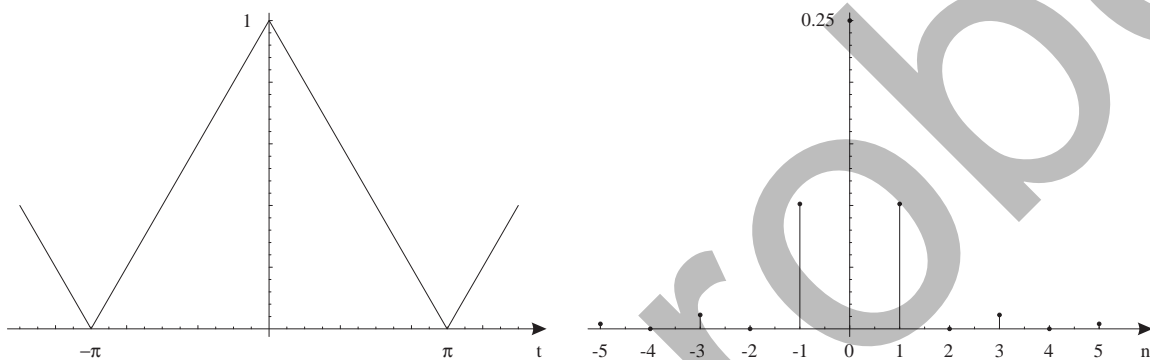


Abb. 1.3. Darstellung einer periodischen Funktion im Zeit- und Frequenzbereich

1.2.9 Bemerkung

Autofahrer kennen aus dem Cockpit ihres Wagens den Drehzahlmesser, der eine Skala von 0 bis ca. 15 trägt, aber mit dem Aufdruck auf der Scheibe $\times 1000/\text{min}$. Im Leerlauf, wenn der Zeiger im Bereich von 1 steht, ist also die Drehzahl des Motors $1000/\text{min}$ und bei Vollast bei 8 beträgt die Drehzahl $8000/\text{min}$. \square

Die Frequenzskala wird auch *geometrisch* skaliert, indem man sie in sogenannte *Oktaven* (von lat. *oktavius* = der Achte) unterteilt. Dieser Begriff stammt aus der Musik. Schon die Griechen um Pythagoras hatten festgestellt, daß Töne, die von verschiedenen Tonquellen erzeugt wurden (etwa mehrere Singstimmen, Singstimmen mit Begleitinstrumenten) besonders angenehm zusammenklingen, wenn die zugehörigen Frequenzen im Verhältnis kleiner ganzen Zahlen stehen. Nach dem einfachsten Fall, daß alle Tonquellen dieselbe Frequenz haben (sogenannte *Prim*) und sich somit das Frequenzverhältnis 1:1 ergibt, folgt die Oktave mit dem Frequenzverhältnis 2:1; hier ist eine Frequenz doppelt so groß wie die andere. Beginnend mit einer Grundfrequenz f_0 erhält man so ein Oktavenband

$$f_0, 2f_0, 4f_0, \dots, 2^k f_0 =: f_k, \dots$$

Der menschliche Hörbereich von ca. 16 Hz bis 20 kHz wird beginnend mit

$$f_0 = 16.4 \text{ Hz} \quad (\text{Subkontra - C, mit „C in der Musik bezeichnet})$$

und bei

$$f_{10} = 16\,744 \text{ Hz} \quad (\text{sechsgestrichenes c, mit c'''''' in der Musik bezeichnet})$$

endend (gerundet), in 10 Oktaven unterteilt. Über den menschlichen Hörbereich hinaus kann man diese Oktaveneinteilung nach unten in den sogenannten *Infraschallbereich* und nach oben in den sogenannten *Ultraschallbereich* fortsetzen (vgl. Abb. 1.4). Man sieht, daß sich der in der Medizindiagnostik (Sonographie) verwendete Bereich von 1 MHz bis 50 MHz auf dieser linearen Skala nicht vernünftig darstellen läßt. Eine bessere Darstellung erhält man durch Logarithmieren, da dann die Oktaven gleichabständig aufeinander folgen (vgl. Abb. 1.5)

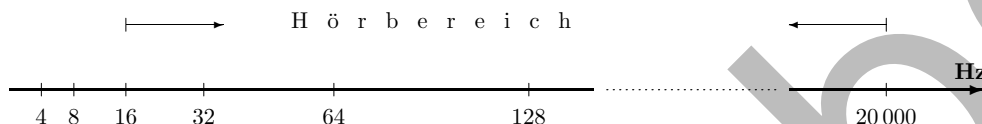


Abb. 1.4. Oktaveneinteilung des Frequenzbereichs

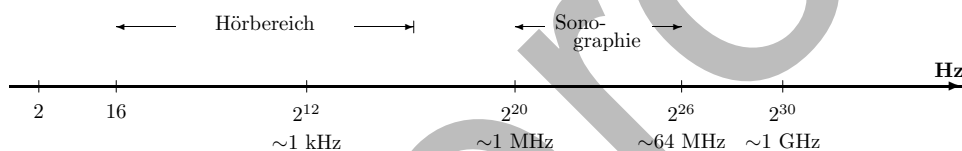


Abb. 1.5. Oktavenskalierung des Frequenzbereichs

Eine Oktave wird in der Musik weiter unterteilt. So erhält man die C-Dur-Tonleiter

