

Bipartite Strukturen in Sozialen Netzen

– klassische versus MaxEnt-Analysen –

Wilhelm Rödder*, Andreas Dellnitz, Friedhelm Kulmann**,
Sebastian Litzinger* und Elmar Reucher*****

Diskussionsbeitrag Nr. 503

Januar 2017

**Diskussionsbeiträge der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
der FernUniversität in Hagen**

Herausgegeben vom Dekan der Fakultät

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

* Forschungsbereich OR
** Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik und Quantitative Methoden
*** Studienbereich Betriebswirtschaft der Privaten Hochschule für Wirtschaft und Technik (PHWT)

1 Einleitung

Soziale Netzwerke (SN) sind Akteure und ihre wechselseitigen Beziehungen. Ziel der Analyse solcher Netzwerke (SNA) ist das Erfassen und die Interpretation von Strukturen in den Netzen. Welche Akteure oder Gruppen von Akteuren agieren wie in ihnen – den Netzwerken – und welche Vorteile ziehen sie daraus oder welche Nachteile erleiden sie im Zusammenspiel mit anderen Akteuren. Seit der bahnbrechenden Arbeit von Jakob Moreno [1] unterstützt die Wissenschaftler bei ihren Analysen die graphische Darstellung von Netzen. Akteure werden als Knoten und die Beziehungen als ungerichtete oder gerichtete Kanten (Pfeile) dargestellt. Sie sind eine bildhafte Visualisierung von symmetrischen oder asymmetrischen Beziehungen. Erweiterungen erfahren solch einfache soziale Strukturen in Multigraphen oder Hypergraphen. Während im Multigraph mehrere Beziehungen auftreten, sind es im Hypergraphen sogenannte Hyperkanten; das sind Kanten, die mehr als nur zwei Akteure verbinden.

Eine spezielle Form von Netzen sind die Affiliationsnetze. Das englische Wort *affiliation* bedeutet bekanntlich Mitgliedschaft oder Angliederung. In Affiliationsnetzen beschreibt man also, welche Akteure zu welchen Clubs, Vereinen oder Interessenverbänden gehören bzw. sich bei gewissen Ereignissen treffen; zusammenfassend verwenden wir auch den Begriff Plattform. Das wohl bekannteste, und immer wieder zitierte, Beispiel ist das der „Southern Women“ [2]. Die Autoren beschreiben hier, welche Damen der Gesellschaft einer Kleinstadt der Südstaaten in den USA sich bei welchen Ereignissen trafen, und sie unterziehen diese Beobachtungen einer tiefgehenden soziologischen Untersuchung der Gesellschaft der Stadt. Solche und andere Affiliationsnetze haben also typischerweise „Zwei-Modi“ bzw. sind „bipartit“. Die Akteure bilden einen Typ der Knoten des Netzes und die Plattformen den anderen. Beziehungen bestehen immer nur zwischen Elementen verschiedener Knotentypen. Hat man ein solches Netz, kann man die Akteure auf Art und Zahl von Kontakten und die Plattformen auf ihre Attraktivität oder auf ihre Eignung für den Austausch von Nachrichten oder Wissen oder anderes hin untersuchen.

Ein Autor, der sich intensiv mit solchen Fragen auseinandersetzt, ist Borgatti. In zahlreichen Arbeiten und mit mehreren Koautoren, siehe z.B. [3, 4], beschreibt er bipartite Strukturen und ihre Besonderheiten: die Affiliationsmatrix, die daraus ableitbare Soziomatrix und verschiedene Formen der Berechnung von „Nähe“ der Akteure als Indikator für mögliche Weitergaben von Nachrichten zwischen ihnen. Borgatti arbeitet sehr gut heraus, dass klassische Indizes wie Netzentralisierung oder Zentralitäten von Akteuren und Plattformen zum Teil nur in abgewandelter Form Verwendung finden dürfen und gibt die modifizierten Maße an. Naturgemäß kann beispielsweise die Zentralisierung eines bipartiten Netzes i. A. nicht der eines klassischen Netzes entsprechen – sind doch Verbindungen zwischen Knoten gleichen Typs verboten. Der Autor untersucht weiterhin den Einfluss der Zwei-Modi-Eigenschaft auf kohäsive Gruppen in Netzen, auf die strukturelle und reguläre Äquivalenz und vieles andere mehr.

Allen klassischen Analysen von Affiliationsnetzen ist gemein, dass Kanten stets als ungerichtet verstanden werden. Ihre Semantik ist die der ungerichteten Ver-

bindung zwischen Akteuren und Plattformen. Die Auswertung und Analyse solcher Strukturen beschränkt sich dann stets auf das Auszählen von solchen Kanten und daraus abgeleitete Größen. „Wie oft trifft Akteur i auf Akteur j in verschiedenen Clubs oder Vereinen“. „Wie viele gemeinsame Mitglieder haben Club k und Club l “. Geschlossen wird dann daraus auf die Chance der Weitergabe z. B. einer Nachricht von i zu j oder auf die gesellschaftliche Nähe von k und l . Wir möchten in dieser Arbeit in mehrfacher Hinsicht verallgemeinern:

- Statt sicherer Weitergaben von Nachrichten oder Neuigkeiten lassen wir auch eine gedämpfte Form zu. Die Idee gedämpfter = *attenuated* Weitergabe wurde erstmals von Katz [5] erwähnt und von Bonacich [6] und dann von Bonacich und Lloyd [7] wieder aufgegriffen und vertieft, nicht aber auf Affiliationsnetze angewandt.
- Statt ungerichteter werden gerichtete bipartite Graphen betrachtet. Damit tragen wir der schlichten Tatsache Rechnung, dass z. B. die Weitergabe einer Nachricht von Akteur zu Club nicht mit der gleichen Chance erfolgen muss wie umgekehrt.
- Um diesen neuen Schritt der Analyse von Affiliationsnetzen effektiv tun zu können, bedienen wir uns eines probabilistischen Modells unter Verwendung des Entropieprinzips. Erste Arbeiten zu dieser Modellierung sind [8], [9]. Die Autoren beschreiben in den Beiträgen die Modellierung allgemeiner Sozionetze und den Aufbau einer Wissensbasis nach dem Prinzip maximaler Entropie. Die Übertragung dieses Denkansatzes auf Affiliationsnetze ist Gegenstand unseres Aufsatzes.

Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 die klassische Analyse von Affiliationsnetzen wiederholt, um später die neue Methode darstellen und abgrenzen zu können. In 2.1 werden Affiliationsnetze formal dargestellt, in 2.2 direkte und indirekte Kontakthäufigkeiten zwischen Akteuren formalisiert, in 2.3 die aus Kontakthäufigkeiten ableitbaren Weitergabewahrscheinlichkeiten von Nachrichten gemäß ausgewählter Normierungen nach Borgatti anhand eines kleinen Beispiels skizziert und Fragen zu dieser Vorgehensweise behandelt. 2.4 ist dann eine Erweiterung auf gerichtete Graphen. Kapitel 3 widmen wir der neuen Modellierungsmethode. In 3.1 zeigen wir Syntax und Semantik, in 3.2 erfolgt der Aufbau des probabilistischen Modells zu einem bipartiten Netz. Kapitel 4 zeigt das Potential des MaxEnt-Modells anhand einer Anwendung auf ein Netz mit 20 Akteuren und 24 Plattformen. Kapitel 5 fasst zusammen und versucht einen Ausblick auf die weitere Forschung.

2 Affiliationsnetze und ihre klassische Analyse

2.1 Begriff und soziologische Bedeutung

Wie bereits in der Einleitung ausgeführt wurde, gibt es in Affiliationsnetzen zwei Typen von Entitäten: Akteure und Plattformen. Manche Akteure teilen sich

gewisse Plattformen, gehen in die gleichen Clubs, treffen sich bei sozialen Ereignissen usw., andere tun das nicht. Die soziologische Literatur geht durchgängig davon aus, dass die Häufigkeit gemeinsamer Plattformen von Akteuren deren Bereitschaft zum Austausch von Wissen oder Nachrichten unterstützt.

Ein (allgemeiner) Graph besteht aus einer Menge von Knoten \mathcal{V} und einer Menge von Kanten \mathcal{E} : $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Sind zwei Knoten $v, w \in \mathcal{V}$ durch eine Kante $e \in \mathcal{E}$ verbunden, heißen sie adjazent. Ist e ungerichtet, notieren wir das als $e = (v, w)$, ist sie gerichtet als $e = \langle v, w \rangle$; im letzteren Fall ist die Richtung von v zu w . Die Semantik solcher Graphen im sozialen Umfeld ist hinreichend bekannt, man vgl. hierzu [10].

