

Lineare Algebra II

Prüfung Mathe Vordiplom II

Prüferin: Frau Prof. Dr. Unger

Datum: August 2007

Note: 1.0

- Wunschthema → Satz und Beweis von Cayley-Hamilton
- Definition: Charakteristisches Polynom
- Wofür ist es wichtig? → Nullstellen = Eigenwerte
- Wofür sind die Nullstellen wichtig? → Diagonalisierung
- Allgemeines Diagonalisierbarkeitskriterium und weiteres Kriterium für Diagonalisierbarkeit
- Ist $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar? → nein
- Definition: Minimalpolynom
- Eigenschaften Minimal- und charakteristisches Polynom: selbe irreduzible Teiler
- Satz über Jordansche Normalform
- Wie sieht die Jordansche Normalform zu $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ aus? → $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- Beweis von Teil (ii) μ_f zerfällt $\Leftrightarrow \exists B: {}_B M_B(f)$ ist eine Jordannormalform
- Matrixdarstellung einer Bilinearform
- Wie gelangt man von $M_B(\beta)$ zu $M_C(\beta)$? → $P = {}_C M_B(\text{id}_V)$, $M_C(\beta) = P^T M_B(\beta) P$
- Was ist das? → Kongruenz
- Welche Normalformen gibt es für Bilinearformen?
 - alternierende: $\beta(v, v) = 0$, kongruent zu $\bigoplus_{i=1}^{\frac{1}{2} \text{rg}(\beta)} A \oplus 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - symmetrische: $\beta(v, w) = \beta(w, v)$, kongruent zu einer Diagonalmatrix
 - symmetrische über \mathbb{R} : kongruent zu $I_k \oplus I_l \oplus 0$

Euch viel Erfolg!

Prüfungsprotokoll im SoSe 2007: Lineare Algebra II

Prüferin: Frau Prof. Dr. Luise Unger

Beisitzerin: Frau Dr. Silke Hartlieb

Dauer: ca. 20 Minuten

Note: 1.0

Frau Unger beginnt die Prüfung immer mit einem kleinen Kennenlerngespräch, bei dem man im Grunde keine falschen Antworten geben kann. Man kann sich bei ihr ein Einstiegsthema wünschen. (hier: das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom)

Wie ist das charakteristische Polynom definiert?

Wozu kann man χ_A benutzen? Die Nullstellen sind die Eigenwerte.

Und warum ist das so toll? Das ist praktisch für die Diagonalisierbarkeit.

Was ist denn Diagonalisierbarkeit?

Und was ist Ähnlichkeit?

Definieren Sie: Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum

Nennen Sie Diagonalisierbarkeitskriterien! Allgemeines Diagonalisierbarkeitskriterium und ein weiteres äquivalentes Kriterium, dass das Minimalpolynom zerfällt und nur einfache Nullstellen besitzen sollte. (KE 3)

Was ist das Minimalpolynom?

Ist diese Matrix diagonalisierbar? $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A = (T-3)^2$ (hatte mich nur einmal verrechnet), $(A-3I_3) \neq 0$, somit ist $\mu_A = (T-3)^2$. Da die Nullstelle 3 also die Vielfachheit 2 besitzt, ist A nicht diagonalisierbar.

Was ist nilpotent? $A^m = 0 \Leftrightarrow \chi_A = T^n$

Ist das eine Äquivalenz? Ja.

Dann beweisen Sie das bitte. (Beweis nach Skript)

Dann gibt es ja den Hauptsatz über Jordansche Normalformen, was besagt der?

Wie ist die Jordansche Normalform von A (siehe oben)?

Da sie nicht diagonalisierbar ist, bleibt nur: $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Es gibt im Beweis des Hauptsatzes eine einfache Richtung und eine schwierige. Zeigen Sie bitte die einfache. (Gemeint war: Die Matrix ist ähnlich zu einer Jordanschen Normalform $\Rightarrow \mu_A$ zerfällt) Jordansche Normalform ist obere Dreiecksmatrix, ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Jetzt bitte die schwierige Richtung. (Beweis nach der Skizze in den Studierhinweisen von Kurseinheit 3) Dabei auch den verallgemeinerten Eigenraum definiert

Wie rechnet man die Matrixdarstellungen von Bilinearformen aus?

Wie hängen zwei Matrixdarstellungen derselben Bilinearform zusammen?

Definition der Kongruenz.

Nennen Sie einige Typen von Bilinearformen und ihre Normalformen!

Alternierend, Definition und Normalform

Symmetrisch Definition und Normalform (Diagonalmatrix und im Körper der reellen Zahlen sogar eine Diagonalmatrix mit 1, -1 und 0 auf der Diagonale)

Was besagt der Trägheitssatz von Sylvester in diesem Zusammenhang?

Wie funktioniert das Jacobi-Verfahren?

Frau Unger versteht es eine sehr lockere Prüfungsatmosphäre zu erzeugen. Bei kleineren Pannen hilft sie mit kurzen Tipps weiter. Kann man sich korrigieren, wirkt sich der Fehler nicht auf die Benotung aus.

