

Gedächtnisprotokoll

Vordiplom-Prüfung Lineare Algebra I

Kurse: Lineare Algebra I (0102)

Prüfer: Prof. Dr. Unger

Termin: 14.09.2006

Dauer: ca. 25 min

Note: 1,0

Vorbemerkung: Prof. Unger fragt anfangs, mit welchem Thema man gerne anfangen möchte. Ich habe hier das Thema Determinanten gewählt.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ gegeben. Wie berechnet man die Determinante von A?

- Leibnizformel 4.1.1 angegeben.
- Dazu die Begriffe symmetrische Gruppe S_n , Signatur und Fehlstand erklärt.

2. Welchen Nachteil hat die Leibnizformel?

- Brieskorns Bemerkung angegeben.
- Aufzählung von Alternativen zur Determinantenberechnung:
 - Spezialfälle: A^T , Nullzeile/-spalte, gleiche Zeilen/Spalten, Dreiecksmatrizen
 - Determinanten von Elementarmatrizen (dabei auch erläutert, was Elementarmatrizen sind): $\det(EA) = \det(E)\det(A)$. Bemerkt, dass man hiermit den Determinantenmultiplikationssatz für Matrizen über Körpern zeigen kann.
 - Berechnung durch Gauß-Algorithmus bei Matrizen über Körpern

3. Was macht man denn, wenn $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt und \mathbb{R} ein kommutativer Ring ist?

- Laplace'schen Entwicklungssatz 4.3.13 angegeben und erklärt.
- Beweis mittels Adjunktensatz angegeben, dazu Adjunktensatz 4.2.8 aufgeschrieben.

4. Kennen Sie weitere Folgerungen aus dem Adjunktensatz?

- Invertierbarkeit von Matrizen über kommutativen Ringen: Ist $\det(A)$ in \mathbb{R} invertierbar, so ist A invertierbar, vgl. 4.3.1.
- Für $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ ist A invertierbar, falls $\det(A) \in \{-1, 1\}$ gilt.

- Für $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist A invertierbar, falls $\text{ggT}(\det(A), m) = 1$.
 - Bestimmung der inversen Matrix: $A^{-1} = \det(A)^{-1} A^{\text{Ad}}$.
 - Cramersche Regel angeben
- 5. Themenwechsel: Seien Vektoren v_1, \dots, v_n gegeben. Wann heißen die Vektoren linear unabhängig?**
- Definition 5.2.12 angeben und erklärt.
- 6. Was ist ein Erzeugendensystem?**
- Definition 5.2.7 angeben und erläutern.
- 7. Und was ist eine Basis?**
- Definition 5.2.17 angeben und erläutern.
- 8. Wie ist der Begriff der Dimension definiert?**
- Definition 5.3.1 angeben.
 - Begründet, warum diese Definition eindeutig ist. Dies folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz.
- 9. OK. Wie lautet dieser? Oder besser: wie lautet das Austauschlemma? Geben Sie bitte auch die Beweisidee an!**
- Lemma 5.2.24 aufgeschrieben und Beweisskizze angeben. Man stellt v als Linearkombination der Vektoren u_i dar. Wegen $v \neq 0$ gibt es dann ein j mit $a_j \neq 0$. Die Gleichung formt man dann nach u_j um usw.
- 10. Nennen Sie alle Dimensionsformeln, die Sie kennen!**
- Dimensionsformel für Unterräume, vgl. 5.3.8.
 - Dimensionsformel für Faktorräume, vgl. 5.3.9.
 - Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt, vgl. 5.3.12.
 - Dimensionsformel für komplementäre Unterräume, vgl. 5.3.16.
 - Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Rangsatz), vgl. 6.3.3.
 - Dimensionsformel für Homomorphismenräume, vgl. 6.4.11. Kurze Beweisidee angeben.
 - Dimensionsformel für Dualräume, vgl. 6.5.2.
 - (Vergessen habe ich die Dimensionsformel für Lösungsräume 6.3.5. Prof. Unger hat dazu aber nichts gesagt.)
- 11. Beweisen Sie bitte die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt!**
- $U \cap W$ ist Unterraum von V , U und W . Damit ist $U \cap W$ endlichdimensional. Sei x_1, \dots, x_r eine Basis von $U \cap W$. Da $U \cap W$ ein Unterraum von U ist, können wir x_1, \dots, x_r durch u_1, \dots, u_s zu einer Basis von U ergänzen. Analog können wir x_1, \dots, x_r durch w_1, \dots, w_t zu einer Basis von W ergänzen. Man zeigt nun, dass $x_1, \dots, x_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t$ eine Basis von $U + W$ ist.

12. Beweisen Sie bitte die Dimensionsformel für komplementäre Unterräume!

- Diese folgt sofort aus der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt.

13. Beweisen Sie bitte den Rangsatz!

- Nach dem Homomorphiesatz ist $f': V/\text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$ mit $f'(v + \text{Kern}(f)) = f(v)$ ein Isomorphismus (dies gilt auch für endlich erzeugte Vektorräume). Daraus folgt, dass die Dimensionen von $V/\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ gleich sind. Mit der Dimensionsformel für Faktorräume folgt die Behauptung.