$$c \sim d \sim e \sim f \sim g \sim a \sim h \sim c,$$

wobei \sim noch eingeschobene Halbtöne (cis, dis, fis, gis, ais bzw. des, es, ges, as, b) bezeichnet. Die Lage der Halbtöne legt ihre Bezeichnung „erhöht“ bzw. „vermindert“ fest; ihre spezielle Wahl in einer Tonleiter gibt dieser den Namen (z.B. G-Dur, a-Moll, ...) und ihr klangliches Charakteristikum.

Bei der sogenannten *gleichabständigen* oder (*wohl-*)*temperierten* Tonleiter wählt man 12 geometrisch gleichabständige Halbtöne, so daß auf den Grundton f_0 (hier z.B. c) die Zwischentöne mit den Frequenzen

$$g_i := f_0 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 11, 12,$$

$$f_0 = g_0, \quad f_1 = 2f_0 = g_{12}$$

folgen. (Das ist die „mathematischste“ Tonleiter.) Bei dieser Unterteilung besteht der menschliche Hörbereich aus 10 Oktaven mit je 12 Halbtönen, also insgesamt 120 Halbtönen g_i , die bei

$$g_i = 16.4 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^i, \quad i = 0, \dots, 120,$$

liegen. Je zwei aufeinanderfolgende Halbtöne haben somit einen relativen Frequenzabstand

$$g_{i+1}/g_i = \sqrt[12]{2} = 1.05946 \dots$$

Die Fourier-Theorie (Fourier-Reihen, später: Fourier-Analysis) hat sehr unterschiedliche Aspekte, insbesondere hinsichtlich der Konvergenztheorie – Konvergenz im quadratischen Mittel versus punktweise oder gleichmäßige Konvergenz. Die Fourierkoeffizienten

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

kann man als Skalarprodukte deuten:

$$c_\nu = \langle f, \exp(i\nu \cdot) \rangle, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

wobei das für zwei 2π -periodische komplexwertige Funktionen f, g kanonische Skalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

definiert wird. Mittels

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

erhält man eine Norm bezüglich derer der Vektorraum aller 2π -periodischen komplexwertigen Funktionen mit $\|f\|_2 < \infty$ vollständig, also ein Hilbert-Raum ist. Bei physikalischen oder physiologischen Anwendungen ist $\|f\|_2$ proportional zur Energie E eines periodischen Vorgangs. (Proportional bedeutet hier Gleichheit bis auf einen vom Maßsystem, aber nicht vom Vorgang f abhängigen Maßstabsfaktor.)

Wichtig ist die sogenannte *Parseval'sche Gleichung*, die besagt, daß die Energie einer 2π -periodischen Funktion - eines 2π -periodischen Signals - auch aus den Fourier-Koeffizienten bestimmbar ist. Wir betrachten (vgl. S. 16)

$$E^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Mit

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu t)$$

folgt

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= f(t) \overline{f(t)} \\ &= \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu t) \right) \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \overline{c_\mu} \exp(-i\mu t) \right) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\nu \overline{c_\mu} \exp(i(\nu - \mu)t). \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von Integration und Summation erhält man

$$\begin{aligned}
 E^2 &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \bar{c}_{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i(\nu - \mu)t) dt \\
 &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \bar{c}_{\mu} \delta_{\nu\mu} \\
 &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_{\nu}|^2.
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 |c_{\nu}|^2 &= \begin{cases} \frac{a_0^2}{4}, & \text{falls } \nu = 0 \\ \left| \frac{a_{\nu} - ib_{\nu}}{2} \right|^2, & \text{falls } \nu = 1, 2, \dots \\ \left| \frac{a_{\nu} + ib_{\nu}}{2} \right|^2, & \text{falls } \nu = -1, -2, \dots \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{a_0^2}{4}, & \text{falls } \nu = 0, \\ \frac{a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2}{4}, & \text{falls } \nu \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_{\nu}|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2}{2}.$$

1.2.10 Satz (Parseval'sche Gleichung)

Für die mittlere Energie E eines 2π -periodischen Signals f ,

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos(\nu t) + b_{\nu} \sin(\nu t)),$$

gilt

$$\begin{aligned}
 E^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \\
 &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_{\nu}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Für die Partialsummen

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_N(f))(t) &:= \sum_{\nu=-N}^N c_\nu \exp(i\nu t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^N \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\mathcal{F}_N(f))(t)|^2 dt &= \sum_{\nu=-N}^N |c_\nu|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^N (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\} \\ &\leq \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Dies ist die Besselsche Ungleichung. Wir halten fest.

