Gedächtnisprotokoll
Vordiplom-Prüfung Analysis II

Kurse: Analysis II (0133)

Prüfer: Prof. Dr. Boos

Termin: 28.03.2007

Dauer: 25 - 30 min

Note: 1,0

Vorbemerkung: Prof. Boos bietet die Möglichkeit an, zu Beginn der Prüfung ein Kurzreferat (Dauer: max. 4 min) zu einem frei wählbaren Thema des Kurses zu halten. Ich hatte das Thema der ersten Kurseinheit, „Normen, Metriken, Räume, Konvergenz“ gewählt. In Punkt 1 liste ich auf, was ich in diesem Referat angesprochen habe.

1. Kurzreferat: „Normen, Metriken, Räume, Konvergenz“

- Definition von Metrik und Norm
- Erzeugung von Metriken (induzierte Metrik)
- Definition von Umgebung
- Topologie von $\mathbb{R}^n$
- Hausdorffeigenschaft
- Konvergente Folgen in metrischen Räumen, Grenzwert
- ε-n_0-Kriterium
- Satz von Bolzano-Weierstraß
- Gleichwertigkeit von Normen (falls Vektorraum endlichdimensional)
- Definition von Cauchyfolge
- Begriff des vollständigen metrischen Raumes und des Banachraumes
- $\mathbb{R}^n$ ist Banachraum für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$

2. Was sind zusammenhängende Mengen?

- Definition 2.4.5
- Analogon zu den Intervallen in $\mathbb{R}$

3. Wir hatten in diesem Zusammenhang einen Stetigkeitssatz. Wie lautet der?

- Satz über das stetige Bild zusammenhängender Mengen 2.4.9

4. Wie lautet der Satz von Weierstraß?

- Hier war der Satz 2.3.5 über die Stetigkeit der Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge gesucht

5. Wie lautet das Majorantenkriterium?

- Gesucht war das Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe, Satz 2.3.8. Ich hatte hier vergessen, zu erwähnen, dass der zugrunde liegende Raum ein Banachraum sein muss. Deshalb kam die Frage:

6. Wie beweist man das Majorantenkriterium?

- Hier war ich zunächst ratlos, bis Prof. Boos mir dann einen Hinweis gab, und mir sofort wieder einfiel, dass man hier die Vollständigkeit des Raumes, also einen Banachraum, benötigt.

7. Sei $f : M \to \mathbb{R}^m$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = {}^t(f_1, \ldots, f_m)$, $a \in M$ gegeben. Was wissen Sie über den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit?

- Hier wollte Prof. Boos die Aussagen der Sätze 3.4.3, 3.4.4 und 3.4.8 hören: Aus der Differenzierbarkeit von f in einem inneren Punkt a folgt auch die partielle Differenzierbarkeit nach jeder Koordinate. Aus der partiellen Differenzierbarkeit nach jeder Koordinate folgt aber noch nicht die Differenzierbarkeit.

8. Und wie sieht es mit Richtungsableitungen aus?

- Definition 3.4.6 angegeben.
- Ist f in a differenzierbar, so ist f auch in a in Richtung v differenzierbar, vgl. dazu auch Satz 3.4.7.

9. Wie können die Richtungsableitungen aus den partiellen Ableitungen berechnet werden?

- Hier musste die Formel aus Satz 3.4.7 genannt werden.

10. Sie hatten gesagt, dass a für die Differenzierbarkeit ein innerer Punkt sein muss. Können sie das erläutern?

- Definition 3.3.1 der Differenzierbarkeit angegeben.
- Definition 3.3.2 der Ableitung angegeben.
- Der Beweis zur Eindeutigkeit der Ableitung nutzt, dass a innerer Punkt ist.

11. Wie ist ein Taylorpolynom definiert und wie lautet der Satz von Taylor?

- Definition des Taylorpolynoms 4.3.6 angegeben.
- Satz von Taylor 4.3.8 genannt und die gute Approximationsgeschwindigkeit des Taylorpolynoms angesprochen.

12. Wie lautet der lokale Umkehrsatz?

- Hier mussten beide Aussagen des lokalen Umkehrsatzes 4.1.3 genannt werden. Also zum einen die Existenz einer offenen Umgebung U (vgl. Kurstext) und zum anderen die Darstellung der Umkehrfunktion.

13. Wie lautet der Satz von Fubini?

- Hier wollte Prof. Boos die Einzelheiten des Satzes (6.5.1) hören. Wichtig war die Besonderheit, dass die inneren Integrale nur fast überall erklärt sein müssen.

14. Was können Sie mir zur stufenweisen Integration sagen?

- Es war nach der Folgerung 6.5.3 aus dem Satz von Fubini gefragt.

Fazit: Die Prüfungen bei Prof. Boos finden immer in ruhiger Atmosphäre statt und meines Erachtens bewertet Prof. Boos auch wohlwollend. Vor allem das Angebot, einen kurzen Vortrag zu halten, finde ich sehr gut. Denn dies ermöglicht ja, zumindest die ersten 4 Minuten der Prüfung einigermaßen zu planen.