14. Sie hatten gesagt, dass $\dim(\text{Hom}_K(V, W)) = \dim(M_{mn}(K))$ gilt. Beweisen Sie das bitte!

- Abbildung ${}_B M_C: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M_{mn}(K)$ über die Bilder der Basiselemente von B definiert. Somit ist die Definition eindeutig. Andererseits kann man jeder $m \times n$ -Matrix A eindeutig eine lineare Abbildung zuordnen, und zwar durch die Abbildung ${}_B f_C: M_{mn}(K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$. Man zeigt nun, dass die Abbildung ${}_B M_C$ bijektiv und linear, also ein Isomorphismus ist. Daraus folgt die Behauptung.

Fazit: Prof. Unger ist äußerst freundlich und versteht es gut, mit ein paar witzigen Bemerkungen dem Prüfling schnell die Anfangsnervosität zu nehmen. Ich kann sie als Prüfer in Lineare Algebra uneingeschränkt weiterempfehlen.

Als Vorbereitung auf die Prüfung sollte man sich die Prüfungsprotokolle auf jeden Fall anschauen, da man so schon einen guten Eindruck bekommt, was überhaupt erwartet wird. Für die meisten (bei mir war es auch so) wird Lineare Algebra I die erste mündliche Prüfung in einem mathematischen Fach sein. Aus eigener Erfahrung muss ich sagen, dass man sich da die ein oder andere falsche Vorstellung macht.

Ferner möchte ich das vom Lehrgebiet Algebra entwickelte virtuelle Karteikartensystem empfehlen. Dieses hat mir unheimlich dabei geholfen, mich auf die mündliche Prüfung vorzubereiten, und es ist auch für die Folgeprüfung in Lineare Algebra II eine tolle Hilfe. Man findet es unter der Adresse:

<http://algebramcs.fernuni-hagen.de/Karten/index.php>

Das System enthält eine Vielzahl an Fragestellungen, die so vielleicht auch mal in einer mündlichen Prüfung dran kommen können.

Viel Erfolg bei Deiner Prüfung!

Prüfungsprotokoll

Kurs: Lineare Algebra I (01102)

Datum: 24.04.2006, 10:50 Uhr, Dauer: ca. 25 min

Prüferin: Prof. Dr. Unger

Beisitzer: J. Liedtke

Note: 1,0

Bei Prof. Dr. Unger hat man die Möglichkeit, mit einem bestimmten Thema anzufangen. Ich habe mir Determinanten ausgesucht.

Determinanten:

- Definition der Determinante einer Matrix
- Was ist S_n , Permutation, Signatur, Fehlstand?
- Was für Spezialfälle der Berechnung von $\det(A)$ gibt es? (habe da alles aufgezählt, 2x2-, 3x3-Matrizen, Transponierte, Inverse, Nullzeile/-spalte, zwei gleiche Zeilen/Spalten, Dreiecksmatrizen).
- Was macht man denn bei Matrizen, die keinen Sonderfall darstellen? (Gauß- Algorithmus bei Matrizen über Körpern, Matrix auf Dreiecksform bringen)
- Worauf muss man denn achten bei der Determinantenbestimmung durch den Gauß- Algorithmus? (Determinanten der Elementarmatrizen erklärt, Determinantenmultiplikationssatz)
- Und wenn die Matrix über einem kommutativen Ring definiert ist? (Laplace)
- Woraus folgt denn der Laplacesche Entwicklungssatz? (Adjunktensatz)
- Was folgt denn noch so aus dem Adjunktensatz? (Cramer-Regel erklärt)
- Eine weitere Folgerung? (A invertierbar .. $\det(A)$ invertierbar; Berechnungsformel für die Inverse von A)
- Wie sehen die Einheitengruppen von Z , Z/mZ , K aus?

Themenwechsel

Vektorräume und lineare Abbildungen:

- Sei V ein Vektorraum, v_1, \dots, v_n Vektoren in V .
- Wann sind die Vektoren lin. unabhängig?
- Wann bilden sie ein Erzeugendensystem?
- Was ist die Dimension eines Vektorraumes?