Ich danke denen, die selbst Prüfungsprotokolle schreiben und wünsche Euch allen viel Erfolg bei Euren Prüfungen!

Prüfungsprotokoll

Kurs: Lineare Algebra II (01103)

Datum: 24.07.2006, 10:00 Uhr, Dauer: ca. 26 min

Prüferin: Prof. Dr. Unger

Beisitzer: J. Liedtke

Note: 1,0

Bei Prof. Dr. Unger hat man die Möglichkeit, mit einem bestimmten Thema anzufangen. Ich habe mir das charakteristische Polynom (KE 1) ausgesucht.

KE 1:

- **F: Ich gebe Ihnen eine Matrix (a_{ij}) vor, was ist das charakteristische Polynom und warum interessiert es uns eigentlich?**

A: $\det(T \cdot I_n - A)$, Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix

- **F: Was ist ein Eigenwert, was ist ein Eigenvektor?**

A: Definition gegeben, erklärt, dass man bei der Endomorphismen-Schreibweise sehr schön sieht, dass f den Vektor u lediglich um den Faktor λ streckt bzw. staucht. Definition in Matrixschreibweise gegeben.

- **F: Warum interessieren uns denn die Eigenwerte einer Matrix noch?**

A: Falls es eine Basis von V aus Eigenvektoren gibt, kann ich die Matrixdarstellung nur mit diesen Vektoren konstruieren, da $f(u) = \lambda \cdot u$ ist, sind die Eigenwerte dann genau die Diagonaleinträge der resultierenden Diagonalmatrix.

- **F: Es gibt ja noch ein weiteres Polynom, das für uns von Interesse ist, welches Polynom ist das?**

A: Minimalpolynom, Definition gegeben.

- **F: Wie hängen das charakteristische und das Minimalpolynom zusammen?**

A: Gleiche irreduzible Faktoren, Satz von Cayley-Hamilton, μ_A teilt χ_A , χ_A teilt $(\mu_A)^n$

KE 2:

- **F: Sie haben bereits eine Bedingung für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix genannt. Welche weiteren zur Diagonalisierbarkeit äquivalenten Aussagen kennen Sie?**

A: $V = \bigoplus_{i=1}^n E(\lambda_i)$, Charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und algebraische VF = geometrische Vielfachheit für alle Eigenwerte und Minimalpolynom zerfällt in Linearfaktoren und die Vielfachheit der Eigenwerte ist gleich 1 (Folgerung aus dem Hauptsatz über die Jordansche Normalform). Habe dabei alle genannten Begriffe erklärt.

- **F: Ist die folgende Matrix diagonalisierbar?**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A: \chi_A = (T - 2)^2, A - I_n \cdot 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

also ist $\text{Kern}(A - I_n \cdot 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, die algebraische VF (=2) ist ungleich der geometrischen (=1) und A ist nicht diagonalisierbar.

- **F: Sie hatten bereits kurz die JNF angesprochen, wie würde die JNF für diese Matrix aussehen?**

A: Auf der Hauptdiagonalen steht jeweils 2 (=einziger Eigenwert)...

- **F: Schreiben Sie doch mal die möglichen JNFen auf.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **F: Welche von beiden kann es nicht sein?**

A: (war an diesem Punkt etwas verwirrt, habe zuerst gesagt, dass die erste Matrix ja als Diagonalmatrix eine besondere JNF darstellt, wusste dann aber nicht weiter und wollte die Rangpartition bestimmen, um auf die nilpotente NF zum Eigenwert 2 zu kommen. Prof. Unger hat mir dann die Antwort erklärt)

- **A(Unger): Sie haben ja gerade richtig gezeigt, dass A nicht diagonalisierbar ist, dann kann ja die erste Matrix nicht die JNF zu A darstellen und es muss die zweite sein.**

(wenn ich mich recht erinnern kann habe ich fast genau diese Rechenaufgabe beim Besuch einer LA2-Prüfung einer Kommilitonin gesehen. Anscheinend nimmt Prof. Unger dieses Beispiel sehr gerne, weil man so Diagonalisierbarkeit und JNF miteinander verknüpfen kann. Es lohnt sich also, sich dieses Beispiel vorher mal gut anzuschauen, schwer ist es ja wirklich nicht, nur man muss in der Situation flott drauf kommen.)

- **F: Wir haben uns ja neben den diagonalisierbaren Matrizen auch nilpotente Matrizen angeschaut, was ist denn eine nilpotente Matrix?**

A: Definition gegeben

- **F: Man kann am charakteristischen Polynom erkennen, ob die Matrix nilpotent ist. Wie sieht denn das ch. Polynom in diesem Fall aus?**

A: T^n

- **F: Beweisen Sie dies bitte.**

A: (Diesen Beweis fragt Prof. Unger anscheinend JEDES MAL.) Eine Richtung: Cayley-Hamilton. Andere Richtung: T^m ist ein Polynom, in das ich A einsetzen kann und erhalte die Nullmatrix...s. KE2

- **F: Wie sieht eine Normalform hierzu aus?**

A: $N(p)$, Blockdiagonalmatrix, $N(p_k)$, Partition erklärt

- **F: Wie kann ich eine solche Normalform bestimmen?**

A: Rangpartition bestimmen, dualisieren, NF aufstellen.