Ein Graph $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ heißt bipartit, wenn $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \dot{\cup} \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ und wenn für jede Kante (v, w) bzw. $\langle v, w \rangle$ gilt: Ist $v \in \mathcal{V}_1$, so $w \in \mathcal{V}_2$ und umgekehrt. Knoten aus \mathcal{V}_1 sind niemals untereinander verbunden, ebensowenig wie Knoten aus \mathcal{V}_2 . $n_1 = |\mathcal{V}_1|$ und $n_2 = |\mathcal{V}_2|$ sind die entsprechenden Mächtigkeiten dieser Knotenmengen. Wir konzentrieren uns zunächst auf ungerichtete bipartite Graphen, mit denen typischerweise Affiliationsnetze beschrieben werden. O. B. d. A. wollen wir mit \mathcal{V}_1 die Akteure und mit \mathcal{V}_2 die Plattformen bezeichnen. Abbildung 1 stellt ein generisches Affiliationsnetz dar.

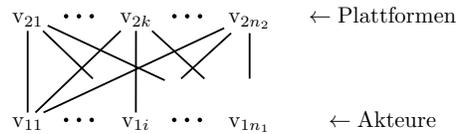


Abbildung 1: Generisches ungerichtetes Affiliationsnetz

Der erste Index der Knoten bezeichnet die Zugehörigkeit zum Entitätstyp, der zweite numeriert sie jeweils durch.

2.2 Kontakthäufigkeiten von Akteuren in ungerichteten Graphen

Die zugehörige Affiliationsmatrix eines in 2.1 beschriebenen Netzes benennt in den Zeilen die Akteure, in den Spalten die Plattformen; sie hat den Eintrag 1 in Zeile v_{1i} und Spalte v_{2k} , falls $(v_{1i}, v_{2k}) \in \mathcal{E}$. Diese Affiliationsmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n_1 \times n_2}$ ist also eine Rechtecksmatrix mit n_1 Zeilen und n_2 Spalten. $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist folglich eine $n_1 \times n_1$ -Matrix, deren Einträge die jeweiligen Kontakthäufigkeiten von Akteuren zueinander sind. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ist analog eine $n_2 \times n_2$ -Matrix, deren Einträge die Anzahlen gemeinsamer Mitgliedschaften in Plattformen sind.

Borgatti stellt bereits in [4] eine Blockmatrix vor, die beide Sichten vereinigt,

und nennt sie „Bipartite adjacency matrix \mathbf{B} “.

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n_1 \times n_1} & \mathbf{A}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{A}_{n_2 \times n_1}^T & \mathbf{0}_{n_2 \times n_2} \end{array} \right) \quad (1)$$

LEGENDE: $\mathbf{0}$ sind entsprechende mit Nulleinträgen besetzte Matrizen

\mathbf{B} ist quadratisch $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ liefert dann

$$\mathbf{B}^2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{AA}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{array} \right) \quad (2)$$

und mithin sowohl die Kontakthäufigkeiten von Akteuren als auch die gemeinsamen Mitgliedschaften in Plattformen. Die Bildung von \mathbf{B}^3 , \mathbf{B}^4 sowie höherer Potenzen ist unmittelbar möglich und ergibt z. B.

$$\mathbf{B}^3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{AA}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{AA}^T & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^4 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{AA}^T \mathbf{AA}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \mathbf{AA}^T \mathbf{A} \end{array} \right). \quad (4)$$

Während die Einträge in \mathbf{B}^2 Kontakthäufigkeiten von Akteuren und gemeinsame Mitgliedschaften in Plattformen liefern (s. o.), zeigt \mathbf{B}^3 die Unmöglichkeit auf, in 3 Schritten Akteure mit Akteuren oder Plattformen mit Plattformen zu verbinden. \mathbf{B}^4 schließlich zeigt die Kontakthäufigkeiten mit einem Intermediär zwischen Akteuren und die indirekten gemeinsamen Mitgliedschaften. Mit anderen Worten, Akteur i teilt zwar nicht mit Akteur j die gleiche Mitgliedschaft, wohl aber teilen beide die gleiche Mitgliedschaft mit einem dritten. Man übertrage sinngemäß auf Plattformen und erweitere auf Matrizen mit höheren Potenzen.

2.3 Von Kontakthäufigkeiten zu Weitergabewahrscheinlichkeiten

Geht man von der Vorstellung aus, dass Kontakthäufigkeiten von Akteuren auf ihre Bereitschaft zur Weitergabe von Nachrichten oder Neuigkeiten schließen lassen, folgt man der Grundidee der einschlägigen Literatur [3, 11, 4]. Um die folgenden Gedanken transparenter zu machen, bedienen wir uns eines kleinen Beispiels.

Betrachtet wird das Affiliationsnetz in Abbildung 2
Dieses Beispiel wurde gewählt, weil

- i) es Akteure gibt, die nicht in allen Plattformen vertreten sind
- ii) manche Akteurspaare mehrere Plattformen gemeinsam haben
- iii) manche Akteurspaare nur über einen Intermediär in Kontakt treten können
- iv) manche Akteurspaare nur über zwei Intermediäre in Kontakt treten können.

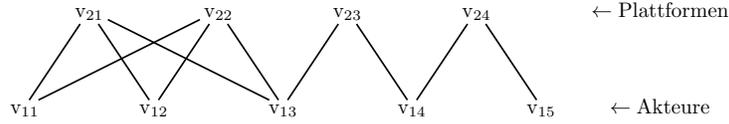


Abbildung 2: Ein konkretes Affiliationsnetz

Diese verbalen Charakterisierungen finden nun ihren Niederschlag in Matrizen, mit anschließenden Erläuterungen.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Die 1-Einträge zeigen die} \\ \text{ungerichteten Verbindun-} \\ \text{gen zwischen Akteuren und} \\ \text{Plattformen. 0-Einträge} \\ \text{untermauern i).} \end{matrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{AA}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Die Einträge zeigen} \\ \text{die direkten Kon-} \\ \text{takthäufigkeiten von} \\ \text{Akteuren in Plattfor-} \\ \text{men. Einträge größer} \\ \text{als 1 untermauern ii).} \end{matrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{AA}^T \mathbf{AA}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 12 & 12 & 14 & 2 & 0 \\ 12 & 12 & 14 & 2 & 0 \\ 14 & 14 & 18 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Die Einträge zeigen die} \\ \text{Kontakthäufigkeiten} \\ \text{von Akteuren über} \\ \text{einen Intermediär. Posi-} \\ \text{tive Einträge dort, wo} \\ \text{in } \mathbf{AA}^T \text{ eine 0 stand,} \\ \text{untermauern iii).} \end{matrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{AA}^T \mathbf{AA}^T \mathbf{AA}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 76 & 76 & 92 & 18 & 2 \\ 76 & 76 & 92 & 18 & 2 \\ 92 & 92 & 115 & 29 & 6 \\ 18 & 18 & 29 & 20 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Die Einträge zeigen die} \\ \text{Kontakthäufigkeiten} \\ \text{von Akteuren über zwei} \\ \text{Intermediäre. Positi-} \\ \text{ve Einträge dort, wo} \\ \text{in } \mathbf{AA}^T \mathbf{AA}^T \text{ eine 0} \\ \text{stand, untermauern iv).} \end{matrix} \quad (8)$$

Wir verweisen ausdrücklich auf die Problematik der Einträge in den Matrizen (6), (7), (8), da gegebenenfalls wiederholte Berührungen von Knoten möglich sind.

Die Basis zur Berechnung von Weitergabewahrscheinlichkeiten in der klassischen Literatur sind lediglich direkte Kontakte, wie sie in der Matrix \mathbf{AA}^T festgehalten werden. Dazu werden aus den Häufigkeiten durch verschiedene Normierungsvorschriften Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten geschätzt. Sind $(u_{ij})_{n_1 \times n_1}$ die Elemente der Matrix \mathbf{AA}^T , so kann man laut Borgatti u. a. wie folgt normieren:

$$\frac{u_{ij}}{n_2} \quad (9)$$

$$\frac{u_{ij}}{\min(u_{ii}, u_{jj})} \quad (10)$$

$$\frac{u_{ij}}{u_{ii} + u_{jj} - u_{ij}} \quad (11)$$

Bezugnehmend auf die Formeln (9), (10), (11) und zu \mathbf{AA}^T wie in (6) ergeben sich folgende Normierungen:

$$\begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & - & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & - & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & - & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & - \end{pmatrix} \quad (9')$$

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & - \end{pmatrix} \quad (10')$$

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0.67 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0.67 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0.67 & - & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & - & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & - \end{pmatrix} \quad (11')$$

Die fehlenden Einträge in den Diagonalen sind selbsterläuternd.

Sind alle Normierungen auch leicht berechenbar, stellt sich dennoch die Frage, welche von diesen Weitergabewahrscheinlichkeiten in weiteren Analysen Verwendung finden sollen.

Wie wir in diesem Abschnitt beispielhaft in (7), (8) gesehen haben, gibt es jedoch auch indirekte Kontakte über einen, zwei oder gar mehrere Intermediäre. Auch aus $\mathbf{AA}^T\mathbf{AA}^T$ bzw. $\mathbf{AA}^T\mathbf{AA}^T\mathbf{AA}^T$ ließen sich problemlos nach ähnlichem Muster Weitergabewahrscheinlichkeiten schätzen, die Problematik der geeigneten Wahl einer Normierung bliebe auch hier bestehen.