- Warum besitzen zwei Basen eines Vektorraums die gleiche Basis? (Korollar aus dem Satz von Steinitz)
- Wie lautet das Austauschlemma?
- Nennen Sie alle Dimensionsformeln, die sie kennen!
 - $\dim(U) \leq \dim(V)$
 - $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$ (dabei erklärt, was V/U ist)
 - $\dim(V) = \dim(V^*)$
 - $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ (gesagt, dass $U \cap W$, U , W , $U + W$ alle Unterräume von V sind)
 - $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(W) \cdot \dim(V)$
- Wie sind denn die Nebenklassen definiert?
- Wie addiere ich zwei Nebenklassen?
- Wann sind zwei Nebenklassen gleich?
- Weitere Dimensionsformeln, ... Stichwort Rangsatz?
 - $\dim(V/\text{Kern}(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$ f linear
 - $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$
- Beweisskizzen für folgende zwei Dimensionsformeln:
 - $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$... (jeweils Basen ergänzen wie im Skript)
 - $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(W) \cdot \dim(V)$... Isomorphismus zu $m \times n$ -Matrizen
- Wie würden Sie beweisen, dass $U \cap W$ ein Vektorraum ist? (Unterraumkriterium: gaaaanz ganz simpel skizziert, also Nullvektor ist in U und in W , also auch in $U \cap W$; und dann müsste man zeigen, dass die Schnittmenge gegenüber der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Mehr wollte sie nicht hören)
- Sie haben gesagt, die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung ist ein Isomorphismus, wie konstruiere ich denn eine Matrixdarstellung? (Bilder der Basisvektoren von V als Linearkombination der Basisvektoren von W darstellen)
- Was kann man allgemein über die Bilder einer Basis von V unter einer linearen Abbildung sagen? (Erzeugendensystem von $\text{Bild}(f)$, lin. unab. falls f injektiv, Basis von $\text{Bild}(f)$ falls f injektiv und Basis von W falls f bijektiv) Ende der Prüfung.

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:

Frau Unger ist sehr sehr freundlich und ihre lockere Art wirkt sehr beruhigend auf den Prüfling. Die Fragen, die sie gestellt hat, decken sich fast zu 100 Prozent mit denen aus den anderen Prüfungsprotokollen. Ich hatte mir vor meiner Prüfung eine Prüfung bei Frau Unger in linearer Algebra I und II angeschaut und war auf das hohe Tempo einer solchen Prüfung schon vorbereitet. Für mich war dies die erste mündliche Prüfung seit dem Abitur und ich hatte es mir im Vorfeld als ein wenig langsamer

vorge stellt. Bei der Prüfung sitzt man übrigens mit Frau Unger und dem Beisitzer an einem runden Tisch in ihrem Büro, die Prüfungssituation ist also etwas anders (und entspannter) als z.B. beim Abitur oder irgendwelchen Staatsexamina, bei denen man vor dem Prüfern sitzt und redet. Auf dem Tisch liegt Schmierpapier, auf dem abwechselnd Frau Unger und der Prüfling rumkritzeln. Wichtige Sachen wie z.B. Beweise/Definitionen habe ich alle auf das Konzeptpapier geschrieben, es reichten jedoch immer Skizzen der Beweise aus. Vor meiner Prüfung habe ich mir die anderen Protokolle genau angeschaut und konnte so viele Kleinigkeiten, auf die sie jedes Mal zu Sprechen kommt, im Vorbeigehen dazusagen (z.B. gegen welche Vektoren darf ich im Austauschlemma den Vektor austauschen, Cramer-Regel unpraktisch wegen der vielen Determinanten etc.). Aus diesen Gründen kann ich Frau Unger als Prüferin bestens empfehlen!

Gedächtnisprotokoll zur mündlichen Prüfung
Lineare Algebra I (vom 24.03.2005)

Prüferin: Prof. Dr. Luise Unger

Dauer: ca. 25 min

Note: 1.0

Prüfling: Peter Kreyßig (pkreyssig@gmx.de, falls Fragen auftauchen)

Bei Frau Unger hat man die Möglichkeit sein Wunschthema zu nennen. Mit diesem beginnt dann die Prüfung (damit man nicht direkt auf dem Schlauch steht...). Mein Wahlthema war Vektorräume und lineare Abbildungen. (Ich fürchte die Reihenfolge der Fragen ist nicht unbedingt korrekt...)

Wann sind n Vektoren linear unabhängig?

Linearkombination definiert, linear unabhängig wenn nur die triviale Darstellung des Nullvektors existiert

Und wann sind sie eine Basis?

wenn sie ein Erzeugendensystem des Vektorraums sind, d. h. wenn die Menge ihrer Linearkombinationen gleich dem Vektorraum ist

Formulieren Sie das Austauschlemma oder den Basisaustauschsatz

habe das Austauschlemma hingeschrieben

Und welche Vektoren aus der Basis lassen sich austauschen?

alle bei denen der Koeffizient in der Linearkombination ungleich 0 ist

Wie ist die Dimension eines Vektorraums definiert?

Anzahl der Vektoren einer Basis, falls endlich erzeugt

Und wie ist das mit der Eindeutigkeit?

kann über Basisaustauschsatz und Basisergänzungssatz gezeigt werden (einmal Abschätzung nach unten und einmal nach oben)

Zählen Sie alle Dimensionsformeln auf die Sie kennen!

1. $\dim U \leq \dim V$ (U Unterraum von V)
2. $\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$ (U, W Unterräume und angemerkt, dass dann auch $U + W$ und $U \cap W$ Unterräume sind)
3. $\dim V/U = \dim V - \dim U$ (V/U ist Faktorraum V modulo U ebenfalls ein Vektorraum)
4. $\dim V^* = \dim V$
5. $\dim \text{Hom}_K(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ (Homomorphismenraum lineare Abbildungen von V nach W)
6. $\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = \dim V$ (dabei sind $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ Unterräume von V bzw. W wenn f eine lineare Abbildung zwischen V und W)

Skizzieren sie bitte die Beweise zu 2 bis 6!