1.2.11 Satz (Besselsche Ungleichung)

Für das N -te Fourier-Polynom

$$(\mathcal{F}_N(f))(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^N \{a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t)\}$$

gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\mathcal{F}_N(f))(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Wir haben gesehen, wie man einer 2π -periodischen Funktion f ihre Fourier-Reihe zuordnet:

$$\begin{aligned} f &\sim \mathcal{F}_p(f) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu \cdot), \\ \text{wobei} \quad c_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Es stellen sich folgende Fragen:

- Wann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu t)$?

- Wann ist die Konvergenz gleichmäßig, also $\mathcal{F}_p(f)$ stetig auf \mathbb{R} ?
- Wann gilt

$$f(t) = (\mathcal{F}_p(f))(t), \quad t \in \mathbb{R}?$$

- Wie hängt das Konvergenzverhalten von $\mathcal{F}_p(f)$ von Eigenschaften der Funktion f ab?

Die Frage nach der *Konvergenz* läßt sich mit Hilfe des Majorantenkriteriums für absolut summierbare Folgen

$$c = (c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}, \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu| < \infty,$$

entscheiden. Dann konvergiert nämlich die Fourier-Reihe absolut und gleichmäßig auf \mathbb{R} , und folglich stellt $\mathcal{F}_p(f)$ dann also eine stetige Funktion dar.

1.2.12 Satz

Ist die Folge $c = (c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ der Fourier-Koeffizienten der Funktion f absolut summierbar – also mit $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu| < \infty$ – so konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe $\mathcal{F}_p(f)$,

$$(\mathcal{F}_p(f))(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

absolut und gleichmäßig auf \mathbb{R} , und $\mathcal{F}_p(f)$ ist stetig auf \mathbb{R} .

Der obige Satz gibt zwar eine hinreichende Bedingung dafür an, daß die Fourier-Reihe $\mathcal{F}(f)$ eine stetige Funktion ist. Er beantwortet aber noch nicht die Frage, ob

$$\mathcal{F}_p(f) \stackrel{?}{=} f$$

gilt. Ein für die Praxis befriedigendes Resultat ist das folgende.

1.2.13 Satz

Ist für die stetige 2π -periodische Funktion f die Folge ihrer Fourier-Koeffizienten $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ absolut summierbar – also mit $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu| < \infty$ – so gilt

$$f = \mathcal{F}_p(f).$$

Beweis. Aus der absoluten Summierbarkeit der Folge der Fourier-Koeffizienten folgt, daß $\mathcal{F}_p(f)$,

$$(\mathcal{F}_p(f))(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

stetig ist. Dann ist mit f auch $f - \mathcal{F}_p(f)$ stetig. Für die Fourierkoeffizienten von $f - \mathcal{F}_p(f)$ folgt dann unmittelbar, daß diese sämtlich Null sind. Mit Hilfe des folgenden Lemmas 1.2.14 folgt dann, daß $f = \mathcal{F}_p(f)$ gilt. \square

1.2.14 Lemma

Eine stetige 2π -periodische Funktion f , deren sämtliche Fourier-Koeffizienten Null sind, ist notwendigerweise die Nullfunktion $f = 0$.

Beweis. Für eine indirekte Beweisführung nehmen wir an, es gelte $f(\alpha) > 0$ für eine Stelle $\alpha \in [0, T)$ (für $f(\alpha) < 0$ verläuft der Beweis analog). Wegen der Stetigkeit von f gibt es $\lambda > 0$, $\delta > 0$, $M > 0$ derart, daß

$$f(t) \geq \delta \quad \text{für } t \in [\alpha - \lambda, \alpha + \lambda], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{für } t \in [0, T]$$

gilt. Mit Hilfe der periodischen „Dach“-Funktion $\sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]} := \text{dach}_p(\cdot - \alpha; \lambda)$ folgt dann entsprechend Abb. 1.6

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha-\lambda}^{\alpha-\lambda+T} f(t) \sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]}(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha-\lambda}^{\alpha+\lambda} f(t) \sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]}(t) dt \geq \frac{1}{T} \delta \lambda > 0.$$

