Protokoll zur den Prüfungen Lineare Algebra I und II (Kurse: 01102/3)

Datum : 26.9.2000

Dauer : je ca. 20 Min

Prüfer : Prof. Dr. Kamps

Noten : 1,0

Fragen zu LA1:

Definition Körper , Beispiele für Körper , kleinstmöglicher Körper mit Add. 1+1=0
Definition Vektorraum
Elemente des K^n - wie sind Addition und Multiplikation erklärt

Der von A induzierte Homomorphismus A^ von K^n nach K^m
(m,n) Matrizen
Dimension von $A_{m,n}$ (Begründung über die Basismatrizen)

Homomorphismen: Definition, Unterscheidung in injektive, surjektive, bijektive (--mehr hat schon nicht mehr interessiert) , Homomorphismen als Verknüpfung von Epi, Iso, Mono

Bildzerlegung eines Homomorphismus $f := in_f \circ b_f \circ \prod_f$ mit Erläuterung kanonische Projektion $\prod_f$, Inclusion in_f, b_f als Isomorphismus zwischen Faktorraum V/Kern f und Bild f; wie sieht der Faktorraum V/Kern f aus (Menge von Elementen)

Homomorphiesatz / Rangformel und daraus abgeleitet die Aussage zu der Lösungsmenge linearer homogener Gleichungssysteme (dim LG^0 = dim Kern A = n - rg A)

Rang einer Matrix
Bestimmung des Rang (elementare Zeilenumformungen) über die Zeilennormalform , graphische Erklärung der ZNF

Fragen zu LA2:

Diagonalisierbarkeit von Matrizen: warum kann man χ_A setzen als det(A-λE) ?
A diag <=> Basis des K^n von n linear unabhängigen Eigenvektoren , Übergangsmatrix M aus diesen EV kanonisch zusammengesetzt

Minimalpolynom μ_A: Definition , Eigenschaft im Zusammenhang mit dem characteristischen Polynom (hier hatte ich ziemlich ausführlich angesetzt mit irreduziblen Polynomen etc, er wollte aber nur hören, daß μ_A Teiler von χ_A ist)

Determinante eines Endomorphismus: Definition mit Erklärung Determinantenform
Woher kommt das n bei $\Delta \circ f^n$ (dim von V bei Δ:V->K)

Berechnen von Determinanten : explizite Formel mit Erläuterung von Signum, Inversionen, Permutationen
In der Praxis: Laplace - Laplace´scher Entwicklungssatz - Adjungierte einer Matrix
Spezialfall von Laplace: Entwicklung nach Zeilen/Spalten

Euklidische Vektorräume
Eigenschaften des Skalarprodukts
Norm/Betrag/Länge eines Vektors
Einführung von Winkeln zwischen x und y über das Skalarprodukt - Cauchy Schwarzsche Ungleichung

Satz von Riesz (Aussage - die Λ sind Isomorphismus bei endlichdimensionalen Vektorräumen - keine weiteren Fragen mehr im Zusammenhang mit adjungierten Homomorphismen)

Prof. Kamps bietet an, als Einstieg einen Kurzvortrag zu halten... den ich bei LA1 irgendwie nicht geschafft habe an den Mann zu bringen (fragt mich nicht wieso - die Frage, ob ich irgendwelche speziellen Wünsche hätte, habe ich in der Aufregung fehlinterpretiert und eh ich mich versah war er dann schon beim Fragen stellen), bei LA2 habe ich dann etwas zur Diagonalisierbarkeit von Matrizen an Hand von Eigenwerten, Eigenvektoren, Eigenräumen vorgetragen.

Hier brach Prof. Kamps dann gegen Ende ab und meinte, jetzt würde er die Sache selbst in die Hand nehmen. Er ging dann bei einigen Punkten noch ins Detail, d. h. man sollte sich zu dem Vortrag überlegen, welche Fragen dazu auftauchen könnten und die entsprechenden Begriffe und Erläuterungen sattelfest parat haben.

Kleine Ungenauigkeiten (d.h. Fehler im mathematischen Sinn ☺) darf man sich schon mal erlauben ... so man sie nach entsprechendem Hinweis oder Nachfragen seitens Prof. Kamps dann richtig korrigiert. Die Hinweise sind aber direkt genug um zu merken, wo genau man denn nun den Fehler gemacht hat.