2. Basis von $U \cap W$ zu einer von U und W ergänzen, dann zeigen, dass die ergänzten Vektoren mit der Basis von $U \cap W$ eine Basis von $U + W$ sind.
3. U zu einer Basis von V ergänzen (z.B. (u_1, \dots, u_s)), dann ist $(u_1 + U, \dots, u_s + U)$ eine Basis von V/U
4. da $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$ (K als Vektorraum über K betrachtet) ist
5. $\text{Hom}_K(V, W)$ ist isomorph zu $M_{mn}(K)$, wenn $m := \dim W$ und $n := \dim V$
6. sei $\bar{f} : V/\text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$ definiert durch $\bar{f}(v + \text{Kern}(f)) = f(v)$. Dies ist ein Isomorphismus

Wie ist denn die Determinante einer Matrix $A \in M_{nn}(R)$, R ein kommutativer Ring definiert?

Leibnizformel hingeschrieben

Und was bedeuten S_n und sgn ?

S_n die Gruppe der Permutationen in n Buchstaben definiert, Signatur bestimmen durch zählen der Fehlstände

Was ist ein Fehlstand?

Fehlstand erläutert

Und wie berechnet man die Determinante einer Matrix?

Spezialfälle: Nullzeile, -spalte (wegen $\det A^T = \det A$), gleiche Zeile, Spalte, obere, untere Dreiecksmatrix. Falls R ein Körper ist, mit Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform bringen

Wenn R kein Körper ist und kein Spezialfall vorliegt?

mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz auf kleinere Matrizen reduzieren

Woraus folgert man den Entwicklungssatz?

aus dem Adjunktensatz $A^{Ad}A = AA^{Ad} = \det A \cdot I_n$

Was folgert man noch aus dem Adjunktensatz?

die Cramer'sche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, hingeschrieben

Würden Sie die Cramer'sche Regel für die Lösung eines LGS verwenden?

nein, da man den Gauß-Algorithmus zur Verfügung hat und sehr viele Determinanten für die Cramer'sche Regel berechnet werden müssen

Wie ist die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung definiert?

Darstellen der Bilder einer Basis von V als Linearkombination einer Basis C von W . Die Koeffizienten sind die Einträge der Matrix

Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V und $f : V \rightarrow W$ eine lineare

Abbildung, was können sie mir über $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ sagen?

linear unabhängig genau dann wenn f injektiv; Erzeugendensystem genau dann wenn f surjektiv

Wie ist ein lineares Gleichungssystem definiert?

siehe Definition

Wann ist eine Matrix invertierbar?

wenn die Determinante ungleich 0 ist

Mit ungleich 0 bin ich nicht einverstanden.

ups, bei Ringen, wenn $\det A$ invertierbar in R ist

Wie sieht das bei \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus?

$\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ und $a \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ wenn $\text{ggT}(a, m) = 1$

Eindruck, Ablauf der Prüfung:

Die Prüfung lief in einer entspannten Atmosphäre ab. Bei kleineren Ungenauigkeiten fragt Frau Unger nochmals nach, korrigiert man sich dann, hat das keinen Einfluss auf die Note. Es ist nicht so wichtig die einzelnen Details von Beweisen zu kennen, es geht mehr um Beweisskizzen und Zusammenhänge (z.B. Folgerungen aus dem Adjunktensatz, wie kommt man zu den Dimensionsformeln...). Meine nächste Lineare Algebra-Prüfung werde ich wieder bei Prof. Unger machen.

Studienrichtung	Mathematik (Diplom II)
Fach	Lineare Algebra I (Kurs 01102)
Datum	28.10.2004
Prüferin	Prof. Dr. L. Unger
Note	1.0

Frau Unger: So, dann wollen wir doch mal anfangen Herr... Ich erwarte noch ein Telefon von mystischem Inhalt, welches sich leider nicht vermeiden lässt. Vielleicht werden wir also kurz unterbrechen müssen. Mit was möchten Sie denn gerne anfangen? ...