Außerdem beachte man nochmals, dass bei Kontakthäufigkeiten mit einem oder mehreren Intermediären die Nachricht ggf. mehrere und auch solche Wege durchläuft, die einen Knoten oder eine Kante mehrfach berühren. Das ist im Hinblick

auf die dahinterstehenden sozialen Transfermechanismen zumindest problematisch.

Hat man akzeptiert, dass Nachrichtenweitergaben auch indirekt über Intermediäre erfolgen können, bleibt offen, wie direkte und indirekte Kontakte oder Kontakthäufigkeiten zueinander zu gewichten sind. Welchen Stellenwert hat ein Kontakt über einen oder mehrere Intermediäre gegenüber einem direkten?

2.4 Kontakthäufigkeiten und Weitergabewahrscheinlichkeiten in gerichteten Graphen

Die von Borgatti eingeführte „Bipartite adjacency matrix“ erlaubt – in leicht abgewandelter Form – in idealer Weise auch die Darstellung gerichteter Graphen. Der obere Teil zeigt wiederum die Adjazenzen von Akteuren zu Plattformen und der untere Teil von Plattformen zu Akteuren. Nur sind diese Teilmatrizen i. A. nicht einfach transponiert zueinander. Die allgemeine Form schreiben wir als

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \hline \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad (12)$$

\bar{B} ist wiederum quadratisch $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$. $\bar{B} \cdot \bar{B}$ liefert jetzt

$$\bar{B}^2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} \end{array} \right). \quad (13)$$

Die Bildung von \bar{B}^3 , \bar{B}^4 sowie höherer Potenzen ist ebenso möglich und ergibt z. B.

$$\bar{B}^3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} \\ \hline \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (14)$$

$$\bar{B}^4 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} \end{array} \right). \quad (15)$$

Die Einträge in \bar{B}^2 stellen wieder die Kontakthäufigkeiten von Akteuren – oberer Teil – bzw. die gemeinsamen Mitgliedschaften – unterer Teil – dar. Entsprechend lesen sich \bar{B}^3 und \bar{B}^4 ; man vergleiche die Ausführungen in 2.2. Durch die Richtungen der Kanten sind diese Häufigkeiten natürlich stark eingeschränkt. Wir studieren ein abgewandeltes Beispiel zu Abbildung 2.

In Abbildung 3 sind alle gerichteten Verbindungen von Plattformen zu Akteuren wie in Abbildung 2 vorhanden, aber nur drei von Akteuren zu Plattformen. Wir geben nun \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ an

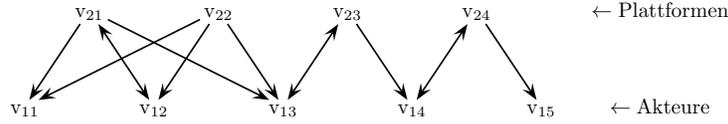


Abbildung 3: Ein konkretes gerichtetes Affiliationsnetz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die Überführung von Kontakthäufigkeiten in Weitergabewahrscheinlichkeiten folgt der gleichen Logik wie in ungerichteten bipartiten Strukturen und wird hier ausgespart.

3 Präliminarien: Netzanalyse nach MaxEnt

3.1 Syntax und Netzbelegungen

Da die hier zu erarbeitenden Instrumente bereits Gegenstand mehrerer Beiträge waren, übernehmen wir Kapitel 2 aus dem Diskussionsbeitrag Nr. 493 der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der FernUniversität in Hagen [12] fast wörtlich. Erst im darauffolgenden Abschnitt 3.2 werden diese Präliminarien auf Affiliationsnetze zugeschnitten.

Man betrachte eine Menge von n Knoten $\{v_1, \dots, v_n\}$. Jeder Knoten v_i wird mittels einer binären Variablen V_i mit Ausprägungen $V_i = v_i$ und $v_i = 1/0$ dargestellt. $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ sind somit entsprechende Konfigurationen. Für Paare von Knoten heißen die Ausdrücke $V_j = 1 \mid V_i = 1$ Konditionale; \mid ist der Konditionaloperator. Für eine ausgiebige Diskussion von Konditionalen siehe z. B.

Calabrese in [13] oder auch [8].

Die Semantik der vereinbarten Symbole ist die folgende: $V_i = 1/0$ ist die Proposition Knoten v_i kennt die Nachricht (1) oder nicht (0). Die Konditionale bedeuten die potentielle Weitergabe: Wenn v_i sie hat, dann auch v_j .

Grundsätzlich ist der Transfer von jedem v_i zu jedem v_j möglich, es werden also alle Konditionale $V_j = 1 \mid V_i = 1$ für $i, j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$ betrachtet. In graphentheoretischem Duktus modellieren wir mithin einen vollständigen gerichteten Graphen mit den V_i als Knoten $\hat{=}$ Variablen und $V_j = 1 \mid V_i = 1$ als Pfeilen. Wegen der potentiellen Weitergabe von Nachrichten von jedem zu jedem Knoten ist dieser Graph vollständig in dem Sinne, dass es zwischen je zwei Knoten einen Pfeil in Hin- und einen in Rückrichtung gibt. Solch ein Graph wie auch seine konditionale Entsprechung heißt *Netzrahmen*.

Durch Erhebungen sind nun für einige Paare von Knoten $\langle v_i, v_j \rangle$ Wahrscheinlichkeiten p_{ij} des Transfers bekannt, für andere sind sie es nicht. In den Netzrahmen wird hierdurch ein empirisches Netz eingebettet. Dieses Netz besteht also aus einer Teilmenge $N \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ und den dazugehörigen Konditionalen und Wahrscheinlichkeiten

$$V_j = 1 \mid V_i = 1 \text{ mit } p_{ij} \text{ für } (i, j) \in N. \quad (19)$$

Gesucht wird nun nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf $\{v\}$, die die Weitergabewahrscheinlichkeiten respektiert:

$$Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = p_{ij} \text{ für } (i, j) \in N. \quad (20)$$

Solch eine Verteilung wird *Netzbelegung* genannt.

Die Expertensystemshell SPIRIT [14] gestattet bei konsistenter Vergabe von p_{ij} den Aufbau von MinREnt-Belegungen auf einem Netz [15], vgl. abermals auch den bereits obengenannten Diskussionsbeitrag. Sind die gewünschten Konditionale $V_j = 1 \mid V_i = 1$ mit Wahrscheinlichkeiten p_{ij} für $(i, j) \in N$ gegeben, so löst sie das Optimierungsproblem

$$Q^* = \arg \min R(Q, P^0) = \sum_v Q(v) \log_2 \frac{Q(v)}{P^0(v)} \quad (21)$$

$$\text{u. d. N. } Q(V_j = 1 \mid V_i = 1) = p_{ij}, (i, j) \in N.$$

Die Aufgabe (21) respektiert also die p_{ij} und baut die Belegung Q^* minimaler relativer Entropie bzw. Kullback-Leibler Divergenz R zur Gleichverteilung P^0 auf $\{v\}$ auf. Die Minimierung in (21) ist bekanntlich äquivalent zur Maximierung der Entropie $H = -\sum_v Q(v) \log_2 Q(v)$. Daher spricht man gleichermaßen von MinREnt- und MaxEnt-Belegung. Q^* ist eine in der KI als Wissensbasis über die gesamte Netzstruktur gebräuchliche Verteilung [9]; ihr Aufbau gemäß (21) erfährt eine strenge axiomatische Rechtfertigung z. B. in [16].

Ist diese Belegung berechnet, stellt sich die Frage nach konkreten Weitergaben einer Nachricht, falls ein Knoten v_i sie abschickt: $V_i := 1$. Im Zusammenhang unseres Kontextes heißt dieser Vorgang Evidenzierung. Falls also Knoten v_i die Nachricht abschickt, durchdringt sie das Netz entsprechend der festgelegten Konditionalstruktur. Dieser Vorgang der Evidenzierung erfolgt in SPIRIT durch Lösen der Aufgabe

$$Q^{**} = \arg \min R(Q, Q^*) = \sum_v Q(v) \log_2 \frac{Q(v)}{Q^*(v)} \quad (22)$$

$$\text{u. d. N. } Q(V_i = 1) = 1.$$

Q^{**} ist die Belegung auf dem Netz minimaler relativer Entropie zu Q^* unter der Bedingung, dass $V_i = 1$ ist. Evidenzieren ist also das Konditionieren einer ganzen Verteilung. Hat man Q^{**} , ist damit auch $Q^{**}(V_j = 1)$ für jedes $j \neq i$ berechenbar. $Q^{**}(V_j = 1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass v_j die Nachricht empfängt, falls v_i sie abschickt. Angesichts der Überlegungen dieses Abschnitts kann v_j ein Nachbar von v_i sein oder nicht. Ja selbst für ein im Netz nicht-„erreichbares“ v_j stellt sich ein $Q^{**}(V_j = 1)$ ein. Inwieweit diese Empfangswahrscheinlichkeiten nur vage Vermutungen sind oder aber belastbare Schätzungen wird ebenfalls in dem genannten Diskussionsbeitrag thematisiert.