KE 3:

- **F: Wie lautet der Hauptsatz über die JNF?**

A: Minimalpolynom zerfällt in LFein .. es gibt eine Basis B mit einer JNF als Matrixdarstellung zu dieser Basis und zwei JNF sind genau dann ähnlich, wenn sie sich nur durch die Anordnung der Jordanblöcke unterscheiden

- **F: Im Beweis zum Hauptsatz ist eine Implikation leicht, die andere ist schwer. Wie sieht die Leichte aus?**

A: wenn es eine JNF als Matrixdarstellung gibt, dann zerfällt das Minimalpolynom in LFein (wie im Vorwort zu KE3)

- **F: Aber Sie haben ja dann nur das Charakteristische Polynom für die JNF und nicht für eine Matrix A bestimmt.**

A: Ja, aber A liegt annahmegemäß in der Konjugationsklasse der JNF, die Matrizen sind also ähnlich und ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische bzw. Minimalpolynom.

- **F: Wie sieht die schwere Beweisrichtung aus?**

A: Wie im Vorwort zu KE3 die Beweisidee erzählt mit einigen Details (hier kann man glaube ich echt einige Minuten gewinnen, indem man kleine Details nennt...z.B. habe ich erwähnt, dass ich die Matrixdarstellungen der Einschränkungen von f auf die verallgemeinerten Eigenräume wie f aufspalten kann in einen diagonalisierbaren und einen nilpotenten Teil, der erste Teil $id_V * \lambda_i$ ist und der nilpotente Teil $f - id_v \cdot \lambda_i$ und ich nun jeweils eine Basis B_i des verallgemeinerten Eigenraumes so wählen muss, dass der nilpotente Teil die nilpotente NF zu einer Partition der algebraischen VF von λ_i wird und diese Wahl der Basis die Matrixdarstellung des diagonalisierbaren Teils nicht verändert, da diese ja aus der Identität auf V besteht).

Ende der Prüfung

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung: Wie bereits aus allen anderen Protokollen zu LA1 und LA2 hervorgeht ist Prof. Unger wirklich uneingeschränkt als Prüferin zu empfehlen. Ich hatte bei der Rechenaufgabe zur JNF Schwächen und hatte erwartet, dass sich dies auch in der Note bemerkbar machen würde. Mein Aussetzer hatte aber im Endeffekt keinen Einfluss auf die Note. Ich bin an vielen Stellen zwischen der Endomorphismen- und der Matrix-Schreibweise hin und hergesprungen oder habe teilweise beide angegeben. Bin dadurch ein paar Mal durcheinander gekommen und habe mich sprachlich verhaspelt, was ich dann gleich wieder korrigiert habe. Dies zusammen mit der Rechenaufgabe, bei der ich ziemlich ins Grübeln kam und der Beweisskizze der JNF hat wohl dazu geführt, dass bei mir nur KE 1 bis 3 dran kamen! Es kamen noch nicht mal kleine Fragen zu den übrigen Kurseinheiten...

Studienrichtung	Mathematik (Diplom II)
Fach	Lineare Algebra II (Kurs 01103)
Datum	28.10.2004
Prüferin	Prof. Dr. L. Unger
Note	1.0

1 Minimal- und charakteristisches Polynom (Wahlthema)

- Wie ist das Minimalpolynom definiert?
 - Definition aufgeschrieben.
 - Eigenschaften aufgezählt.
- Wie ist das charakteristische Polynom definiert?
 - Definition aufgeschrieben.
 - Eigenschaften aufgezählt (auch Cayley-Hamilton).
 - Hinweis auf Teilungsverhältnisse von μ_A und χ_A , gemeinsame Nullstellen.
- Welche Kriterien für Diagonalisierbarkeit kennen Sie?
 - Hinweis, dass Diagonalisierbarkeit wichtig ist im Zusammenhang mit der Klassifizierung von Endomorphismen.
 - Matrixdarstellung ist eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten, Definition von Eigenwerten.
 - $V = \bigoplus_{i=1}^r E(\lambda_i)$, Definition von $E(\lambda_i)$.
 - χ_A zerfällt und es ist $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$ und $\gamma(\lambda)$ definiert.
 - μ_A zerfällt und hat keine mehrfachen Nullstellen.
- Wann ist eine Matrix nilpotent und wie sieht eine entsprechende Normalform aus?
 - $\chi_A = T^n \Leftrightarrow A$ ist nilpotent (mit Beweis ;-).
 - $N(p) = \bigoplus_{i=1}^s N(p_i)$ erklärt anhand eines Beispiels.
 - Erklären wie sich die Partition p aus der Rangpartition q berechnet.
- Wie ist eine Jordansche Normalform definiert?
 - $JNF = \bigoplus_{i=1}^r J(\lambda_i, p(\lambda_i))$, Hauptsatz.
 - Beweisidee erklärt.