1 Determinanten (Wahlthema)

- Wie ist die Determinante von $A \in M_n(R)$ definiert? R sei ein kommutativer Ring.
 - Leibnizformel hingeschrieben.
 - S_n , σ , Verknüpfungstafeln, Fehlstände und $\text{sgn}(\sigma)$ erklärt.
 - Hinweis, dass diese Formel nur für „kleine“ Matrizen sinnvoll anwendbar ist.
- Was kann man denn tun mit der Determinanten?
 - Invertierbarkeit von $A \in M_n(R)$ beurteilen.
 - Falls man A^{Ad} und $\det(A)$ kennt, ergibt sich $A^{-1} = \frac{A^{Ad}}{\det(A)}$ (Adjunktensatz).
 - Definition einer Adjunkte hingeschrieben. Hinweis vertauschte Indizes.
 - Lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren von A beurteilen.
- Wenn man nun den Adjunktensatz anwenden will, um A^{-1} zu berechnen, worauf muss man da achten?
 - Es muss gelten $\det(A) \in R^\times$ (Einheitengruppe).
 - Einheitengruppen der kommutativen Ringe \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und K hingeschrieben.
 - Hinweis auf die Allgemeinen linearen Gruppen $GL_n(\mathbb{Z})$...
- Nun gibt es Spezialfälle, wo man die Leibnizformel nicht benötigt?
 - Transponierte Matrizen.
 - Matrizen mit Nullzeilen oder -spalten.
 - Matrizen wo Zeilen oder Spalten zweifach vorkommen.
 - Dreiecksmatrizen und als Spezialfall davon Diagonalmatrizen.
- Wie sehen denn die Determinanten der Elementarmatrizen aus, und wie wirkt es sich auf die Determinante aus, wenn man diese Elementarmatrizen von links her an eine Matrix A multipliziert? (Sie hat die Frage bestimmt eleganter gestellt als ich hier :-))
 - Determinanten der drei Elementarmatrizen aufgezählt.
 - Determinantenmultiplikationssatz und seine Anwendung (bezüglich der obigen Frage) erklärt.
 - Durch wiederholtes Multiplizieren mit Elementarmatrizen ergibt sich eine Dreiecksmatrix und von der lässt sich die Determinante einfach bestimmen. Allerdings nur falls gilt $A \in M_n(K)$!
- Was machen wir denn, falls es sich bei einer „grossen“ Matrix über einem kommutativen Ring nicht um einen der oben beschriebenen Spezialfälle handelt?
 - Formel für die Laplace-Entwicklung hingeschrieben (den Beweis wollte sie leider nicht sehen).
 - Laplace-Entwicklung erklärt, Untermatrix, möglichst wenig von Null verschiedene Koeffizienten in der betreffenden Zeile oder Spalte. Durch wiederholte Anwendung reduzieren sich die Dimensionen der Matrizen laufend, bis man die Sarrusregel anwenden kann.

- Erklären Sie mir die Cramer'sche Regel!
 - Diese kann nur angewendet werden, falls $A \in M_m(K)$ und A^{-1} existiert.
 - $\lambda_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ hingeschrieben und A_i erklärt (i -te Spalte durch b ersetzen...).
- Ja, aber da fehlt mir jetzt doch etwas der Kontext?! Was soll denn λ_i sein und was ist b , und um was geht's denn hier eigentlich?
 - Ach ja, da geht's natürlich um ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$.
 - Da A^{-1} existiert, ist $\text{Rg}(A) = n$ und die Lösung des LGS ist eindeutig, d.h. man kann schreiben $\lambda = A^{-1}b = \det(A)^{-1}A^{Ad}b = \det(A)^{-1}(a'_{ij})b = \dots$ (den Beweis ungefragt kurz skizziert).
- Jaaaa, jetzt bin ich zufrieden! Anderes Thema...

2 Vektorräume

- Sie haben einen K -Vektorraum V mit den Vektoren v_1, \dots, v_m . Wann bilden diese Vektoren ein Erzeugendensystem von V ?
 - Wenn man jedes $v \in V$ durch eine Linearkombination dieser m Vektoren darstellen kann.
 - Linearkombination $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ mit $a_i \in K$ hingeschrieben.
- Wann sind diese m Vektoren linear unabhängig?
 - Wenn sich der Nullvektor durch ihre Linearkombination nur auf die triviale Art und Weise darstellen lässt.
 - Linearkombination und Implikation $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ hingeschrieben.
- Wann bilden diese m Vektoren eine Basis von V ?
 - Wenn sie ein Erzeugendensystem bilden und linear unabhängig sind.
- Nun haben zwei Basen eines Vektorraums V ja die gleiche Anzahl Basisvektoren. Wie zeigt man das?
 - Austauschlemma erklärt. Da lege sie Wert auf den Nachtrag, dass man einen der n Basisvektoren nicht durch ein beliebiges $v \in V$ austauschen darf, denn es muss gelten $v \neq 0$, sonst verkleinert man ja „freiwillig“ die Dimension des Vektorraums.
- Darf man denn beim Austauschlemma jeden der n Basisvektoren durch $v \neq 0$ austauschen?
 - Nein, v darf nicht im Erzeugnis der $n - 1$ Basisvektoren liegen, die von der Austauschaktion nicht betroffen sind, ...
 - ... oder anders gesagt, der Basisvektor u_i , der durch v ausgetauscht werden soll, muss an der Erzeugung von v beteiligt sein, d.h. $a_i \neq 0$ an der entsprechenden Stelle in der Linearkombination von v .
- Nennen sie mir eine Folgerung aus dem Austauschsatz von Steinitz!
 - Basisergänzungssatz.
- Schreiben Sie mir alle Dimensionsformeln hin die Sie kennen!
 - Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt zweier Unterräume U und W .
 - Dimensionsformel für die direkte Summe von zwei Unterräumen U und W .
 - Dimensionsformel für einen Unterraum U von V , also $\dim(U) \leq \dim(V)$ und $\dim(U) = \dim(V) \Leftrightarrow U = V$.
- Gilt diese Formel auch für unendlichdimensionale Vektorräume?
 - Zögern meinerseits...