Insgesamt verlief die Prüfung in entspannter Atmosphäre; auf Grund seiner ruhigen Art läßt Prof. Kamps auch einfach keine Hektik oder übermäßige Nervosität aufkommen. Zudem zeigte er auch persönliche Anteilnahme ; zumindest hatte ich nach der Prüfung den Eindruck, daß er sich mindestens genauso sehr über meine guten Noten freute wie ich mich. Prof. Kamps kann ich als Prüfer uneingeschränkt empfehlen.

Ich hatte Prof. Kamps vorher angerufen und er gab mir folgende Schwerpunkte bezüglich des Kurses:
(LA1) Körper, VR, Homomorphismen, Basis, Dimension, Bildzerlegung, Matrizen - VR der Matrizen, LGS, Lösbarkeitskriterien, Rang einer Matrix, Gauß Algorithmus, Invertierbare Matrizen: Characterisierung und Verfahren
(LA2) Theorie der Determinanten, Determinante einer Matrix, Laplace, Euklidische VR, Skalarprodukt; Konstruktion adjungierter Hom. , Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungs- bzw. normalisierungsverfahren, Orthogonalität/normalität; Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit, characteristisches Polynom, Minimalpolynom

Protokoll zur Prüfung Lineare Algebra I (Kurs: 01102)

Datum : 09.12.1999
Dauer : ca. 20 Min
Prüfer : Prof. Dr. Kamps
Note : 1,3

Prof. Kamps bietet die Möglichkeit als Einstieg einen eigenen Vortrag vorzubereiten. Ich hatte mich für die Bildzerlegung eines Homomorphismus entschieden.

Dazu habe ich erst den Homomorphismus erklärt: Sei K ein bel. Körper und V und W Vektorräume über diesen Körper K.
Eine Abbildung F: V -> W ist ein Homomorphismus, $\Leftrightarrow$ folgende Kriterien erfüllt sind:

$f(a+b) = f(a) + f(b)$, alle $a,b \in V$

$f(\alpha a) = \alpha f(a)$, alle $\alpha \in K$, $a \in V$

Dann habe ich die verschiedenen Typen von Homomorphismen erklärt: Mono, Epi, Iso, Endo, Auto.
Folgenden Satz erwähnt: Nicht jeder Homomophismus entspricht einem dieser Typen, aber jeder Hom. Läßt sich mittels Mono, Epi und Iso darstellen.

Dann habe ich noch kurz Kernf, Bildf und den Faktorraum definiert.
Kernf = $\{v | v \in V \text{ und } f(v) = 0\}$
Bildf = $\{w | w \in W \text{ und } \exists\, v \in V \text{ mit } f(v) = w\} = f(V)$

Faktorraum : Sei U >V. Dann ist $V/U = \{v+U | v \in V\}$

Bildzerlegung :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_f"'] & W \\ V/Kernf \arrow[r, "b_f"] & Bildf \arrow[u, "in_f"'] \end{tikzcd}$$

Jetzt habe ich noch erklärt, daß Π_f ein Epimorphismus ist, in_f ein Mono und b_f ein Iso.
Und $f = inf \circ b_f \circ \Pi_f$. das war natürlich zuviel des Guten, Prof. Kamps konnte es kaum noch erwarten, Fragen zu stellen. Und damit begann dann mein Elend.

Fragen :

Wieso ist bf wohldefiniert?

Ups. Nanu, was soll denn jetzt kommen? Nach langem Bohren kam dann alles.
Wenn v+Kernf = w+Kernf, dann soll auch $b_f(v+Kernf) = b_f(w+Kernf)$ sein. Dies beweist man, indem man so vorgeht: $b_f(v+Kernf) = f(v)$ (definitionsgemäß). Also soll $f(v) = f(w)$. D.h. $f(v) - f(w) = 0$.
Da f ein Hom ist => $f(v-w) = 0$ => $v-w \in$ Kern f. Aber v+Kernf =w+Kernf $\Leftrightarrow$ $v-w \in$ Kernf. Also ist b_f wohldefiniert.