Die Übertragung der bisherigen Ausführungen dieses Abschnitts auf Zwei-Modi-Netze erfolgt im nächsten Abschnitt.

3.2 MaxEnt-Belegungen in Zwei-Modi-Netzen

Bezugnehmend auf Abschnitt 2.1 bestehe wiederum die Knotenmenge \mathcal{V} aus zwei disjunkten Modi $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \dot{\cup} \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Betrachtet werden hier nurmehr bipartite gerichtete Graphen, d.h. – vergleiche wiederum Abschnitt 2.1 – für jeden Pfeil $\langle v, w \rangle$ gilt: Ist $v \in \mathcal{V}_1$, so $w \in \mathcal{V}_2$ und umgekehrt.

Übertragen auf den Duktus des vorigen Abschnitts betrachten wir die Mengen $\mathcal{V}_1 = \{v_{11}, \dots, v_{1i}, \dots, v_{1n_1}\}$, $\mathcal{V}_2 = \{v_{21}, \dots, v_{2k}, \dots, v_{2n_2}\}$ und die dazugehörigen Variablen $\{V_{11}, \dots, V_{1i}, \dots, V_{1n_1}\}$, $\{V_{21}, \dots, V_{2k}, \dots, V_{2n_2}\}$.

Konditionale haben nun folgende Darstellung:

- $V_{1i} = 1 \mid V_{2k} = 1 [p_{ki}]$ für Pfeile von Plattformen zu Akteuren und
- $V_{2k} = 1 \mid V_{1i} = 1 [p_{ik}]$ für Pfeile von Akteuren zu Plattformen,

mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten p_{ki} und p_{ik} .

Um die Zusammenhänge zu illustrieren, greifen wir Abbildung 3 wieder auf und unterstellen zunächst, dass keinerlei Transferwahrscheinlichkeiten bekannt sind. Die Regelmenge in (21) ist also leer und es ergibt sich in SPIRIT laut Abbildung 4 (oben) die Menge aller Knoten mit den Randverteilungen $P^0(V_{1i} = 1) = P^0(V_{2k} = 1) = 0.5$. Der Evidenzierungsvorgang, also das Lösen von (22) für bestimmte Knoten lässt sich in SPIRIT mittels Anklicken realisieren. Nach

Evidenzierung von z. B. $V_{12} := 1$ ergibt sich Abbildung 4 (unten). Erwartungsgemäß haben sich die Randverteilungen auf allen Knoten – mit Ausnahme des evidenzierten – nicht geändert.

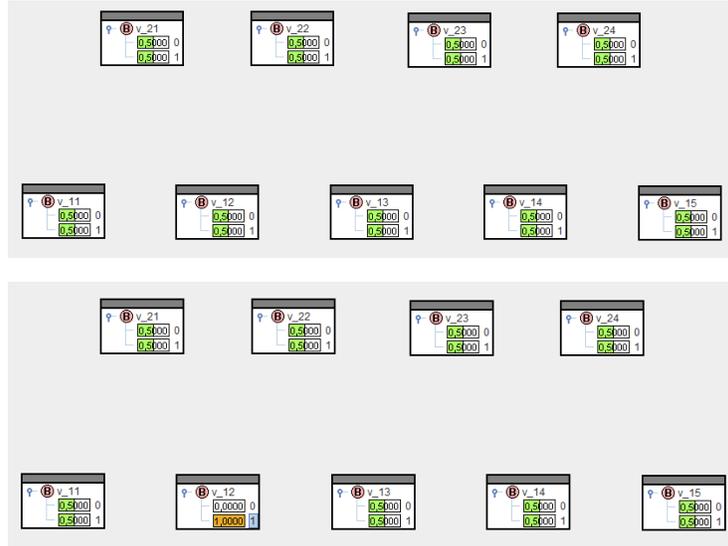


Abbildung 4: Randverteilungen bei leerer Regelmenge und nach Evidenzierung

Nunmehr erfolgt eine beispielhafte Vergabe von Wahrscheinlichkeiten wie in Tabelle 1.

Tabelle 1: Ein konkretes Affiliationsnetz

$V_{11} = 1 \mid V_{21} = 1 [1.0]$	$V_{11} = 1 \mid V_{22} = 1 [1.0]$	$V_{12} = 1 \mid V_{21} = 1 [1.0]$
$V_{12} = 1 \mid V_{22} = 1 [1.0]$	$V_{13} = 1 \mid V_{21} = 1 [1.0]$	$V_{13} = 1 \mid V_{22} = 1 [1.0]$
$V_{13} = 1 \mid V_{23} = 1 [1.0]$	$V_{14} = 1 \mid V_{23} = 1 [1.0]$	$V_{14} = 1 \mid V_{24} = 1 [1.0]$
$V_{15} = 1 \mid V_{24} = 1 [1.0]$	$V_{21} = 1 \mid V_{12} = 1 [0.8]$	$V_{23} = 1 \mid V_{13} = 1 [0.8]$
$V_{24} = 1 \mid V_{14} = 1 [0.8]$		

Dies lässt sich in kompakter Form als Matrizen der Transferwahrscheinlichkeiten darstellen.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten bedeuten, dass der Transfer von Plattformen zu Akteuren sicher (=1) ist, wohingegen die Akteure nicht so mitteilhaft (=0.8) sind. Gibt man die Konditionale mit diesen Weitergabewahrscheinlichkeiten in SPIRIT ein, ergibt sich nach Lösen von (21) ein Q^* , dessen Randwahrscheinlichkeiten auf den Variablen in Abbildung 5 ausgewiesen sind.

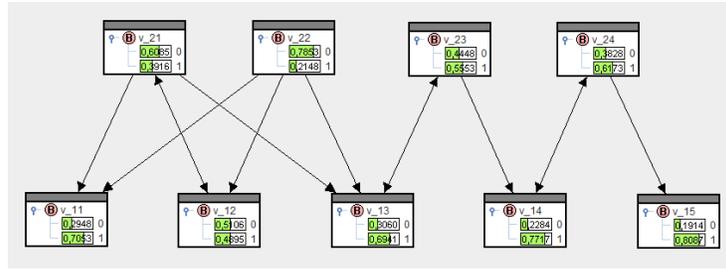


Abbildung 5: Ein bipartites Netz in SPIRIT

Anders als in Abbildung 4 (oben) haben sich jetzt die Randverteilungen geändert. Die Randwahrscheinlichkeiten erlauben die Interpretation von a priori-Einschätzungen des Nachrichtenerhalts – nur aufgrund der Netzstruktur. Auffällig sind kleinere Wahrscheinlichkeiten für $V = 1$ auf eher weitergebenden Knoten und große Wahrscheinlichkeiten für $V = 1$ auf eher empfangenden Knoten. Für nur ein sicheres Konditional liefert der Autor in [17] in Abschnitt 3.4 eine Plausibilitätsbetrachtung. Ihre Wiederholung an dieser Stelle sprengt den Rahmen des aktuellen Beitrags; stattdessen verweisen wir auf die weiter unten sich anschließenden informationstheoretischen Betrachtungen.

Evidenzieren durch Anklicken für den Akteur $i = 2$ bzw. die Plattform $k = 2$ ergeben die aus den Abbildungen 6 bzw. 7 ersichtlichen Empfangswahrscheinlichkeiten. Sie bestätigen natürlich die mit Regeln vorgegebenen Werte, lassen aber auch erkennen, dass die Kenntnis der Nachricht bei Akteur $i = 2$ ebenfalls die Empfangswahrscheinlichkeit von Akteuren mit nur indirekten Kontakten gegenüber der a priori-Verteilung erhöht. Das in SPIRIT realisierte Wissensverarbeitungskonzept lässt also Auswirkungen auf Empfangswahrscheinlichkeiten auch über einen oder mehrere Intermediäre zu.

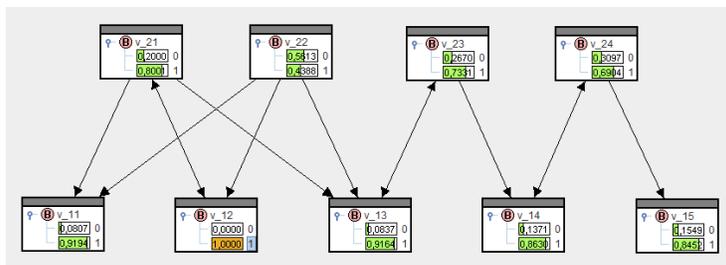


Abbildung 6: Bedingte Empfangswahrscheinlichkeiten unter $V_{12} = 1$

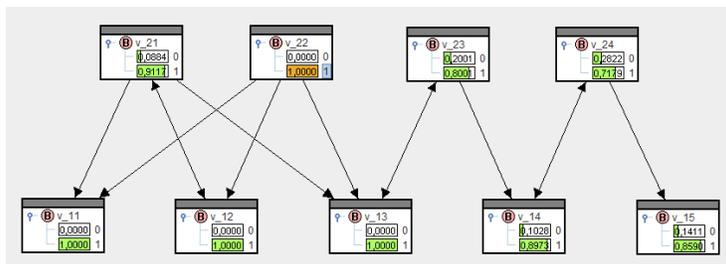


Abbildung 7: Bedingte Empfangswahrscheinlichkeiten unter $V_{22} = 1$

Nun folgt die weiter oben angekündigte informationstheoretische Sicht der Zusammenhänge.