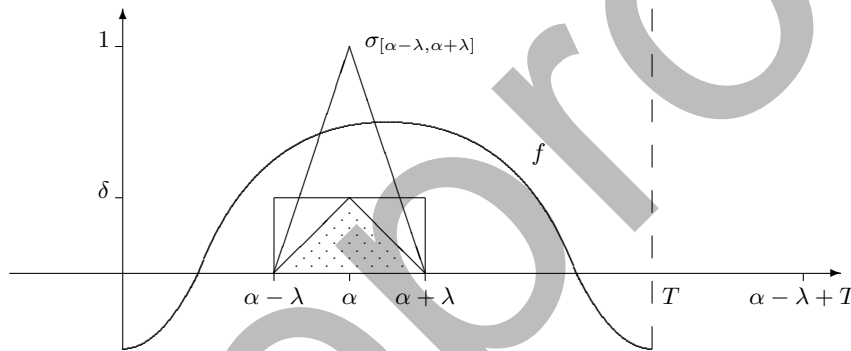


Abb. 1.6. Skalierung von $\sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]}$

Andererseits ist $\sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]}$ stetig und kann somit nach dem Approximationssatz von Weierstraß beliebig genau durch trigonometrische Polynome angenähert werden: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein trigonometrisches Polynom $\tau_N := \sum_{k=-N}^N \alpha_k \exp(ik\omega \cdot)$ und eine Restfunktion r_N mit

$$\sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]} = \tau_N + r_N, \quad |r_N(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für } t \in [0, T].$$

Dann folgt aber wegen $c_k(f) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \tau_N(t) dt = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(ik\omega t) dt = \sum_{k=-N}^N \alpha_k c_{-k}(f) = 0,$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_{\alpha-\lambda}^{\alpha-\lambda+T} f(t) \sigma_{[\alpha-\lambda, \alpha+\lambda]}(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{T} \int_{\alpha-\lambda}^{\alpha-\lambda+T} f(t) r_N(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| |r_N(t)| dt \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Wählt man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\varepsilon < \frac{\delta\lambda}{MT}$ gilt, so folgt der gewünschte Widerspruch. \square

Betrachten wir nochmals das n -te Fourier-Polynom

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \sum_{\nu=-n}^n c_\nu \exp(i\nu t),$$

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \exp(-i\nu\tau) d\tau, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Setzen wir die Koeffizienten in der Integraldarstellung in die Summe ein, so folgt

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \sum_{\nu=-n}^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \exp(-i\nu\tau) d\tau \right\} \exp(i\nu t)$$

und hieraus durch Vertauschung von Integration und Summation

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left\{ \sum_{\nu=-n}^n \exp(-i\nu\tau) \exp(i\nu t) \right\} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left\{ \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu(t - \tau)) \right\} d\tau.$$

Nach der Substitution

$$t - \tau =: \xi, \quad \tau = t - \xi$$

erhält man

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t-2\pi} f(t - \xi) \left\{ \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu\xi) \right\} (-d\xi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t f(t - \xi) \left\{ \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu\xi) \right\} d\xi,$$

und mit Hilfe der Periodizität des Integranden folgt schließlich

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \xi) \left\{ \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu\xi) \right\} d\xi.$$

Man betrachte nun das unter dem Integranden stehende trigonometrische Polynom D_n ,

$$D_n(t) := \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu t)$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^n (\exp(i\nu t) + \exp(-i\nu t)),$$

$$= 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu t).$$

Man bezeichnet D_n als n -ten *Dirichlet-Kern*. Dann erhält man die Darstellung

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \xi) D_n(\xi) d\xi$$

des n -ten Fourier-Polynoms von f . Dies ist ein sogenanntes *Faltungsintegral*, da als Argument von f die Variable t und die Integrationsvariable ξ in der Form $t - \xi$ vorkommen. Wir halten fest.

1.2.15 Satz

Mit Hilfe des Dirichlet-Kerns D_n ,

$$D_n(t) := \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu t) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu t),$$

läßt sich das n -te Fourier-Polynom $\mathcal{F}_n(f)$ der 2π -periodischen Funktion f als Faltungsintegral

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \xi) D_n(\xi) d\xi, \quad t \in \mathbb{R},$$

darstellen.

Sehen wir uns den Dirichlet-Kern D_n etwas genauer an. D_n ist eine gerade Funktion:

$$D_n(-t) = D_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel folgt für $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu t) \\ &= \exp(-int) \sum_{\nu=0}^{2n} \exp(i\nu t) \\ &= \exp(-int) \frac{1 - \exp(i(2n+1)t)}{1 - \exp(it)}. \end{aligned}$$

Kürzt man den Bruch mit $\exp(i\frac{t}{2})$, so folgt

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \exp(-int) \frac{\exp(-i\frac{t}{2}) - \exp(i(2n + \frac{1}{2})t)}{\exp(-i\frac{t}{2}) - \exp(i\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\exp(-i(n + \frac{1}{2})t) - \exp(i(n + \frac{1}{2})t)}{\exp(-i\frac{t}{2}) - \exp(i\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad 2k\pi \neq t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Für $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, erhält man trivialerweise

$$D_n(2k\pi) = \sum_{\nu=-n}^n 1 = 2n + 1;$$

dieser Wert ergibt sich nach de l'Hospital auch für

$$\lim_{t \rightarrow 2k\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Wir halten fest.