- Kennen Sie einen unendlichdimensionalen Vektorraum?
 - Den der Polynome über einem Körper, also $K[T]$.
 - Ach natürlich! So bilden z.B. die Polynome, welche nur gerade Exponenten haben, einen unendlichdimensionalen Unterraum von $K[T]$. Also gilt obige Formel auch für unendlichdimensionale Vektorräume.
- Weitere Dimensionsformeln, z.B. für Faktorräume?
 - Formel $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$ hingeschrieben.
 - Hier lässt sich sehr schön eine Verbindung zum Homomorphiesatz machen. Denn es gilt $\dim(V/\text{Kern}(f)) = \dim(V) - \dim(\text{Kern}(f))$ und wegen $V/\text{Kern}(f) \simeq \text{Bild}(f)$ auch gerade $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$. Da die Dimensionsformeln fast in jeder Prüfung gefragt werden, lohnt es sich, diesen Zusammenhang aufzeigen zu können, denn dadurch wird die Chance kleiner, dass man eine der obigen Formeln (z.B. für Summe und Durchschnitt) beweisen muss.
 - Aus $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$ lässt sich dann noch gleich eine Verbindung zu linearen GS aufzeigen, denn wegen $\dim(\text{Bild}(f)) = \text{Rg}(f) = \text{Rg}(A)$ gilt $n = \dim(U) + \text{Rg}(A)$.
- Kennen Sie die Dimensionsformel für Homomorphismenräume?
 - $\dim(\text{Hom}_K(V, W)) = mn$, dabei ist $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Es handelt sich hier um die Menge der linearen Abbildungen zwischen den K -Vektorräumen V und W .
- Können Sie diese Formel beweisen?
 - !?! (Diese Frage hatte ich in keinem der Prüfungsprotokolle gelesen). Ähh... nun... es gilt doch $\text{Hom}_K(V, W) \simeq M_{mn}(K)$ und dieser Vektorraum hat doch die Dimension mn ! Das hat sie dann glücklicherweise als Antwort akzeptiert.

3 Lineare Abbildungen

- Wie kann man lineare Abbildungen durch eine Abbildung darstellen?
 - Durch die Abbildung ${}_B M_C : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M_{mn}(K)$ mit $f \mapsto {}_B M_C(f)$.
- Wie geht denn das konkret vor sich?
 - Da ja f bekannt ist, hat man eine Anzahl von linearen Gleichungen. Setzt man nacheinander alle Basisvektoren aus B in f ein und stellt das Resultat als Linearkombination der Basisvektoren aus C dar, kriegt man eine Koeffizientenmatrix, die man dann noch transponiert. Diese transponierte Matrix ist dann die gesuchte Matrixdarstellung von f .
- Ja, das war sehr schön, dann warten Sie doch bitte kurz draussen.

4 Allgemeiner Eindruck

- Ihre Ruhe geht sehr schnell auf den Studenten über, ich war nur gerade am Anfang etwas nervös.
- Sie hat Witz, viel Geduld und gibt gerne auch mal einen Typ, oder stellt die nächste Frage so, dass man von selbst noch Korrekturen oder Ergänzungen anbringt.
- Kleinere Fehler oder Versäumnisse wirken sich nicht auf die Benotung aus.
- Man sollte sich ein paar wichtige, kurze Beweise einprägen. Diese kann man dann unaufgefordert an die Frau bringen, und so vielleicht die schwierigeren vermeiden.
- Ich würde jederzeit wieder eine Prüfung bei ihr absolvieren. Viel Glück!

Mein Dank an alle welche auch Prüfungsprotokolle schreiben.

Gedächtnisprotokoll Prüfung Lineare Algebra 1 (Diplom 2)

Datum / Zeit: 25.09.03 / 13:00 – 13:30

Prüferin: Luise Unger

Note: 1.0

Lineare Algebra 1:

• Gewähltes Thema: Vektorraum:

- Erzeugendensystem: gegeben sind Vektoren u_1, \dots, u_n Element von V . Jeder Vektor v von V kann als Linearkombination von u_1, \dots, u_n dargestellt werden
- Was ist eine Basis: Erzeugendensystem und linear unabhängig, d.h. triviale Darstellung des Nullvektors
- Was sagt der Austauschsatz von Steinitz: Sei u_1, \dots, u_n eine Basis von V , v_1, \dots, v_m linear unabhängige Vektoren, wobei $m \leq n$, dann gibt es Vektoren $u_{i_m+1}, \dots, u_{i_n}$, sodass $v_1, \dots, v_m, u_{i_m+1}, \dots, u_{i_n}$ eine Basis von V bildet. Habe erwähnt, dass $n-m$ Vektoren ausgetauscht werden können.
- Basisbestimmung von V/U : Der Faktorraum hat ja $\dim(V) - \dim(U)$ Elemente. Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V , u_1, \dots, u_m eine Basis von U . Mit dem Ergänzungssatz von Steinitz gilt: $u_{m+1} + U, u_{m+2} + U, \dots, u_n + U$, Achtung: $v + U$ und nicht v !!!
- Definition von V/U : $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$, also die Menge der Nebenklassen.
- Wann sind zwei Nebenklassen gleich: Seien $v + U, v' + U$ zwei Nebenklassen, dann gilt mit dem Kriterium der Gleichheit von Nebenklassen: $v + U = v' + U$ genau dann wenn $v - v' \in U$
- Welche Dimensionsformel gibt es: $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$, $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ und wie sieht der Beweis dieser Formel aus
- Anderer Kontext einer Dim-Formel: Homomorphiesatz, d.h. f_{quer} : $V/\text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$, f_{quer} ist ein Isomorphismus, d.h. $\dim(V/\text{Kern}(f)) = \dim(\text{Bild}(f)) \iff \dim(V) - \dim(\text{Kern}(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$
- Wie ist f_{quer} definiert: $f_{\text{quer}}(v + \text{Kern}(f)) = f(v)$