2 Äquivalenzrelationen

- Was bedeutet Kongruenz zweier Matrizen?
 - $M_C(\beta) = P^T M_B(\beta) P$ erklärt.

3 Bilinearformen

- Wie berechnet sich die Matrixdarstellung einer Bilinearform?
- Welche Arten von Bilinearformen kennen Sie?
 - Nicht ausgeartet ($\text{Rg}(A) = n$).
 - Symmetrisch ($A = A^T$).
 - Alternierend ($a_{ii} = 0$ und $A = -A^T$).
 - Schiefsymmetrisch ($A = -A^T$).
- Wie sehen die Normalformen dieser Bilinearformen aus?
- Was besagt der Trägheitssatz von Sylvester und wann gilt er?

4 Allgemeiner Eindruck

- Ihre Ruhe geht sehr schnell auf den Studenten über, ich war nur gerade am Anfang etwas nervös.
- Sie hat Witz, viel Geduld und gibt gerne auch mal einen Typ, oder stellt die nächste Frage so, dass man von selbst noch Korrekturen oder Ergänzungen anbringt.
- Kleinere Fehler oder Versäumnisse wirken sich nicht auf die Benotung aus.
- Man sollte sich ein paar wichtige, kurze Beweise einprägen. Diese kann man dann unaufgefordert an die Frau bringen, und so vielleicht die schwierigeren vermeiden.
- Ich würde jederzeit wieder eine Prüfung bei ihr absolvieren. Viel Glück!

Mein Dank an alle welche auch Prüfungsprotokolle schreiben.

Gedächtnisprotokoll Prüfung Lineare Algebra 2 (Diplom 2)

Datum / Zeit: 25.09.03 / 13:30 – 14:00

Prüferin: Luise Unger

Note: 1.0

Lineare Algebra 2:

• Gewähltes Thema: Das charakteristische Polynom

- Ausgangsmatrix: $A \in M_{nn}(K)$ Wie ist χ_A definiert: $\chi_A = \det(T^*I_n - A)$, $\chi_A(A) = 0$ (Caley Hamilton erwähnt), normiert
- Wofür kann man χ_A brauchen: Diagonalisierbarkeit, dabei kam ich auf die Eigenwerte einer Matrix: \rightarrow Nullstellen des char. Polynoms, somit genau dann Diagonalisierbarkeit, falls χ_A in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Nullstellen enthält
- Definition von Ähnlichkeit: Zwei Matrizen $A, B \in M_{nn}(K)$ sind genau dann ähnlich wenn es eine Matrix $S \in M_{nn}(K)$ gibt, S invertierbar, sodass $A = S^{-1} * B * S$ gilt
- Kennen Sie noch andere Diagonalisierbarkeitskriterien:
 - V als direkte Summe der Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten $E(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq r$
 - $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ für alle Eigenwerte von A , habe diese Begriffe erklärt.
- Folgende Matrix $\in M_{22}(K)$ gegeben, ist diese diagonalisierbar
 - \rightarrow geprüft, ob $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ gilt, also über das char. Polynome die Eigenwerte bestimmt, dann die Algebraische und geometrische Vielfachheit

• Anderes Thema: Bilinearformen

- Welche Bilinearformen kennen Sie:
 - nicht ausgeartet: $\text{Rg}(A) = n$,
 - symmetrisch: $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$
 - alternierend \leftrightarrow schief-symmetrisch: $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$
 - adjungiert: $\langle f^* A d(v), f(w) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$
 - selbstadjungiert: $\langle f^*(v), f(w) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$
- Habe so nebenbei erwähnt, dass Kongruenz für Bilinearformen und Ähnlichkeit für Endomorphismen ist, dabei definierte ich Kongruenz. Da hat mich Frau Unger beinahe erwischt: Zwei Basen B, C von V , $M_B(\beta)$, $M_C(\beta)$. Wie hängen diese Matrizen zusammen? Da geht es um Kongruenz
- Kennen Sie eine Normalform: Ich habe die NF zur alternierenden BF genommen und die Blöcke auf der Diagonalen „0, 1, -1, 0“ erwähnt und dass die Anzahl $\frac{1}{2} * \text{Rg}(\beta)$ ist. Der Rest dieser Blockdiagonalmatrix hat Nullen.
- Kennen Sie die Beweisidee der JNF:
 - χ_A zerfällt in Linearfaktoren, mit r verschiedenen Eigenwerten.