1.2.16 Satz

Der Dirichlet-Kern D_n hat die Darstellung

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(de l'Hospital-Grenzwert für $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Anhand der drei Darstellungen des Dirichlet-Kerns D_n ,

$$D_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu t) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

kann man unschwer einige wichtige Eigenschaften nachweisen.

1.2.17 Satz

(1) D_n ist 2π -periodisch und gerade.

$$(2) \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} D_n(t) dt = 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$(3) D_n(2k\pi) = 2n + 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(4) \frac{1}{2n+1} D_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\nu\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu = 0 \pmod{2n+1}, \\ 0, & \text{falls } \nu \neq 0 \pmod{2n+1}, \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

(Lagrange-Eigenschaft).

$$(5) D_n\left(\frac{\pi}{2n+1}(2\mu-1)\right) = \frac{(-1)^\mu}{\sin\left(\frac{2\mu-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$

(Oszillationseigenschaft).

Anhand der hier aufgelisteten Eigenschaften erhält man den qualitativen Verlauf des Graphen, vgl. Abb. 1.7

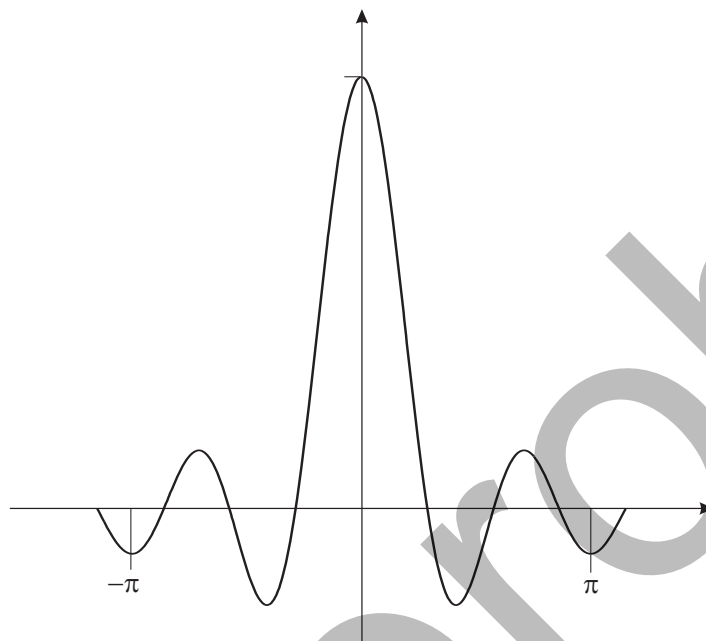


Abb. 1.7. D_n für $n = 3$

Man beachte die höher werdende Spitze bei $t = 0$, die immer schmäler werdenden „Nebenwellen“ sowie das Abklingen der relativen Extrema für $|t| \rightarrow \pi$.

Der Darstellungssatz 1.2.15 setzt neben der Stetigkeit von f auch die absolute Summierbarkeit der Fourier-Koeffizientenfolge voraus. Es liegt nahe zu fragen, was man von f allein fordern muß, damit $f = \mathcal{F}(f)$ gilt. Ein bekanntes und in der Regel für die Praxis ausreichendes Resultat ist das folgende, das sich auf stückweise glatte Funktionen bezieht.

1.2.18 Definition

Die T -periodische Funktion f heißt *stückweise glatt*, wenn das Periodenintervall $[0, T]$ so in endlich viele Teile $0 =: \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s := T$, $s \geq 1$, zerlegt werden kann, daß f in (ξ_{i-1}, ξ_i) , $i = 1, \dots, s$, stetig differenzierbar ist und an den Sprungstellen ξ_i die jeweiligen einseitigen Grenzwerte $f(\xi_i^-)$, $f(\xi_i^+)$ sowie $f'(\xi_i^-)$, $f'(\xi_i^+)$, $i = 1, \dots, s$, existieren.

Anschaulich gesprochen: f ist im Periodenintervall bis auf endlich viele Ausnahmepunkte ξ_i , an denen f oder f' Sprünge haben darf, stetig differenzierbar. Beispiele sind der periodische Rechteckimpuls oder die Sägezahnkurve, wobei die letztere sogar stetig auf \mathbb{R} ist, also nur Sprünge der Ableitung aufweist.