• Anderes Thema: Determinante:

- Wie ist die Determinante definiert: \rightarrow Leibnitzformel, Permutation, S_n , Signatur erklärt (Fehlstände gerade = 1, ungerade = -1); und habe betont, dass nur für $n \times n$ -Matrizen (=quadratisch) definiert.
- Spezialfälle zur Berechnung: 2×2 -Matrix: Produkt Haupt- minus Nebendiagonale; 3×3 mit Sarrus, Sarrus erklärt; Obere Dreiecksmatrix Produkt der Elemente auf der Diagonalen, natürlich auch für eine untere Dreiecksmatrix; habe noch erklärt, wie diese Dreiecksmatrizen definiert sind.

- Weitere Berechnungsmöglichkeit: Laplace; ausführlich erklärt: Entwicklung nach Zeilen oder Spalten, günstig, wo viele Nullen in der Zeile (oder Spalte) sind; Formel hingeschrieben
 - Wofür braucht man Determinanten: Bestimmung ob eine Matrix invertierbar, Z.B. Lösung eines LGS, d.h. $\det(A) \neq 0$
 - Und wie sieht es mit dem \mathbb{Z} -Körper aus: $\det(A)=1$, oder $\det(A)=-1$ da die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}=\{1, -1\}$; und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: $\text{ggT}(\det(A),m)=1$
 - Wie kann man entscheiden, ob eine Matrix invertierbar ist: mit der Adjungiertensatz, habe den hingeschrieben: $A \cdot A^{\text{Ad}} = A^{\text{Ad}} \cdot A = \det(A) \cdot I_n$
 - Was sind Folgerungen aus diesem Satz: Bestimmung der Inversen von A; Cramersche Regel, habe diese erklärt und betont, dass nur dann anwendbar, falls $\det(A) \neq 0$
- **Anderes Thema: Dualraum:**
 - Definition: $\text{Hom}_K(V,K)=V^*$, d.h die Menge der linearen Abbildungen von V nach K; $B_{M,C} : V^* \rightarrow M_{1n}$
 - Dimension von $\text{Hom}_K(V,K)$: $1 \cdot n = n$, da $B_{M,C}$ ein Isomorphismus ist.
 - Wie ist f^* definiert: $f^*(w^*) = w^* \circ f$

Fazit:

Frau Unger ist eine sehr nette Prüferin und ist wirklich zu empfehlen. Sie versteht es mit ihrer Art und Weise eine sehr entspannte Atmosphäre aufzubauen, was einem die Nervosität bald einmal wegnimmt.

Vordiplom-Prüfung 1102, LA-I

Datum: 10.03.03

Prüfer: Frau Prof. Unger

Dauer: ca. 25 min.

Note: 3.0

Notieren Sie mal, wie eine Determinante berechnet wird.
Leibnitzformel auf dem bereitliegenden Konzeptpapier notiert.

Was ist S_n ?

Symmetrische Gruppe in n Buchstaben erklärt.

Was ist eine Permuatation?

Permutation erklärt.

Was ist sgn ?

sgn erklärt.

Berechnen Sie mal diese 2x2 Determinante nach der Leibnitzformel.

Anhand der von Ihr vorgegebenen 2x2-Matrix erklärt, wie die Leibnitzformel funktioniert.

Welche Sonderfälle gibt es bei Determinanten?

Nullspalte/Nullzeile

Skalares Vielfaches zweiter Zeilen

Gleichheit zweier Zeilen

Wozu braucht man denn überhaupt Determinanten?

Invertierbarkeit prüfen

Lineare Unabhängigkeit prüfen

Und wann ist eine Matrix über einem Körper invertierbar?

$\text{Det}(A) \neq 0$

Warum?

Weil bei Körpern jedes Element $\neq 0$ in der Einheitengruppe liegt

Und bei \mathbb{Z} , wie ist es da?

Einheitengruppe -1 und +1

Und bei $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

Einheitengruppe, wenn $\text{ggT}(\text{Det}(A), m) = 1$

Und wie berechnet man denn Matrizen grösser 3x3?

Obere oder untere Dreiecksmatrix bei Körpern durch Zeilen-/ Spaltenvertauschung.

Was passiert denn bei Zeilen- oder Spaltenvertauschung mit der Determinanten?