Bei Evidenzieren von $V := 1$ wie in (22) misst $R(Q^{**}, Q^*)$ in [bit] die Änderung der Konditionalstruktur von Q^* zu Q^{**} [18]. Die Autoren in [8] nennen diese Zahl das Diffusionspotential eines Knotens und zeigen in Satz 2 auf Seite 7975

$$R(Q^{**}, Q^*) = -\log_2 Q^*(V = 1). \quad (24)$$

Die gesamte Konditionalstrukturänderung im Netz ist bereits in dem Wert $Q^*(V = 1)$ eingefangen.

$-\log_2(Q^*(V_{12} = 1))$ ist also das informationstheoretische Maß der Diffusion im Netz der Tabelle 1 für Akteur $i = 2$. Je mehr seine Nachricht das Netz durchdringt, umso höher seine Diffusion.

$-\log_2(Q^*(V_{22} = 1))$ ist ebenso das informationstheoretische Maß der Diffusion von Plattform $k = 2$ im Netz. Je mehr eine dort bekannte Nachricht das Netz durchdringt – durch direkte oder indirekte Kontakte – umso höher ihr Diffusionspotential.

Je kleiner $Q^*(V = 1)$, umso größer ist $-\log_2 Q^*(V = 1)$ für jeden Knoten V im Netz; repräsentiere er einen Akteur oder eine Plattform. Die MaxEnt-Verteilung belegt korrekt solche $V = 1$ mit kleinen Wahrscheinlichkeiten, deren Netzdurchdringung – direkte und indirekte Wege zu anderen Knoten – groß

ist. Analog weist sie große Wahrscheinlichkeiten für solche Knoten mit großer Empfangschance für Nachrichten oder Neuigkeiten aus.

Die Expertensystemshell SPIRIT gestattet ein Umschalten der Randwahrscheinlichkeiten auf negative Logarithmen. Abbildung 8 zeigt die entsprechenden Informationswerte für Abbildung 5. So weist $V_{12} = 1$ das größte Diffusionspotential aller Akteure und $V_{22} = 1$ das größte Diffusionspotential aller Plattformen aus; in Übereinstimmung mit der intuitiv erkennbaren Konditionalstruktur des Netzes.

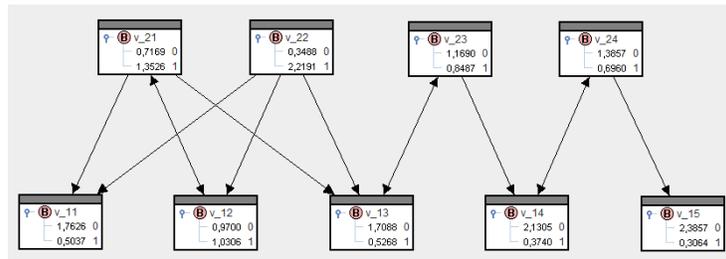


Abbildung 8: Informationswerte für Abbildung 5

Die bedingten Empfangswahrscheinlichkeiten, wie sie in den Abbildungen 6 und 7 ausgewiesen sind, bedürfen noch einer Erläuterung. Sie sind unverzerrte Schätzungen der Empfangschancen für alle Akteure und Plattformen nach Absenden der Nachricht. So sind die Wahrscheinlichkeiten für $V_{21} = 1 \mid V_{12} = 1$ [0.8] in Abbildung 6 oder für $V_{11} = 1 \mid V_{22} = 1$ [1.0] gewiss, da bereits im Regelwerk vorgegeben. Andere bedingte Empfangswahrscheinlichkeiten sind das Ergebnis des MaxEnt-Modells und des Evidenzierungsvorgangs. Im Vergleich von Abbildungen 5 und 6 ist beispielsweise erkennbar, dass sich die Empfangswahrscheinlichkeit von $V_{24} = 1$ nur gering gegenüber der a priori-Wahrscheinlichkeit erhöht hat. Diese Erhöhung ist nur eine Vermutung; sie ist ein Vorgriff auf Effekte möglicher Netzerweiterungen, die den „missing link“ ergänzen könnten. Dies könnte dann auch die Empfangswahrscheinlichkeit des Akteurs v_{15} beeinflussen. . . . Eine ausführliche Diskussion der Belastbarkeit von Empfangswahrscheinlichkeiten findet sich in [12].

Wie die bisher erarbeiteten Konzepte für die Analyse eines realen Netzes mittlerer Größe genutzt werden können, zeigt das nächste Kapitel.

4 Eine Analyse des Direktorennetzes

Die Autoren von [19] beschreiben ein Affiliationsnetz „Corporate Directors“. Wie die Namensgebung erkennen lässt, handelt es sich um eine Gruppe von – hier – 20 Direktoren und deren Mitgliedschaften in 24 verschiedenen Institutionen wie Clubs, Vorständen, Aufsichtsräten, etc. Die 99 Affiliationen werden wie gewöhnlich in der Affiliationsmatrix in Abbildung 9 dargestellt.

In der Vorspalte sind die Direktoren $\hat{=}$ Akteure und in der Vorzeile die Institutionen benannt. Aus Gründen der Kontinuität in der Symbolik bezeichnen wir die Direktoren mit $v_{1,1}$ bis $v_{1,20}$ und die Institutionen mit $v_{2,1}$ bis $v_{2,24}$. Die bipartite Struktur in SPIRIT erkennt man gut in Abbildung 10. Gegenstand des Modells ist die Analyse der Weitergabe von Nachrichten und Wissen zwischen den Knoten, d. h. den Akteuren und/oder Institutionen. Ähnlich wie in Abschnitt 3.2 gehen wir nunmehr von einer gerichteten bipartiten Struktur aus, mit folgenden Eigenschaften:

- Jede ungerichtete Kante kann zu einer bidirektionalen Kante werden.
- In Richtung von Institution zu Direktor erfolgt die Übermittlung der Nachricht mit Sicherheit. Unterstellt wird also hier, dass diese Plattformen die Aufgabe haben, ihren Mitgliedern Nachrichten und Neuigkeiten zugänglich zu machen.
- In Richtung von Akteur zu Institution ist die Chance der Übermittlung von Nachrichten zunächst unbekannt und wird dann Schritt für Schritt spezifiziert.

Gibt man dieses Netz in SPIRIT ein, ergeben sich die a priori-Verteilungen wie in Abbildung 11 bzw. die Informationswerte wie in Abbildung 12.

Es ist wenig verwunderlich, dass alle Institutionen einen hohen Diffusionswert zeigen, wohingegen das bei den Akteuren nicht der Fall ist. Die vorsichtige Wissensverarbeitung unter MaxEnt „traut“ den Akteuren nur eine geringe Mitteilbarkeit zu. Das größte Diffusionspotential unter den Akteuren zeigen $v_{1,15}$ mit dem Wert 0.652 [bit] und $v_{1,3}$ mit 0.632 [bit]. Die folgende Tabelle 2 zeigt die Empfangswahrscheinlichkeiten bei anderen Akteuren, falls $v_{1,3}$ bzw. $v_{1,15}$ die Nachricht abschicken. Gegenübergestellt sind nochmals die a priori-Wahrscheinlichkeiten aus Abbildung 11 (gerundet).

Tabelle 2: A priori- und Empfangswahrscheinlichkeiten der Akteure bei ausgewählten Evidenzen

	$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$v_{1,4}$	$v_{1,5}$	$v_{1,6}$	$v_{1,7}$	$v_{1,8}$	$v_{1,9}$	$v_{1,10}$...
A priori	0.79	0.82	0.65	0.67	0.68	0.70	0.86	0.92	0.69	0.88	...
Ev. $v_{1,3}$	0.79	0.83	—	0.75	0.69	0.70	0.86	0.92	0.69	0.88	...
Ev. $v_{1,15}$	0.83	0.85	0.65	0.69	0.70	0.72	0.88	0.93	0.75	0.89	...
	$v_{1,11}$	$v_{1,12}$	$v_{1,13}$	$v_{1,14}$	$v_{1,15}$	$v_{1,16}$	$v_{1,17}$	$v_{1,18}$	$v_{1,19}$	$v_{1,20}$	
A priori	0.84	0.82	0.93	0.79	0.64	0.96	0.67	0.93	0.79	0.76	
Ev. $v_{1,3}$	0.84	0.83	0.94	0.79	0.64	0.96	0.74	0.94	0.80	0.77	
Ev. $v_{1,15}$	0.87	0.85	0.94	0.83	—	0.96	0.68	0.94	0.81	0.80	

Die Ausbeute ist naturgemäß gering. Die Empfangswahrscheinlichkeiten erhöhen sich nur geringfügig gegenüber den a priori-Werten, selbst bei Nachrichten von Akteuren mit der höchsten Diffusion.