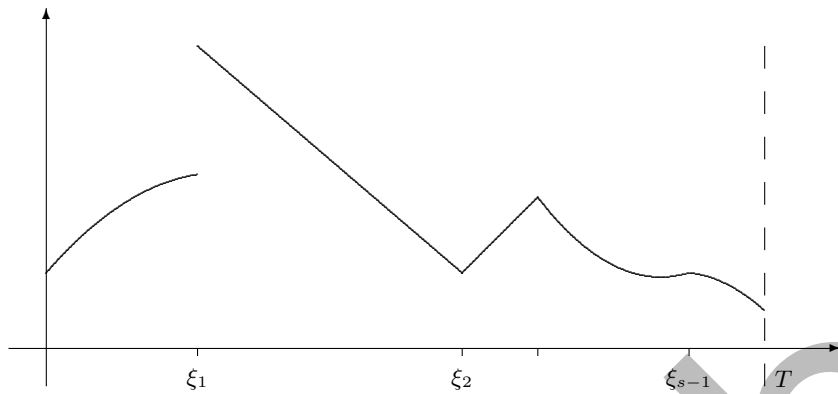


Abb. 1.8. Stückweise glatte Funktion

1.2.19 Satz

Die T -periodische Funktion f sei stetig und stückweise glatt. Dann gilt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \exp(ik\omega t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(„Die Fourier-Reihe von f stellt f dar.“)

Beweis. Wir erinnern zunächst an die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel zweier nichtnegativer Zahlen a, b :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b), \quad \text{d. h.} \quad ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2.$$

Da f stetig, T -periodisch und stückweise glatt ist, gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-ik\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{-ik\omega} f(t) \exp(-ik\omega t) \Big|_0^T + \frac{1}{ik\omega} \int_0^T f'(t) \exp(-ik\omega t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{ik\omega} \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) \exp(-ik\omega t) dt \\ &= \frac{1}{ik\omega} c_k(f'), \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Ungleichung

$$ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel mit $a := \frac{1}{|k|\omega}$, $b := |c_k(f')|$

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{|k|\omega} |c_k(f')| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k^2\omega^2} + \frac{2}{|k|\omega} |c_k(f')| + |c_k(f')|^2 \right),$$

also

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k^2 \omega^2} + \frac{2}{|k| \omega} |c_k(f')| + |c_k(f')|^2 \right).$$

Hieraus folgt durch Subtraktion von $\frac{1}{2} |c_k(f)|$ und anschließende Multiplikation mit 2

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 \omega^2} + |c_k(f')|^2 \right), \quad k \neq 0.$$

Aufgrund der Besselschen Ungleichung für f' gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f')|^2 \leq \langle f', f' \rangle = \|f'\|_2^2.$$

Da f' stückweise stetig ist, folgt $\|f'\|_2^2 < \infty$. Insgesamt erhält man somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| = |c_0(f)| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |c_k(f)| \\ &\leq |c_0(f)| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2 \omega^2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |c_k(f')|^2 \\ &\leq |c_0(f)| + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f')|^2 \\ &\leq |c_0(f)| + \frac{1}{\omega^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \|f'\|_2^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Satz 1.2.13 die Behauptung. \square

1.2.20 Beispiel

Die periodische Dachfunktion $\text{dach}_p(\cdot; b)$, $0 < b \leq \frac{T}{2}$, aus Beispiel 1.2.8 ist stetig und stückweise glatt. Also folgt

$$\text{dach}_p(t; b) = \frac{b}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\text{sinc} \left(\frac{\omega b}{2} k \right) \right)^2 \exp(ik\omega t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Speziell für $t = \frac{T}{2}$ folgt wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} 0 = \text{dach}_p \left(\frac{T}{2}; b \right) &= \frac{b}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\text{sinc} \left(\frac{\omega b}{2} k \right) \right)^2 (-1)^k \\ &= \frac{b}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\text{sinc} \left(\frac{\omega b}{2} k \right) \right)^2 (-1)^k \right) \end{aligned}$$

und somit für $b = \frac{T}{2}$ und wegen $\text{sinc}(\pi k) = 0$, $k \neq 0$,

$$1 = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi}{2} k \right) \right)^2 (-1)^k$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{2} (2k+1) \right) \right)^2 (-1)^{2k+1} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k)^2}{\left(\frac{\pi}{2} (2k+1) \right)^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},
 \end{aligned}$$

also schließlich die Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

mit der man Näherungen für π bestimmen kann. (Es gibt allerdings wesentlich rascher konvergierende Entwicklungen.) \square

1.3 Das Faltungsintegral und das Gibbs'sche Phänomen

Durch

$$(\mathcal{F}_n(f))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t-\xi) D_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(\xi) D_n(t-\xi) d\xi$$

erhält man eine explizite Darstellung der Fourier-Polynome $\mathcal{F}_n(f)$ von f . Diese Darstellung ist besonders geeignet, um die Approximation einer stückweise glatten Funktion f mit „echten“ Sprüngen durch ihre Fourier-Polynome zu analysieren. Wir betrachten als einfachsten Typ die sogenannte periodische *Heaviside-Funktion* (Rechteckimpuls) u_p ,

$$u_p(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } -\pi < t < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } t = 0 \text{ oder } t = \pi, \\ 1, & \text{falls } 0 < t < \pi, \\ 2\pi\text{-periodisch.} \end{cases}$$