- Seien B_1, \dots, B_r die Basen zu den verallgemeinerten Eigenräumen $V(\lambda_i)$, welche f -invariant sind und sei $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ Basis von V , dann gibt es eine Matrix, welche die Direkte Summe der A_i , $1 \leq i \leq r$ ist, diese Matrizen stehen auf der Diagonalen und sehen wie folgt aus: $A_i = B_i^{-1} M_i B_i$ ($M_i = f|_{V(\lambda_i)}$), also die Darstellung von f bezüglich der Basis B_i , wobei f auf den verallgemeinerten Eigenraum eingeschränkt ist
- **Anderes Thema: Minimalpolynom:**
 - Was ist das Minimalpolynom:
 - $\mu_A(A) = 0$ kleinsten Grades
 - teilt das char. Polynom und alle Polynome in der Form $p(A) = 0$
 - normiert
- **Anderes Thema: Nilpotenz:**
 - Wie ist Nilpotenz definiert: Sei $A \in M_n(K)$, mit Nilpotenzindex m dann ist A nilpotent, falls $A^m = 0$ und $A^{m-1} \neq 0$
 - Wie sieht das char. Polynom aus: $\chi_A = T^n$, und musste dies in beide Richtungen beweisen: $\chi_A = T^n \iff A$ nilpotent. Es klappte hervorragend
 - Wie sieht der Hauptsatz über nilpotente Endomorphismen aus: χ_f zerfällt, sei m der Nilpotenzindex von f , $f \in \text{End} V$, sei $1 \leq i \leq m$, sei für alle q_i : $q_i = \text{Rg}(f^{i-1}) - \text{Rg}(f^i)$, $q = (q_1, \dots, q_m)$, dann gibt es eine Basis B , sodass $B^{-1} M_B(f) = N(p)$ ist. Dabei ist p die duale Partition zu q .

Fazit:

Frau Unger ist eine sehr nette Prüferin und ist wirklich zu empfehlen. Sie versteht es mit ihrer Art und Weise eine sehr entspannte Atmosphäre aufzubauen, was einem die Nervosität bald einmal wegnimmt.

**Gedächtnisprotokoll
zur Mündlichen Vordiplomprüfung in Lineare Algebra II bei Frau Unger
am 10.02.03 um 9.30 Uhr**

Grober Überblick über die gefragten Themen:

Jordansche Normalform

Bilinearform

1. Jordansche Normalform:

☞ woran erkennt man, dass eine Matrix diagonalisierbar ist?

Kam dann gleich mit der Definition des charakteristischen Polynoms und habe erwähnt, dass eine Matrix dann diagonalisierbar ist, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und außerdem die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmt. Dabei ist die algebraische Vielfachheit die Potenz des Eigenwertes im Charakterischen Polynom. Dann musste ich wiederum erklären, dass ein Eigenwert eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraums zu einem Eigenwert, $\dim(\text{Kern}(A - \lambda I_n))$. Dabei habe ich auch noch erklärt, dass es zu jedem EW auch einen Eigenvektor mit $Au = \lambda u$ gibt, wobei $u \neq 0$ gelten muss. Bei einer diagonalisierbaren Matrix gilt außerdem, dass der Vektorraum die direkte Summe der Eigenräume zu den einzelnen Eigenwerten ist. Desweiteren ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn jeder Eigenwert nur in der Potenz eins im Minimalpolynom vorkommt. (Zwischendurch wurde ich immer wieder von Frau Unger unterbrochen, und mit dem Kommentar versehen, das kommt erst später. Außerdem auch zum Teil in die Richtung gelenkt, in der sie mich dann haben wollte.)

☞ was ist das Minimalpolynom?

Ist ein normiertes Polynom kleinsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_A(A) = 0$.

Desweiteren teilt es jedes Polynom, mit der Eigenschaft $p(A) = 0$. Der Satz von Cayley-Hamilton (Hilfe, wie schreibt man denn den Kern???) besagt, dass $\chi_A(A) = 0$. Dadurch teilt μ_A χ_A und die beiden besitzen die gleichen Linearfaktoren.

☞ Ist die Matrix diagonalisierbar?

Einziger Eigenwert: 2, die algebraische Vielfachheit ist zwei, allerdings ist die geometrische Vielfachheit ($\dim(\text{Kern}) = 1$) gleich eins, und somit ungleich der algebraischen, also ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

☞ wie sieht die Jordansche Normalform der Matrix aus?

, denn die andere Möglichkeit wäre: und dann wäre die Matrix diagonalisierbar.

☞ **neben Diagonalmatrizen gibt es auch noch nilpotente Matrizen. Woran erkennt man die?**

$A^m = 0$, wobei m der Nilpotenzindex ist. Außerdem ist das charakteristische Polynom von diesen Matrizen gleich T^n .

☞ **Können Sie das Beweisen?**

Die Richtung charakteristisches Polynom ist $T^n \rightarrow A$ nilpotent habe ich noch irgendwie hingekriegt. Aber bei der anderen Richtung hatte ich dann überhaupt keine Ahnung.

☞ **Wie lautet der Hauptsatz der Jordanschen Normalform?**

(Mist, den hätte ich auswendig lernen sollen!) Naja, hab dann erzählt, dass jede Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt ähnlich zu einer Jordanschen Normalform ist. Die JNF ist bis auf die Anordnung der Jordan-Blöcke eindeutig bestimmt.