Determinante ändert ihr Vorzeichen.

Was aber, wenn Sie eine Matrix $> 3 \times 3$ über einem kommutativen Ring haben?

Laplace-Regel erklärt und Satz nach Laplace notiert.

Woraus folgt denn die Regel von Laplace?

Aus dem Adjunktensatz

Schreiben Sie den mal auf.
 Adjunktensatz notiert.
 Und wie berechnet man nun die Adjunkte einer Matrix?
 Adjunktenberechnung erklärt.
 Was ist denn die Cramersche Regel?
 Anhand eines Beispiels erklärt.
 Voraussetzung für die Cramersche Regel?
 Matrix muss $n \times n$ -Typ sein, und ausserdem invertierbar sein.
 Was ist denn ein Erzeugendensystem?
 wenn $\langle v_1, \dots, v_n \rangle V$ erzeugt, lineare Hülle, etc.
 Wann ist ein Erz.-System eine Basis?
 Wenn es linear unabhängig ist.
 Was ist denn lineare Unabhängigkeit?
 Triviale Darstellung des Nullvektors erklärt.
 Gibt es nur eine Basis?
 Nein.
 Woraus folgert man das?
 Steinitzscher Austauschsatz.
 Was ist die Dimension?
 Anzahl der Basis-Vektoren.
 Dimensionsformeln?
 Alle bekannten Dimensionsformeln aufgezählt.
 Was ist denn der Kern einer lin. Abbildung?
 Kern erklärt.
 Kern(f) ist ja auch ein Vektorraum, beweisen Sie das bitte mal.
 Unterraumkriterien von Kern(f) nachgewiesen.
 Wieso liegt denn $v+v'$ im Kern(f)? Das geht doch nicht immer, oder?
 f ist linear, und daher gilt $f(v+v') = f(v)+f(v')$

Ok, dann warten Sie kurz draussen.

Frau Prof. Unger ist sehr freundlich und nimmt dem Prüfling mit Ihrer natürlichen Art erstmal einen Grossteil der Aufregung. Wenn man etwas nicht weiss, umfragt Sie erstmal. Dadurch kommt man dann meisst selbst auf die Lösung. In schwierigeren Fällen bohrt Sie aber auch nicht lange nach, sondern erklärt nach einiger Zeit, wie es richtig sein müsste, was sich dann natürlich in der Note niederschlägt. Wesentlich ist aber, dass man dadurch nicht aus der Ruhe kommt, sondern unbefangen an die Beantwortung der nächsten Fragen gehen kann.

Da ich mit der linearen Unabhängigkeit, bzw. der triv. Darstellung des Nullvektors Probleme hatte, und gerade die lin. Unabhängigkeit laut Frau Unger ein wesentliches Thema der LA ist, hat Sie ein paarmal nachgebohrt. Als meine Notiz immer noch Fehler aufwies, erklärte Sie mir dann, wie es richtig ist. Das hat sich natürlich dann auf die Benotung niedergeschlagen,

welche ich daher als ausgesprochen fair empfinde.

Ich kann Frau Prof. Unger uneingeschränkt empfehlen. Viel Glück bei Eurer Prüfung!

Lineare Algebra I (01102)

24.02.2003, 11:00 Uhr
Prüfer: Frau Prof. Unger
Dauer: ca. 20 Minuten
Note: 1,0

wählbares Einstiegsthema: Lineare Gleichungssysteme

- Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeffizientenmatrix, Lösbarkeitskriterien, Lösung des homogenen Gleichungssystems plus explizite Lösung, wie erhält man beide
- Zeigen Sie, daß die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ein Vektorraum ist! (Unterraumkriterium)

Basen

- Was ist ein Erzeugendensystem?
- Wann sind Vektoren linear unabhängig?
- Was ist eine Basis?
- Was ist die Dimension?
- Warum haben verschiedene Basen eines Vektorraums gleich viele Elemente? (Basisergängungssatz)
- Wie lautet das Austauschlemma?

Nennen Sie alle Dimenstionsformeln, die Ihnen einfallen!

- Unterräume
- Summen von Unterräumen
- Faktorräume
- Lösungsmengen von homogenen Gleichungssystemen
- Homomorphismenräume
- Dualraum
- Vektorraum im Bezug auf Kern und Bild einer linearen Abbildung
- lineare Abbildung im Bezug auf die zugehörige Matrix und das Bild)

Faktorräume

- Wie ist ein Faktorraum definiert?
- Wann sind zwei Elemente eines Faktorraums gleich?
- Wie ist die Addition in Faktorräumen definiert?

Lineare Abbildungen

- Was ist eine lineare Abbildung?
- Wie kann man eine lineare Abbildung durch eine Matrix darstellen?
- Und wie kann man eine Matrix durch eine lineare Abbildung darstellen?

Determinanten

- Wie berechnet man eine Determinante über einem kommutativen Ring? (Formel mit sigma)
- Wie berechnet man die Inverse einer Matrix über einen kommutativen Ring?

Die Prüfung verlief in sehr angenehmer Atmosphäre. Frau Unger ist wirklich als Prüferin zu empfehlen!