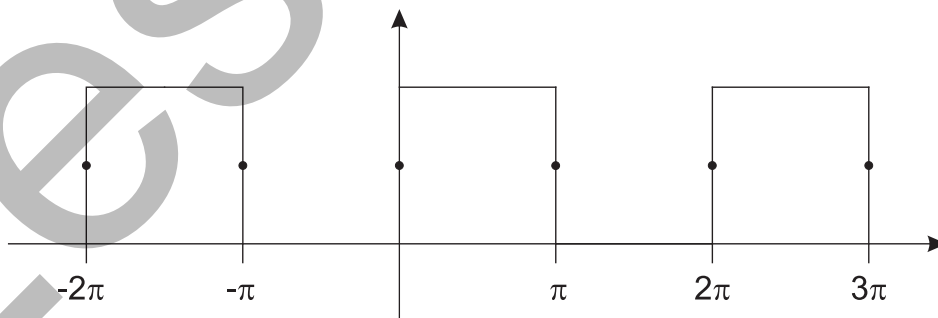


Abb. 1.9. Graph von u_p

Man erhält dann für $a = -\pi$

$$(\mathcal{F}_n(u_p))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_p(\xi) D_n(t-\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_n(t - \xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu(t - \xi)) \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu(t - \xi)) d\xi \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\pi} \frac{-\sin(\nu(t - \xi))}{\nu} \Big|_{\xi=0}^\pi \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \frac{-\sin(\nu(t - \pi)) + \sin(\nu t)}{\nu} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \sin(\nu t) \frac{1 - (-1)^\nu}{\nu}.
\end{aligned}$$

In dieser Summe sind nur die Summanden mit $\nu = 2\mu + 1$, $0 \leq \mu \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, von Null verschieden. Also folgt

$$(\mathcal{F}_n(u_p))(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sin((2\mu + 1)t) \frac{1}{2\mu + 1}.$$

Für ungerades $n = 2m + 1$ erhält man also

$$(\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \frac{\sin((2\mu + 1)t)}{2\mu + 1}.$$

Dieses Fourier-Polynom steht in engem Zusammenhang mit dem Dirichlet-Kern. Für φ_m ,

$$\varphi_m(t) := \frac{1}{2} [D_{2m+1}(t) - D_m(2t)],$$

folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\varphi_m(t) &= \sum_{\mu=1}^{2m+1} \cos(\mu t) - \sum_{\mu=1}^m \cos(2\mu t) \\
&= \sum_{\mu=0}^m \cos((2\mu + 1)t),
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^t \varphi_m(\tau) d\tau = \sum_{\mu=0}^m \frac{\sin((2\mu + 1)t)}{2\mu + 1}.$$

Wir haben also insgesamt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \frac{\sin((2\mu+1)t)}{2\mu+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t [D_{2m+1}(\tau) - D_m(2\tau)] d\tau \end{aligned}$$

gezeigt. Da wir uns für die „Wellen“ (relativen Extrema) von $\mathcal{F}_{2m+1}(u_p)$ interessieren, betrachten wir die Ableitung (Differentiation einer Stammfunktion nach der oberen Grenze und Substitutionsregel)

$$\begin{aligned} ((\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))(t))' &= \frac{1}{\pi} \left[D_{2m+1}(t) - \frac{1}{2} D_m(2t) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{4m+3}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}2t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2} \sin((2m+1)t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Die relativen Extrema von $\mathcal{F}_{2m+1}(u_p)$ treten an den Nullstellen der Ableitung, also für t mit

$$\sin\left(\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)t\right) = \frac{1}{2} \sin((2m+1)t)$$

auf. Die kleinste positive Schnittstelle liegt in der Nähe von

$$t_1^{(m)} := \frac{\pi}{2m+1}.$$

Dort gilt

$$(\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \left[D_{2m+1}(\tau) - \frac{1}{2} D_m(2\tau) \right] d\tau.$$

Substituiert man $\sigma := (2m+1)\tau$, so folgt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[D_{2m+1}\left(\frac{\sigma}{2m+1}\right) - \frac{1}{2} D_m\left(\frac{2\sigma}{2m+1}\right) \right] \frac{1}{2m+1} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{4m+3}{2(2m+1)}\sigma\right)}{\sin\left(\frac{\sigma}{2(2m+1)}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\sigma)}{\sin\left(\frac{\sigma}{2(2m+1)}\right)} \right] \frac{1}{2m+1} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{4m+3}{2(2m+1)}\sigma\right) - \frac{1}{2} \sin(\sigma)}{\frac{\sigma}{2} \sin\left(\frac{\sigma}{2(2m+1)}\right)} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\sigma + \frac{1}{2(2m+1)}\sigma\right) - \frac{1}{2} \sin(\sigma)}{\sigma \sin\left(\frac{\sigma}{2(2m+1)}\right)} d\sigma. \end{aligned}$$