☞ **Wie sieht so eine Jordanzerlegung aus?**

Es ist eine Blockdiagonalmatrix, die aus Jordanblöcken besteht. Hab da kurz mal aufskizziert.

☞ **Beweisskizzierung zur JNF:**

hab dabei nen bißerl gestockt, und die auch nicht mehr ganz hingekriegt, hab erweiterte Eigenvektoren und Eigenräume definiert, und außerdem auch noch erwähnt, dass die Dimension des Erweiterten Eigenraums V gleich der algebraischen Vielfachheit ist. Außerdem kann K^n als direkte Summe der erweiterten Eigenräume dargestellt werden. Wichtig dabei ist, dass jeder erweiterte Eigenraum f -invariant ist. (hatte ich vergessen.) und dann kann man die darstellende Matrix als Blockdiagonalmatrix darstellen.

☞ **Jordanzerlegung:**

diese besagt, eine Matrix, deren charakteristisches Polynom zerfällt, lässt sich in eine diagonalisierbare Matrix und eine nilpotente Matrix zerlegen. Mit $A = A_d + A_n$ und damit diese eindeutig ist, muss noch gelten: $A_d A_n = A_n A_d$

2. Bilinearformen:

☞ **Wie ist eine Bilinearform definiert?**

Es gilt: $\beta: V \times V \rightarrow K$ mit $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w)$ und $\beta(av, w) = a\beta(v, w)$ mit v, w aus V , und a aus K .

☞ **Welche verschiedenen Bilinearformen gibt es, und wie sieht die jeweilige darstellende Matrix aus?**

Nicht ausgeartete Bilinearform \leftrightarrow Rang der Matrix gleich n
symmetrische Bilinearform \leftrightarrow Matrix auch symmetrisch

alternierende Bilinearform \leftrightarrow Matrix schiefssymmetrisch

schiefsymmetrische bilinearform

habe dann den Zusammenhang zwischen alternierender und schiefssymmetrischer Bilinearform auch noch erläutert.

☞ **Gibt es zu diesen auch Normalformen?**

Habe dann mal mit der alternierenden NF angefangen und diese aufgemalt.

☞ **Was bedeutet Kongruenz?**

Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt zwei Matrizen A, B sind kongruent, wenn es eine invertierbare Matrix P mit $A = P^T B P$ gibt.

☞ **Wie sieht die Normalform zu einer symmetrischen Bilinearform aus?**

Ist eine Diagonalmatrix mit immer der gleichen Anzahl von positiven als auch negativen Werten auf der Diagonalen. (Trägheitssatz von Sylvester)

☞ **wie können die Diagonalelemente auf eine besonders einfache Art errechnet werden?**

Verfahren von Jacobi, Δ_{i-1} / Δ_i auf der Diagonalen, wobei ich noch erklärt habe, was die Δ sind, und dass diese nicht null werden dürfen.

☞ **Nennen Sie mir ein Beispiel für einen Euklidischen Vektorraum:**

\mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt, z.B. $\langle v, w \rangle = v^T w$. Wobei ein Skalarprodukt eine positiv definite, symmetrische Bilinearform ist. Habe dabei dann gleich auch noch erklärt, was denn positiv definit bedeutet.

☞ Dann kamen nen paar weitere Fragen, wodurch Fr. Unger zur Orthogonalen Abbildung kommen wollte. Hatte leider echt nicht verstanden, worauf Sie denn jetzt hinaus will.

☞ **Wie sieht die darstellende Matrix eines orthogonalen Endomorphismus aus?**

Das ist eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{-1} = A^T$

☞ **Gibt es dazu auch eine Normalform?**

Ja, gibt es mit zuerst 1, dann -1 und dann noch Blöcke A mit $A = \dots$ auf der Diagonalen. Wobei ich auch noch erklärt hab, wie die Blöcke A aussehen.

Naja, ich hoffe, ich habe jetzt noch das wichtigste auf die Reihe gekriegt!

Vordiplomprüfung Lineare Algebra II

Kurs 1103 (04/99)

Prüfer: Prof. Dr. L. Unger

Beisitzer: Akad. Oberrat Dr. D. Brümmer

Datum: 13.12.2000

Note: 2,3

Dauer: 25 min

geprüfte Themen:

I. Determinanten

- Definition
- Leibnizsche Determinantenformel
- Permutationen
- Berechnung von Determinanten
- Laplacescher Entwicklungssatz
- Cramersche Regel

II. Diagonalisierbarkeit/Triangulierbarkeit

- Eigenwert/Eigenvektor
- Charakteristisches Polynom, Minimalpolynom
- Satz von Hamilton-Cayley
- Normalformenproblem

Protokoll:

- *Erzählen Sie mal alles, was Sie über Determinanten wissen!*

Def. Determinante:

Sei M eine $n \times n$ -Matrix über K , $n \in \mathbb{N}$.