Was kann man denn nun aus dem unteren Teil der Graphik ableiten.

V/Kernf isomorph zu Bildf. => Dim(V/Kernf) = Dim Bildf. Also dimV – dim Kernf = Rang f.

Wie nennt man diesen Satz?

Homomorphiesatz oder Rangformel.

Lineare Gleichungssysteme. Was kann man denn daraus für LGS ableiten.

Hängen im Schacht! Prof. Kamps mußte den Umweg nehmen!

Was ist ein LGS?

A*x = b. $A \in K_{m,n}$, $x \in K^n$, $b \in K^m$. A Koeffizientenmatrix, x die unbekannten und b die rechte Seite.

Wann ist denn das LGS lösbar.

Wenn Rang A = Rang(A/b)

Können Sie jetzt einen Zusammenhang zur Rangfomel herleiten?

Sie werden mir ja jetzt wohl kaum 5 Minuten zum Überlegen geben.

Die hängen wir hinten dran – Nachspielzeit.
Wie löst man denn ein LGS?

Man bestimmt die Lösungsmenge des homogenen LGS und eine spezielle Lösung. Die Lösungsmenge ist dann die partikuläre Lösung + KernA

Die Matrix stellt doch ein Hom dar. Von wo nach wo?

Von K^n nach K^m.

Jetzt der Zusammenhang?

dim(V) = dim K^n = n. dim Kernf = dim KernA. dim Bildf = RangA

n-dim - KernA = RangA. Also KernA = n – RangA.

Wie bestimmt man Rang A.

Man formt die Matrix mittels Zeilenumformungen um, bis A die Zeilennormalform hat. Dann ist der Rang die Anzahl der Zeilen $\neq 0$. Analog Spaltenumformungen.

Wie sieht die Zeilennormalform aus?

Ich habe erwähnt, daß mir die Definition ein bißchen kompliziert erschien, so daß ich mir diese nicht gemerkt habe. Aber ich erkläre es mit eigenen Worten.

```
( 0...0 1 * * 0 * * 0 ...
  .   . 0 0 0 1 * * 0 * ..
  .   . 0 0 0 0 0...

            usw.                )
```

Waren Sie denn beim Studientag?

Ja.

Genau so hat Herr Müller das doch auch beschrieben.

Na gut, aber bei mir ist es jetzt schon 3 Jahre her.

Was ist die Inverse Matrix?

Eine Matrix B E $K_{m,n}$ für die gilt : A*B = B*A = E

Wann ist eine Matrix invertierbar?

Wenn diese quadratisch ist und der Rang = n.

Wie bestimmt man die Inverse?

Zeilenumformungen bis man auf der linken Seite die Einheitsmatrix erhält. Die linke Seite ist dann die inverse Matrix.

Da Sie ja vorher erwähnt haben, daß Sie Zeilenumformungen bevorzugen, kommen Sie nicht in Versuchung was zu tun?

Zeilen- und Spaltenumformungen zu vermischen – darf man nämlich nicht.

Dann kehren wir doch mal an den Anfang des Kurses zurück : was ist ein Körper? Kleinster Körper.

(K,+,*) mit Menge K mit mind. 2 El., usw. E_2 kleinster Körper mit 1+1 =0.

Okay, dann warten Sie kurz draußen.

Ich mußte wirklich nur ganz kurz warten. Dann verkündete er mir die Note mit dem Hinweis, daß der Patzer mit der Wohldefiniertheit meine Note etwas verschlechtert hat. Also, macht es besser. Vortrag und die Fragen, die sich daraus ergeben könnten sollten wasserdicht sein.
Ich hatte Prof. Kamps vor der Prüfung angerufen und er hatte mir folgende Einschränkung bzgl. Der Kurses gegeben : Körper, VR, Hom, Basis, Dim, lin. Abbildung, Bildzerlegung, Kernf, Matrizen und deren Zusammenhang zu den lin. Abbildungen, Dimensionsformel für Homomorphismen, LGS, Lösbar, homogen und Gauß, Inv. Matrizen, Verfahren, Mono, Epi. Und er wies mich auch darauf hin, daß er keine langen Beweise abfragt, nur die Beweisidee sollte ich parat haben.