Für $\sigma \in [0, \pi]$ gilt: Wegen

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (\text{Regel von de l'Hospital})$$

gilt

$$\frac{1}{\operatorname{sinc} x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

und somit

$$\frac{\frac{\sigma}{2(2m+1)}}{\sin\left(\frac{\sigma}{2(2m+1)}\right)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Also folgt durch Vertauschen von Integral- und Grenzwertbildung

$$(\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sigma) - \frac{1}{2} \sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma.$$

Der sogenannte *Integral-Sinus* Si,

$$\operatorname{Si}(t) := \int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^t \operatorname{sinc}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist eine „gutartige“ Funktion, wie man etwa an der aus der Sinusreihe resultierenden Reihenentwicklung

$$\operatorname{Si}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sieht. Zusammen mit ihr folgt

$$(\mathcal{F}_{2m+1}(u_p))\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\pi).$$

Einer Tabelle (vgl. Abramowitz-Stegun [1], S. 242) entnimmt man

$$\operatorname{Si}(\pi) = 1.851\dots > \frac{\pi}{2} = 1.570\dots$$

Also folgt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\pi) = 1.089\dots > 1 = \mu_p(t), \quad t > 0.$$

Dies besagt gerade, daß die Fourier-Polynome $\mathcal{F}_{2m+1}(u_p)$ rechts von der Sprungstelle $t = 0$ der Heaviside-Funktion μ_p über diese „hinausschießen“ und daß dieses „Überschießen“ der Höhe nach im Wesentlichen von m unabhängig ist (vgl. Abb. 1.10). Die „Wellen“ werden zwar immer schmaler, aber die Höhe nimmt nicht ab. Man bezeichnet dieses Verhalten der Fourier-Partialsommen in der Nähe einer Sprungstelle als *Gibbs'sches Phänomen*. Es tritt in analoger Form bei stückweise glatten Funktionen an deren Sprungstellen auf, so auch bei der periodischen „Sägezahnkurve“ (vgl. Abb. 1.11)

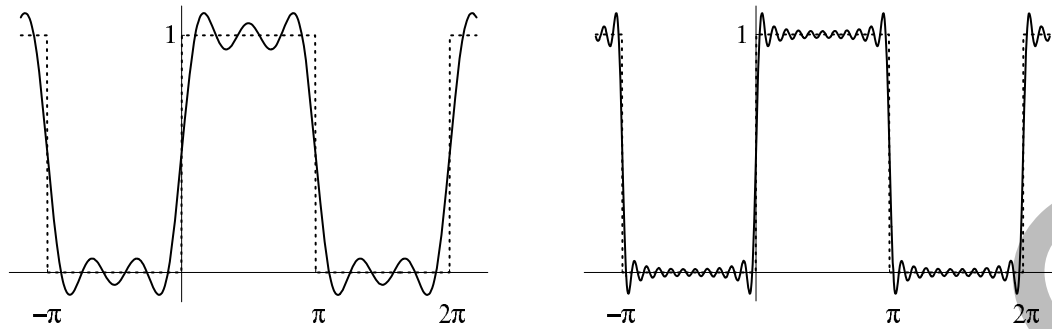


Abb. 1.10. Gibbsches Phänomen für den Rechteckimpuls, ($m = 2$ und $m = 10$)

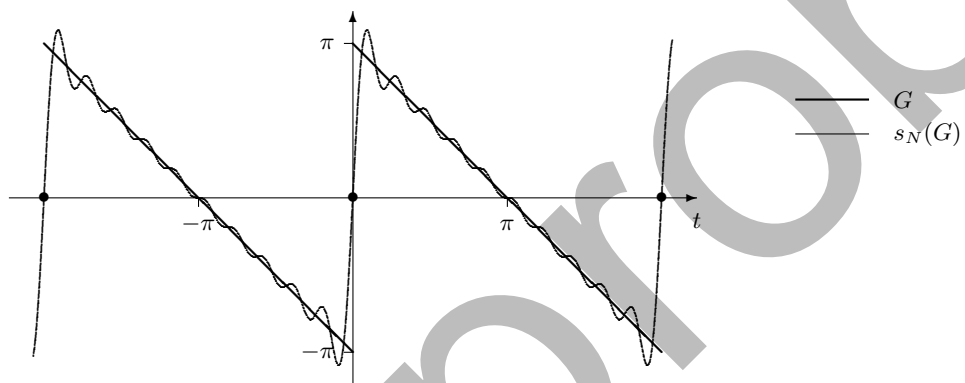


Abb. 1.11. Gibbsches Phänomen bei der „unstetigen Sägezahnkurve“ $G, s_N(G, \cdot) = 2 \sum_{k=1}^N \frac{\sin(k \cdot \cdot)}{k}$, $N = 10$