Eine Abbildung $\det: M \rightarrow K$ heißt Determinante falls gilt:

- det ist multilinear, also linear in jeder Zeile, d. h. es muß gelten:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die restlichen Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ bleiben fest bzw. unverändert, was hier durch die Punkte angedeutet wird.

- det ist alternierend, d. h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$. (Insbes. ändert vertauschen zweier Zeilen das Vorzeichen der Determinante)
- det $E_n = 1$

(Das sieht formal etwas anders aus als im Kurstext, aber ich finde es so wesentlich anschaulicher und Frau Unger fand es so auch okay.)

- *Sagt das denn jetzt schon etwas über die Existenz und die Eindeutigkeit von Determinanten aus?*

Nein, Existenz und Eindeutigkeit kann man aber mit der Leibnizschen Determinantenformel zeigen.

- *Und wie lautet die?*

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i)i}$$

Weil ich damit jetzt nicht den recht aufwendigen Beweis über Existenz und Eindeutigkeit von den oben definierten Determinanten führen wollte, worauf der Dialog nun eigentlich hinaus lief, habe ich etwas getrickt: Ich habe absichtlich einen kleinen Fehler in obige Formel eingebaut und $\text{sgn}()$ weggelassen, um ihn dann nach einer kurzen Hilfestellung selbst wieder korrigieren zu können - und um damit unbemerkt und ohne viel Punktabzug vom Thema abzulenken. Hat auch ganz gut geklappt, aber ich hatte im Nachhinein das Gefühl, daß Frau Prof. Unger den Beweis ohnehin nicht hätte sehen wollen. Wie auch immer, nach dem Fehler kam prompt die Hilfestellung in Form der nächsten Frage:

- *Das stimmt aber noch nicht so ganz. Was ist denn da jetzt n und was ist σ ?*
 n ist die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der quadratischen Matrix A und σ sind die Permutationen aus der Permutationsgruppe S_n . S_n ist die Menge aller bijektiven Permutationen über \mathbb{N}_n . Ach! Jetzt hab ich den Fehler. Da fehlt ja die Signumsfunktion... ;-)

- *Was ist denn das Signum einer Permutation?*
 $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$ und $\text{inv}(\sigma)$ ist die Anzahl der Fehlstände bzw. Inversionen, also die Anzahl aller Transpositionen (i, k) mit $i < k$ aber $\sigma(i) > \sigma(k)$.

- *Gut, dann rechnen Sie doch mal eine 2x2-Matrix mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel aus.*

Zunächst ist $\sigma_1 = \varepsilon$, $\sigma_2 = (1\ 2)$, also $\text{sign}(\sigma_1) = 1$ und $\text{sign}(\sigma_2) = -1$. Somit ist dann nach der Leibnizschen Determinantenformel wie zu erwarten war

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

Genauso erhält man dann bei 3x3-Matrizen die Regel von Sarrus, hier hat man dann allerdings $3! = 6$ Permutationen zu berücksichtigen.

- *Eignet sich denn diese Formel, um Determinanten im Allgemeinen zu berechnen?*
 Nicht wirklich. Man könnte damit im Endeffekt natürlich schon auch Determinanten berechnen, doch ist das eher unbequem - insbesondere bei schwach besetzten Matrizen und für große n , da es ja $n!$ Permutationen gibt, über die dann summiert wird. Man verwendet die Leibnizsche Determinantenformel deshalb überwiegend für Beweise, z. B. um zu zeigen, daß die Determinante von Dreiecksmatrizen gerade $\prod \alpha_{ii}$ (also das Produkt der Diagonalelemente) ist. Um wirklich praktisch Determinanten zu berechnen, gibt es meist geschicktere Möglichkeiten.

- *Ja?*

Ja, man kann die Matrix zum Beispiel mittels elementarer Zeilen- oder Spaltenumformungen triangulieren, dann ist die Determinante ja unmittelbar auszurechnen (das Produkt der Diagonalelemente). Diesbezügliche Umformungsregeln sind:

- Bei Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem α aus K ändert sich $|A|$ um den Faktor α
- Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Addition des α -fachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

Weiterhin könnte man mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach einer bestimmten

Zeile oder Spalte entwickeln.

Bei Entwicklung nach der k -ter Spalte:

$$|A| = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} (-1)^{i+k} |A_{ik}|$$

wobei die A_{ik} aus A dadurch hervorgehen, daß die i -te Zeile und die k -te Spalte von A entfernt werden. Wenn man nach der i -ten Zeile entwickeln will, wird entsprechend über die Spalten, also über die k aufsummiert.