Nun ändern wir das Szenario und nehmen an, dass Akteur $v_{1,3}$ bzw. $v_{1,15}$ eine Weitergabebereitschaft von 80 % erkennen lassen. Im Duktus dieses Papiers heißt das:

- $v_{2,1} = 1 \mid v_{1,3} = 1 [0.8]$, $v_{2,12} = 1 \mid v_{1,3} = 1 [0.8]$
- $v_{2,9} = 1 \mid v_{1,15} = 1 [0.8]$, $v_{2,15} = 1 \mid v_{1,15} = 1 [0.8]$, $v_{2,22} = 1 \mid v_{1,15} = 1 [0.8]$

Nach Hinzufügen dieser Regeln erhöht sich das Diffusionspotential

- bei Akteur $v_{1,3}$ von 0.632 auf 1.180,
- bei Akteur $v_{1,15}$ von 0.652 auf 2.323.

Die bloße Kenntnis ihrer Weitergabebereitschaft von 0.8 verändert das Bild grundlegend. Das gilt dann natürlich auch für die Empfangswahrscheinlichkeiten aller Akteure, wie Tabelle 3 zeigt. Zum Vergleich sind auch hier wieder die a priori-Wahrscheinlichkeiten vorangestellt.

Tabelle 3: A priori- und Empfangswahrscheinlichkeiten der Akteure bei ausgewählten Evidenzen und Kenntnis der Weitergabebereitschaft von 0.8

	$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$v_{1,4}$	$v_{1,5}$	$v_{1,6}$	$v_{1,7}$	$v_{1,8}$	$v_{1,9}$	$v_{1,10}$...
A pr. $v_{1,3}$	0.79	0.83	0.44	0.73	0.69	0.70	0.86	0.92	0.69	0.88	...
A pr. $v_{1,15}$	0.77	0.82	0.65	0.68	0.71	0.71	0.86	0.92	0.66	0.87	...
Ev. $v_{1,3}$	0.81	0.85	–	0.96	0.71	0.73	0.87	0.93	0.72	0.89	...
Ev. $v_{1,15}$	0.98	0.99	0.73	0.81	0.93	0.95	0.99	0.99	0.98	0.99	...
	$v_{1,11}$	$v_{1,12}$	$v_{1,13}$	$v_{1,14}$	$v_{1,15}$	$v_{1,16}$	$v_{1,17}$	$v_{1,18}$	$v_{1,19}$	$v_{1,20}$	
A pr. $v_{1,3}$	0.84	0.82	0.94	0.79	0.64	0.96	0.72	0.94	0.80	0.77	
A pr. $v_{1,15}$	0.83	0.81	0.93	0.76	0.20	0.96	0.69	0.93	0.81	0.75	
Ev. $v_{1,3}$	0.86	0.84	0.98	0.82	0.67	0.96	0.96	0.94	0.81	0.79	
Ev. $v_{1,15}$	0.99	0.99	1	0.99	–	1	0.93	0.97	0.96	0.97	

Tabelle 3 lässt die erwarteten Effekte erkennen: Bei großer (0.8) Mitteilungsbereitschaft eines Akteurs erhöhen sich die Empfangswahrscheinlichkeiten der übrigen Akteure signifikant.

Als letztes Szenario betrachten wir den Fall, dass alle Akteure die gleiche Weitergabebereitschaft von 0.8 zeigen. Abbildung 13 zeigt die Randverteilungen in SPIRIT und Abbildung 14 die Randverteilungen, nachdem Akteur $v_{1,15}$ die Nachricht abgeschickt hat.

Abbildung 13 zeigt das unerwartete Phänomen, dass alle Randverteilungen in der Gruppe der Akteure und alle Randverteilungen in der Gruppe der Institutionen jeweils gleich sind. Dies erinnert an die Untersuchungen in starken Zusammenhangskomponenten in – nicht-bipartiten – Graphen, vgl. [18]. In solchen Komponenten waren die Randverteilungen aller Knoten ebenfalls gleich;

und dies bei sicheren Transfers. Selbst bei nicht sicheren, aber gleichen, Transferwahrscheinlichkeiten in Netzen wurde dieses Phänomen bestätigt [9].

Abbildung 14 zeigt das ernüchternde Ergebnis, dass das Emittieren der Nachricht von Akteur $v_{1,15}$ die Empfangswahrscheinlichkeiten aller übrigen Akteure nur geringfügig gegenüber den a priori-Werten verändert. Das ist natürlich der geringen Diffusion von $v_{1,15}$ und den bereits a priori hohen Empfangswahrscheinlichkeiten geschuldet. Wie Borgatti bereits bemerkte, ist eine unkritische Übertragung der Maßzahlen von Sozionetzen auf Affiliationsnetze problematisch; sie müssen modifiziert werden. Gibt es auch in bipartiten MaxEnt-Modellen solch einen Modifizierungsbedarf, um aussagefähigere Transferergebnisse zu erhalten?

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden soziale Affiliationsnetze betrachtet. Die entsprechenden Graphen haben eine bipartite Struktur; die Knotenmenge ist zweimodal: z. B. Akteure und Clubs. Zunächst wird die klassische Vorgehensweise der Auswertung solcher Netze nachgezeichnet; sie beruht auf den Häufigkeiten gemeinsamer Affiliationen von Akteuren bzw. gemeinsamer Mitgliedschaften in Clubs. Indirekte Verbindungen zwischen Akteuren – Intermediäre – und indirekte Verbindungen zwischen Clubs – ein intermediärer Club verbindet zwei weitere über gemeinsame Mitglieder – werden mathematisch formuliert und ihr Analysepotential aufgezeigt. Danach werden gerichtete bipartite Strukturen mathematisch dargestellt und von ungerichteten abgegrenzt.

Für die Analyse gerichteter bipartiter Netze bietet sich eine neue Form probabilistisch-konditionaler Modellierung an. Ja selbst *gewichtete* gerichtete Kanten können als probabilistische Konditionale formuliert werden: Wenn ein Akteur oder ein Club eine Nachricht „kennt“ oder über ein gewisses Wissen „verfügt“, so auch der jeweilige Nachfolger mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit. In der Expertensystemshell SPIRIT können solche Weitergabewahrscheinlichkeiten abgebildet und ausgewertet werden. Die neue Modellierung wird an dem bekannten Literaturbeispiel „Corporate Directors“ mit 20 Direktoren und ihren Mitgliedschaften in 24 Institutionen aufgezeigt.

	V _{2,1}	V _{2,2}	V _{2,3}	V _{2,4}	V _{2,5}	V _{2,6}	V _{2,7}	V _{2,8}	V _{2,9}	V _{2,10}	V _{2,11}	V _{2,12}	V _{2,13}	V _{2,14}	V _{2,15}	V _{2,16}	V _{2,17}	V _{2,18}	V _{2,19}	V _{2,20}	V _{2,21}	V _{2,22}	V _{2,23}	V _{2,24}
V _{1,1}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
V _{1,2}	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
V _{1,3}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V _{1,4}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
V _{1,5}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V _{1,6}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
V _{1,7}	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
V _{1,8}	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
V _{1,9}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
V _{1,10}	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
V _{1,11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
V _{1,12}	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
V _{1,13}	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
V _{1,14}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
V _{1,15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
V _{1,16}	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
V _{1,17}	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V _{1,18}	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
V _{1,19}	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V _{1,20}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Abbildung 9: Affiliationsmatrix des Netzes „Corporate Directors“

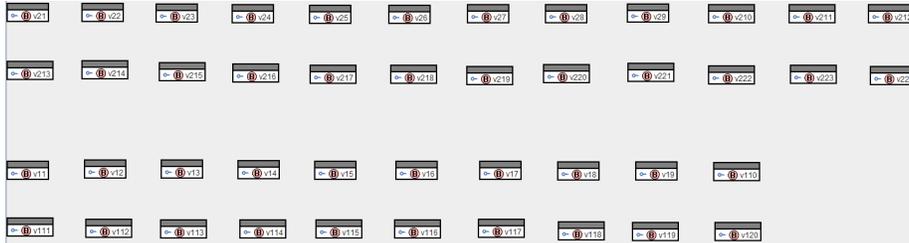


Abbildung 10: Bipartite Struktur der Corporate Directors in SPIRIT

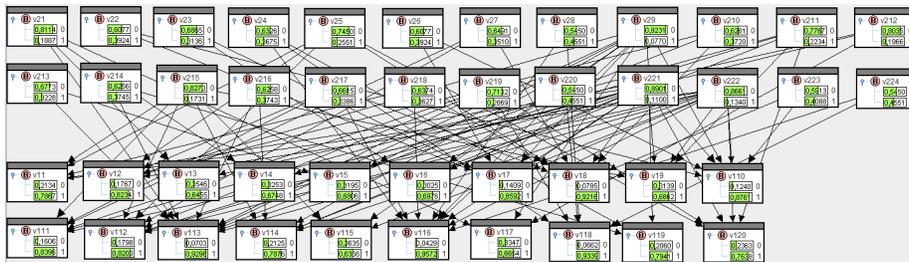


Abbildung 11: Randverteilung bei sicheren Weitergaben von Institutionen zu Akteuren