Es ist auch kein Problem, wenn man mal etwas nicht sofort weiß und einen kleinen Tipp benötigt. Ich hatte z.B. keine Ahnung, was ich sagen sollte, als Prof. Boos mich nach dem Beweis zum Majorantenkriterium gefragt hat. Das war aber halb so schlimm, da mir nach dem Tipp von Prof. Boos wieder das entscheidende bei diesem Beweis eingefallen ist.

Zudem hatte mich Prof. Boos im Laufe der Prüfung irgendwann nach einem Beispiel (ich vermute, dass es etwas mit dem Satz von Weierstraß zu tun hatte, aber sicher bin ich mir nicht mehr) gefragt, welches ich nicht angeben konnte. Er meinte dann nur, dass in Analysis I ein solches Beispiel gewesen ist, ist aber nicht weiter darauf eingegangen.

Man sollte die zentralen Sätze auf jeden Fall können. Prof. Boos fragt z.B. gerne den Satz von Taylor ab. Aber es reicht nicht, die Sätze wie Vokabeln auswendig zu lernen. Das Verstehen der Sätze ist auch wichtig. Wenn man nämlich z.B. etwas vergisst oder nicht weiß, dann fragt Prof. Boos gezielt nach. Wenn man die Aussagen der Sätze verstanden hat, ist man durchaus in der Lage, dieses gezielte Nachfragen als Hilfe zu sehen.

Viel Erfolg bei Deiner Prüfung!

Prüfungsprotokoll
Kurs: Analysis II (01133)
Datum: 19.06.2007, 8:30 Uhr, Dauer: ca. 30 min
Prüfer: Prof. Dr. Boos
Beisitzer: Dr. Spreng
Note: 1,3

Bei der Anmeldung zur Prüfung fragt Prof. Boos, ob man einen Kurzvortrag von 4 Minuten halten möchte. Ich habe mich für die Konvergenz in metrischen Räumen entschieden.
Kurzvortrag:

- Definition Metrik, kurz erwähnt, dass Metrik auf völlig unstrukturierten Räumen X definiert wird (also noch nicht mal eine Addition auf X u.U. gegeben ist)
- Erzeugung einer Metrik durch Einschränkung von d auf eine Teilmenge von M und Erzeugung durch eine Norm
- Definition Norm (Definition auf einem reellen Vektorraum)
- Definition Umgebung und ε-Umgebung, mit dem Umgebungsbegriff kann ich nun Konvergenz und Punktarten definieren
- Definition konvergente Folge (Hinweis gegeben, dass die Konvergenzkriterien aus Ana I nicht wirklich übertragen werden können, in metrischen Räumen habe ich ja noch nicht einmal eine Addition zur Verfügung)
- Man kann jedoch aus der Definition der Konvergenz leicht das ε-n_0-Kriterium folgern

Hier die Fragen, die Prof. Boos gestellt hat zusammen mit Zwischenfragen von ihm sowie kleinen Hinweisen, die ich bei der Beantwortung der Fragen gegeben habe.

Fragen:

- In Analysis I gilt ja das Cauchykriterium, gilt dies auch in metrischen Räumen?
  - Ja, das Cauchykriterium gilt auch in metrischen Räumen (hab erläutert, dass a im ε-n_0-Kriterium durch x_{k_0} ersetzt wird)
  - konvergente Folge sind Cauchyfolgen (Beweis durch Erweiterung der Metrik, wie in Ana I)
  - Cauchyfolgen sind beschränkt, liegen also in einer abgeschlossenen Kugel und
  - wenn eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge enthält, so ist sie selbst konvergent, ABER...
  - die Äquivalenz zwischen Konvergenz und Cauchykriterium gilt in allg. metrischen Räumen nicht
  - Beispielsweise ist $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $d := |\arctan x - \arctan y|$ eine Cauchyfolge aber nicht konvergent.
  - Begriff der Vollständigkeit erläutert