(Das ganze hab ich dann nochmal anschaulich an einer Skizze erklärt. Siehe hierzu Kurstext bzw. Fischer oder Beutelspacher)

- *Gut, ich nenne Ihnen jetzt ein paar spezielle Matrizen und Sie sagen mir, wie die Determinante lautet bzw. wie Sie an die Sache gehen würden, wenn Sie die Determinanten zu berechnen hätten.*
 - Eine Zeile der Matrix ist Null? - Determinante ist 0.
 - Die Matrix ist eine Diagonal- oder Dreiecksmatrix? - Produkt der Diagonalelemente.
 - Sei $\det(A)$ bekannt. Was ist dann $\det(\alpha A)$? - Nach kurzem Zögern: $\alpha^n \det(A)$.
 - Seien $\det(A)$ und $\det(B)$ bekannt. Was ist dann $\det(AB)$? - $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

- *Prima. Aber wofür braucht man denn jetzt die Determinanten eigentlich?*

Naja, man kann damit z. B. prüfen, ob eine Matrix invertierbar ist (gdw. $\det(A) \neq 0$) oder mit der Cramerschen Regel sogar lineare Gleichungssysteme lösen.

Das geht so: Man hat ein LGS der Form $Ax = b$. Ist dann $\det(A) \neq 0$, dann hat das LGS

eine eindeutig bestimmte Lösung $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ mit $\xi_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|}$

$A_i(b)$ entsteht hier, indem man den i -ten Spaltenvektor von A durch b ersetzt. Die Cramersche Regel ist natürlich nur anwendbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

- *Und nun zu etwas völlig anderem: Was wissen Sie denn über Eigenwerte und Eigenvektoren?*

Wenn $\exists v \in V, v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$ heißt $\lambda \in K$ Eigenwert und v Eigenvektor von f .

Hier habe ich natürlich dummerweise zuerst die Bedingung $v \neq 0$ vergessen, was mir aber auf Frau Ungers Bemerkung "Dann hätte ja aber doch jedes f immer einen Eigenwert..." zum Glück gerade noch rechtzeitig eingefallen ist.

- *Können Sie mir eine Matrix nennen, die einen Eigenwert besitzt und eine, die keinen besitzt?*

Hier hat sie mich etwas auf dem falschen Fuß erwischt. Nach kurzem Überlegen kam ich darauf, daß Nullmatrix Θ und Einheitsmatrix E_n Beispiele für Matrizen mit Eigenwerten sind. Eine Matrix ohne Eigenwerte konnte ich mir aber auf die Schnelle nicht zusammen bauen. Sie nannte mir dann die Drehungsmatrix und begründete es nochmal an einer Skizze.

- *So, wie kann ich denn jetzt Eigenwerte einer Matrix berechnen?*

Die Eigenwerte einer Matrix (oder eines Endomorphismus) sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A := \det(x E_n - A)$

- *Wozu braucht man die Eigenwerte überhaupt?*

Um zu prüfen, ob eine Matrix diagonalisierbar bzw. triangulierbar ist.

- *Wann ist das der Fall?*

Eine Matrix ist triangulierbar, gdw. das charakteristische Polynom zerfällt. Sie ist diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom darüber hinaus nur einfache Nullstellen hat (Achtung: Die Implikation geht hier nur in die eine Richtung). Da auf algebraisch abgeschlossenen Körpern jedes Polynom zerfällt, ist eine Matrix über einem solchen Körper natürlich immer triangulisierbar.

- *Zu guter letzt: Wie ist das Minimalpolynom definiert?*
Das eindeutig bestimmte, normierte Polynom kleinsten Grades μ_A mit $\mu_A(A) = 0$ heißt Minimalpolynom von A. (Hier habe ich die Normiertheit vergessen.)
Nach dem Satz von Hamilton-Cayley teilt das Minimalpolynom das charakteristische Polynom $(\mu_A \mid \chi_A)$ und es gilt außerdem: χ_A zerfällt $\Leftrightarrow \mu_A$ zerfällt.

Eindruck

Frau Unger ist wirklich super nett und hilft einem auch auf die Sprünge, wenn einem nicht gleich alles einfällt bzw. man was übersehen hat. So weiß man immer, wo man dran ist - also ob eine Frage zur Zufriedenheit beantwortet wurde oder nicht. Wenn man mal was wirklich gar nicht weiß, dann bohrt sie auch nicht bis zur totalen Verunsicherung weiter, wie das ja leider manch andere Prüfer machen.

Ich konnte ein sehr aufschlußreiches Vorgespräch mit ihr führen, in dem wir die wesentlichen Prüfungsinhalte festgelegt haben.

Ich habe aus terminlichen Gründen erst zwei Tage vor der Prüfung angefangen, mich vorzubereiten, weshalb mir ja auch ein paar kleinere Patzer passiert sind. Deshalb fand ich die Benotung auch wirklich fair.

Fazit: Wärmstens zu empfehlen, auch wenn Frau Prof. Unger auf den ersten Eindruck ein klein wenig hektisch wirkt.

Tips zur Vorbereitung

Zur Prüfungsvorbereitung sind meines Erachtens neben den Studentags-Skripten von Manfred Schulte und der Kurzzusammenfassung von Christian Eißner auch das Buch "Lineare Algebra" von Gerd Fischer sowie das gleichnamige Buch von Albrecht Beutelspacher sehr empfehlenswert.

Viel Erfolg bei Eurer Prüfung!