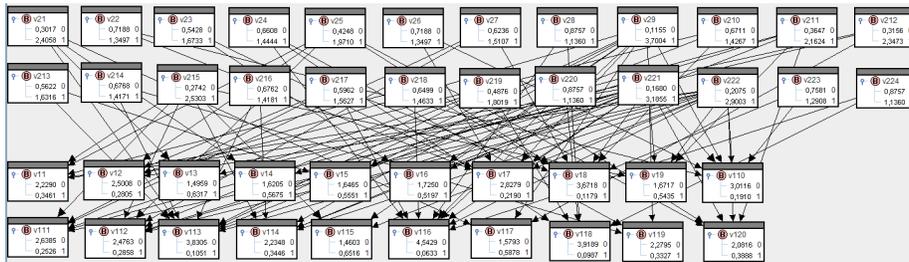


Abbildung 12: Informationswerte bei sicheren Weitergaben von Institutionen zu Akteuren

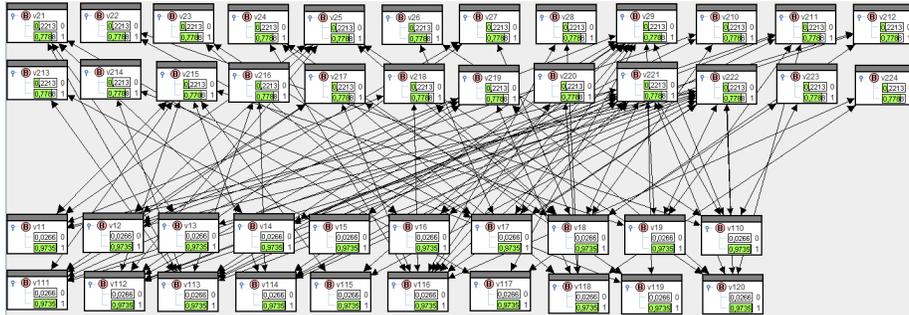


Abbildung 13: Randverteilungen bei 0.8-Weitergaben aller Akteure

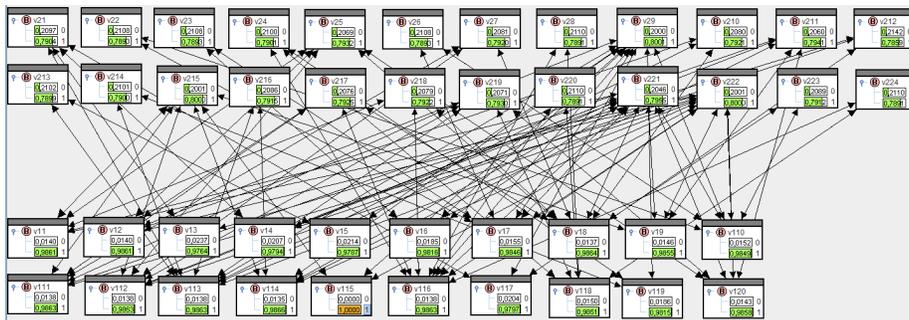


Abbildung 14: Empfangswahrscheinlichkeiten zu Abbildung 13 bei Evidenz von $V_{1,15} = 1$

Literatur

- [1] J.L. Moreno. *Who Shall Survive: A New Approach to the Problem of Human Interrelations*. Nervous and Mental Disease Publishing Co., Washington, D.C., 1934.
- [2] A. Davis, B. Gardner, and M. Gardner. *Deep South: A Social Anthropological Study of Caste and Class*. University of Chicago Press, 1941.
- [3] S. P. Borgatti and M. G. Everett. Network analysis of 2-mode data. *Social Networks*, 19:243–269, 1997.
- [4] S. P. Borgatti. 2-mode concepts in social network analysis. In R. A. Meyers, editor, *Encyclopedia of Complexity and System Science*, pages –. Springer, New York, 2009.
- [5] L. Katz. A new status index derived from sociometric analysis. *Psychometrika*, 18(1):39–43, 1953.
- [6] Ph. Bonacich. Power and centrality: A family of measures. *The American Journal of Sociology*, 92(5):1170–1182, 1987.
- [7] Ph. Bonacich and P. Lloyd. Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. *Social Networks*, 23(3):191–201, 2001.
- [8] W. Rödder, D. Brenner, and F. Kulmann. Entropy based evaluation of net structures – deployed in social network analysis. *Expert Systems with Applications*, 41(17):7968–7979, 2014.
- [9] W. Rödder, F. Kulmann, and A. Dellnitz. A new rationality in network analysis – status of actors in a conditional-logical framework –. In C. Beierle, G. Brewka, and M. Thimm, editors, *Computational Models of Rationality*, volume 20, pages 348–364. College Publications, 2016.
- [10] J. Scott. *Social Network Analysis*. Sage Publications, London, 2000.
- [11] S. P. Borgatti. Centrality and network flow. *Social Networks*, 27:55–71, 2005.
- [12] W. Rödder, A. Dellnitz, and I. Gartner. Ungewissheit versus Unsicherheit in Sozialen Netzwerken. *Diskussionsbeitrag Nr. 493 der FernUniversität in Hagen*, 2016.
- [13] P.G. Calabrese. Deduction and inference using conditional logic and probability. In I.R. Goodman, M.M. Gupta, H.T. Nguyen, and G.S. Rogers, editors, *Conditional Logic in Expert Systems*, pages 71–100. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [14] SPIRIT, 2011. Last accessed on 2015-09-15.

- [15] W. Rödder, E. Reucher, and F. Kulmann. Features of the expert-system-shell spirit. *Logic Journal of IGPL*, 14(3):483–500, 2006.
- [16] G. Kern-Isberner. Characterizing the principle of minimum cross-entropy within a conditional-logical framework. *Artificial Intelligence*, 98(1–2):169–208, 1998.
- [17] W. Rödder. On the measurability of knowledge acquisition and query processing. *International Journal of Approximate Reasoning*, 33(2):203–218, 2003.
- [18] D. Brenner, A. Dellnitz, F. Kulmann, and W. Rödder. Compressing strongly connected subgroups in social networks – an entropy-based approach –. 2016.
- [19] R. Barnes and T. Burkett. Structural redundancy and multiplicity in corporate networks. *Connections*, 30(2):4–20, 2010.

Die Diskussionspapiere ab Nr. 183 (1992) bis heute, können Sie im Internet unter <http://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/forschung/beitraege.shtml> einsehen und zum Teil downloaden.

Ältere Diskussionspapiere selber erhalten Sie nur in den Bibliotheken.

Nr	Jahr	Titel	Autor/en
420	2008	Stockkeeping and controlling under game theoretic aspects	Fandel, Günter Trockel, Jan
421	2008	On Overdissipation of Rents in Contests with Endogenous Intrinsic Motivation	Schlepütz, Volker
422	2008	Maximum Entropy Inference for Mixed Continuous-Discrete Variables	Singer, Hermann
423	2008	Eine Heuristik für das mehrdimensionale Bin Packing Problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas
424	2008	Expected A Posteriori Estimation in Financial Applications	Mazzoni, Thomas
425	2008	A Genetic Algorithm for the Two-Dimensional Knapsack Problem with Rectangular Pieces	Bortfeldt, Andreas Winter, Tobias
426	2008	A Tree Search Algorithm for Solving the Container Loading Problem	Fanslau, Tobias Bortfeldt, Andreas
427	2008	Dynamic Effects of Offshoring	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
428	2008	Der Einfluss von Kostenabweichungen auf das Nash-Gleichgewicht in einem nicht-kooperativen Disponenten-Controller-Spiel	Fandel, Günter Trockel, Jan
429	2008	Fast Analytic Option Valuation with GARCH	Mazzoni, Thomas
430	2008	Conditional Gauss-Hermite Filtering with Application to Volatility Estimation	Singer, Hermann
431	2008	Web 2.0 auf dem Prüfstand: Zur Bewertung von Internet-Unternehmen	Christian Maaß Gotthard Pietsch
432	2008	Zentralbank-Kommunikation und Finanzstabilität – Eine Bestandsaufnahme	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin
433	2008	Globalization and Asset Prices: Which Trade-Offs Do Central Banks Face in Small Open Economies?	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
434	2008	International Policy Coordination and Simple Monetary Policy Rules	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
435	2009	Matchingprozesse auf beruflichen Teilarbeitsmärkten	Stops, Michael Mazzoni, Thomas
436	2009	Wayfindingprozesse in Parksituationen - eine empirische Analyse	Fließ, Sabine Tetzner, Stefan
437	2009	ENTROPY-DRIVEN PORTFOLIO SELECTION a downside and upside risk framework	Röder, Wilhelm Gartner, Ivan Ricardo Rudolph, Sandra
438	2009	Consulting Incentives in Contests	Schlepütz, Volker