- Wie sehen denn in einem metrischen Raum versehen mit der diskreten Metrik die zusammenhängenden Mengen aus?
  - Die Mengen sind einelementig.
- Warum ist das so?:-)
  - Hatte die Antwort aus einem alten Protokoll und kannte den Beweis überhaupt nicht.
  - Prof. Boos hat dann versucht den Beweis mit mir zu erarbeiten. Er fragte, wie denn die offenen Mengen in diesem Fall aussehen. So kamen wir zur Definition der Topologie, dann zur Frage, wie denn die Vereinigung der offenen Mengen in diskreten Räumen aussehen, wie denn eine ε-Umgebung in einem solchen Raum aussieht. Konnte bei dem Beweis nur auf Stichwörter von Prof. Boos reagieren, also alles was er so sagte erläutern und erklären, die Verbindungen zwischen den genannten Begriffen stellte er her.
- Was kann man denn bei einer punktweise konvergenten Funktionenfolge von einem metrischen in einen metrischen Raum über die Stetigkeit aussagen?
  - Brauchte an dieser Stelle einen Augenblick, um den Themensprung zu verkraften. Die Funktionenfolge muss gleichmäßig konvergieren und fast alle f_k müssen stetig in a sein, damit die Grenzfunktion in a stetig ist.
- Betrachten wir mal die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ mit $m \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Wie ist die Differenzierbarkeit definiert?
  - Habe zunächst mal ergänzt, dass a ein innerer Punkt von M sein muss.
  - Definition Differenzierbarkeit
  - Kurze Erläuterung: Grenzwert, stetige Fortsetzung
  - Differenzierbarkeit $\Leftrightarrow$ Differenzierbarkeit sämtlicher Komponentenfunktionen
  - Definition partielle Diferenzierbarkeit
  - Habe dann erklärt, dass man die Differenzierbarkeit von f also auf die Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$ zurückspielen kann.
  - **Zwischenfrage:** Warum nehmen wir a als inneren Punkt und nicht als Häufungspunkt an?
  - Hmm, innerer Punkt heißt ja, dass M Umgebung von a ist...
  - Prof. Boos: Ja, aber das heißt auch, dass a bspw. nicht nur ein Punkt auf einer Geraden seien kann...Wie würde denn dann die Matrix A aussehen?
  - Hmmmmmm...sie enthält wahrscheinlich nur bestimmte Spalten/Zeilen von der gesuchten $f'(a)$?!?
  - Prof. Boos: A enthält dann z.B. eine Zeile, und über die anderen Einträge können Sie nichts sagen, sie ist also nicht mehr eindeutig! (habe auch an dieser Stelle nicht gewusst, worum es ging. In solchen Momenten sich das alles selbst zusammen zu reimen ist eher mühselig, daher habe ich auch an dieser Stelle versucht, so gut es ging alles was von Prof. Boos kam zu erläutern und nach seiner Antwort diese nochmal selbst zu erläutern)
- Gut, wie können Sie denn überprüfen, ob eine Funktion differenzierbar ist?

  - Mit Hilfe der partiellen Ableitungen die Matrix der Gradienten aufstellen und als Matrix A in die Definition einsetzen und die Grenzwertbedingung überprüfen.
  - Partielle Ableitungen existieren für alle Punkte einer Umgebung von a und liefern in a stetige Funktionen
  - Im letzten Fall ist die Äquivalenz gegeben, die andere Richtung (totale⇒partielle Diff.) beweist man einfach mit der Kettenregel und der Diff.-barkeit der Funktion φ_k.

- Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
  - Satz wiedergegeben. Achtung: Prof. Boos verlangte auch die Aussage über die Differenzierbarkeit von $g : U \to V$!
- Der Beweis geht ja ganz einfach :-), wie geht er denn?
  - (man merkte, dass Prof. Boos langsam im sehr guten Bereich prüfte) Habe dann zunächst an den Banachschen Fixpunktsatz gedacht, aber der wird ja im Lokalen Umkehrsatz gebraucht. Habe mich laut daran erinnert, dass ja der Satz über implizite Funktionen leicht aus dem Lokalen Umkehrsatz gefolgert werden kann,...oder war es umgekehrt? Hmmm...
  - Prof. Boos half mir auf die Sprünge, indem er meinte, der lokale Umkehrsatz benötigt ja ein Gleichungssystem vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$. Mir fiel dann ein, dass man den Lokalen Umkehrsatz ja ohne den Satz über die impliziten Funktionen im Kurs beweist, und man den Satz über die impliziten Funktionen verwenden kann, um den Lokalen Umkehrsatz zu beweisen (man betrachtet ein spezielles Gleichungssystem). Andererseits kam der lokale Umkehrsatz auch irgendwo im Beweis des Satzes über implizite Funktionen vor. Meine Antwort war also mehr als holprig;-)
- So, können Sie denn kurz beschreiben, was der Transformationssatz aussagt?
  - Habe den ganzen Satz aufgeschrieben. Dabei kurz Messbarkeit von Mengen, von Funktionen erklärt. $\mathcal{L}$-Integrierbarkeit sollte ich dann nicht mehr erklären.
- Ja, für den Beweis, der ja auch sehr umfangreich ist, haben wir jetzt keine Zeit mehr.

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Prof. Boos ist ein sehr freundlicher Prüfer und uneingeschränkt zu empfehlen. Man muss nur einfach sehen, dass sich die Prüfungen bei ihm nicht exakt gleichen (wie dies bei anderen Prüfern der Fall ist; ich hatte fest damit gerechnet, dass der Beweis über die Extremakriterien drankommen würde) und er seine Fragen an den Prüfling und die Note anpasst (der Beweis zum Satz über implizite Funktionen und die Transformationsformel sind glaube ich eher seltener dran). Mit Beweisskizzen kommt man aber immer gut durch und es wird auch kein exaktes Aufschreiben von Beweisen verlangt, die anderen Sachen, die man aufschreibt, sollten aber schon exakt sein. Schwächen hatte ich in dieser Prüfung an mehreren Stellen und dazu auch gleich richtig dicke. An der Tatsache, dass trotzdem eine 1,3 herausgekommen ist, erkennt man, dass die Benotung wirklich sehr fair ist und man durch gute Kenntnisse in anderen Bereichen die Note wieder retten kann (ich glaube Prof. Boos war fast überrascht, als ich ihm anbot den gesamten Transformationssatz aufzuschreiben:-)