439	2009	A Genetic Algorithm for a Bi-Objective Winner-Determination Problem in a Transportation-Procurement Auction"	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
440	2009	Parallel greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid	Kubach, Timo Bortfeldt, Andreas Tilli, Thomas Gehring, Hermann
441	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part I: ML-Estimation of time series	Singer, Hermann
442	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part II: ML-Estimation of sampled stochastic differential equations	Singer, Hermann
443	2009	Konsensuale Effizienzbewertung und -verbesserung – Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis (DEA)	Rödder, Wilhelm Reucher, Elmar
444	2009	Legal Uncertainty – Is Harmonization of Law the Right Answer? A Short Overview	Wagner, Helmut
445	2009	Fast Continuous-Discrete DAF-Filters	Mazzoni, Thomas
446	2010	Quantitative Evaluierung von Multi-Level Marketingsystemen	Lorenz, Marina Mazzoni, Thomas
447	2010	Quasi-Continuous Maximum Entropy Distribution Approximation with Kernel Density	Mazzoni, Thomas Reucher, Elmar
448	2010	Solving a Bi-Objective Winner Determination Problem in a Transportation Procurement Auction	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
449	2010	Are Short Term Stock Asset Returns Predictable? An Extended Empirical Analysis	Mazzoni, Thomas
450	2010	Europäische Gesundheitssysteme im Vergleich – Effizienzmessungen von Akutkrankenhäusern mit DEA –	Reucher, Elmar Sartorius, Frank
451	2010	Patterns in Object-Oriented Analysis	Blaimer, Nicolas Bortfeldt, Andreas Pankratz, Giselher
452	2010	The Kuznets-Kaldor-Puzzle and Neutral Cross-Capital-Intensity Structural Change	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
453	2010	Monetary Policy and Boom-Bust Cycles: The Role of Communication	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
454	2010	Konsensuale Effizienzbewertung und –verbesserung mittels DEA – Output- vs. Inputorientierung –	Reucher, Elmar Rödder, Wilhelm
455	2010	Consistent Modeling of Risk Averse Behavior with Spectral Risk Measures	Wächter, Hans Peter Mazzoni, Thomas

456	2010	Der virtuelle Peer – Eine Anwendung der DEA zur konsensualen Effizienz- bewertung –	Reucher, Elmar
457	2010	A two-stage packing procedure for a Portuguese trading company	Moura, Ana Bortfeldt, Andreas
458	2010	A tree search algorithm for solving the multi-dimensional strip packing problem with guillotine cutting constraint	Bortfeldt, Andreas Jungmann, Sabine
459	2010	Equity and Efficiency in Regional Public Good Supply with Imperfect Labour Mobility – Horizontal versus Vertical Equalization	Arnold, Volker
460	2010	A hybrid algorithm for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints	Bortfeldt, Andreas
461	2010	A tree search procedure for the container relocation problem	Forster, Florian Bortfeldt, Andreas
462	2011	Advanced X-Efficiencies for CCR- and BCC-Modell – Towards Peer-based DEA Controlling	Rödder, Wilhelm Reucher, Elmar
463	2011	The Effects of Central Bank Communication on Financial Stability: A Systematization of the Empirical Evidence	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin Wagner, Helmut
464	2011	Lösungskonzepte zur Allokation von Kooperationsvorteilen in der kooperativen Transportdisposition	Strangmeier, Reinhard Fiedler, Matthias
465	2011	Grenzen einer Legitimation staatlicher Maßnahmen gegenüber Kreditinstituten zur Verhinderung von Banken- und Wirtschaftskrisen	Merbecks, Ute
466	2011	Controlling im Stadtmarketing – Eine Analyse des Hagener Schaufensterwettbewerbs 2010	Fließ, Sabine Bauer, Katharina
467	2011	A Structural Approach to Financial Stability: On the Beneficial Role of Regulatory Governance	Mohr, Benjamin Wagner, Helmut
468	2011	Data Envelopment Analysis - Skalenerträge und Kreuzskalenerträge	Wilhelm Rödder Andreas Dellnitz
469	2011	Controlling organisatorischer Entscheidungen: Konzeptionelle Überlegungen	Lindner, Florian Scherer, Ewald
470	2011	Orientierung in Dienstleistungsumgebungen – eine explorative Studie am Beispiel des Flughafen Frankfurt am Main	Fließ, Sabine Colaci, Antje Nesper, Jens

471	2011	Inequality aversion, income skewness and the theory of the welfare state	Weinreich, Daniel
472	2011	A tree search procedure for the container retrieval problem	Forster, Florian Bortfeldt, Andreas
473	2011	A Functional Approach to Pricing Complex Barrier Options	Mazzoni, Thomas
474	2011	Bologna-Prozess und neues Steuerungsmodell – auf Konfrontationskurs mit universitären Identitäten	Jost, Tobias Scherm, Ewald
475	2011	A reduction approach for solving the rectangle packing area minimization problem	Bortfeldt, Andreas
476	2011	Trade and Unemployment with Heterogeneous Firms: How Good Jobs Are Lost	Altenburg, Lutz
477	2012	Structural Change Patterns and Development: China in Comparison	Wagner, Helmut
478	2012	Demografische Risiken – Herausforderungen für das finanzwirtschaftliche Risikomanagement im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung	Merbecks, Ute
479	2012	“It’s all in the Mix!” – Internalizing Externalities with R&D Subsidies and Environmental Liability	Endres, Alfred Friehe, Tim Rundshagen, Bianca
480	2012	Ökonomische Interpretationen der Skalenvariablen u in der DEA	Dellnitz, Andreas Kleine, Andreas Rödter, Wilhelm
481	2012	Entropiebasierte Analyse von Interaktionen in Sozialen Netzwerken	Rödter, Wilhelm Brenner, Dominic Kulmann, Friedhelm
482	2013	Central Bank Independence and Financial Stability: A Tale of Perfect Harmony?	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich
483	2013	Energy generation with Directed Technical Change	Kollenbach, Gilbert
484	2013	Monetary Policy and Asset Prices: When Cleaning Up Hits the Zero Lower Bound	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich
485	2013	Superknoten in Sozialen Netzwerken – eine entropieoptimale Analyse	Brenner, Dominic, Rödter, Wilhelm, Kulmann, Friedhelm
486	2013	Stimmigkeit von Situation, Organisation und Person: Gestaltungsüberlegungen auf Basis des Informationsverarbeitungsansatzes	Julmi, Christian Lindner, Florian Scherm, Ewald
487	2014	Incentives for Advanced Abatement Technology Under National and International Permit Trading	Endres, Alfred Rundshagen, Bianca

488	2014	Dynamische Effizienzbewertung öffentlicher Dreispartentheater mit der Data Envelopment Analysis	Kleine, Andreas Hoffmann, Steffen
489	2015	Konsensuale Peer-Wahl in der DEA -- Effizienz vs. Skalenertrag	Dellnitz, Andreas Reucher, Elmar
490	2015	Makroprudenzielle Regulierung – eine kurze Einführung und ein Überblick	Velauthapillai, Jeyakrishna
491	2015	SEM modeling with singular moment matrices Part III: GLS estimation	Singer, Hermann
492	2015	Die steuerliche Berücksichtigung von Aufwendungen für ein Studium – Eine Darstellung unter besonderer Berücksichtigung des Hörerstatus	Meyering, Stephan Portheine, Kea
493	2016	Ungewissheit versus Unsicherheit in Sozialen Netzwerken	Rödder, Wilhelm Dellnitz, Andreas Gartner, Ivan
494	2016	Investments in supplier-specific economies of scope with two different services and different supplier characters: two specialists	Fandel, Günter Trockel, Jan
495	2016	An application of the put-call-parity to variance reduced Monte-Carlo option pricing	Müller, Armin
496	2016	A joint application of the put-call-parity and importance sampling to variance reduced option pricing	Müller, Armin
497	2016	Simulated Maximum Likelihood for Continuous-Discrete State Space Models using Langevin Importance Sampling	Singer, Hermann
498	2016	A Theory of Affective Communication	Julmi, Christian
499	2016	Approximations of option price elasticities for importance sampling	Müller, Armin
500	2016	Variance reduced Value at Risk Monte-Carlo simulations	Müller, Armin
501	2016	Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Discrete State-Space Models: Langevin Path Sampling vs. Numerical Integration	Singer, Hermann
502	2016	Measuring the domain-specificity of creativity	Julmi, Christian Scherer, Ewald
503	2017	Bipartite Strukturen in Sozialen Netzen – klassische versus MaxEnt-Analysen	Rödder, Wilhelm Dellnitz, Andreas Kulmann, Friedhelm Litzinger, Sebastian Reucher, Elmar