

Studienrichtung	Mathematik (Diplom II)
Fach	Analysis II (Kurs 01133)
Datum	15.02.2005
Prüfer	Prof. Dr. A. Duma
Note	1.0

## 1 Metrische und normierte Räume

- Was können Sie mir über metrische Räume erzählen?
  - Weil wir uns für Konvergenz interessieren, benötigen wir den Begriff der (Epsilon-)Umgebung. Das wiederum bedeutet, dass wir Abstände bestimmen wollen, wozu wir die Abstandsfunktion  $d$  benötigen.
  - Definition und Eigenschaften einer Metrik hingeschrieben.
  - Beispiele für Metriken (insbesondere diskrete Metrik und Metriken über  $\mathbb{R}^n$ ) aufgezählt.
- Was können Sie mir über normierte Räume erzählen?
  - Definition und Eigenschaften einer Norm hingeschrieben (insbesondere die Homogenität, mit welcher sich die Symmetrie der induzierten Metrik einfach beweisen lässt).
  - Beispiele für Normen über  $\mathbb{R}^n$ .
  - Jede Norm induziert eine Metrik, d.h. jeder normierte Raum kann zu einem metrischen gemacht werden. Umgekehrt ist dies aber nicht der Fall.
- Kennen Sie ein Beispiel für eine Metrik, welche nicht durch eine Norm induziert wird?
  - $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ , wobei  $y = 0$  gesetzt wird. Die positive Homogenität ist dann nicht gegeben.
- Wie sieht es nun aus, wenn wir verschiedene Normen auf  $\mathbb{R}^n$  und den Begriff der Konvergenz (in  $\mathbb{R}^n$ ) betrachten?
  - Verschiedene Normen lassen sich einfach gegeneinander abschätzen (bis auf eine reelle Konstante). Der Umgebungs- und Konvergenzbegriff bleibt daher derselbe.

## 2 Differenzierbarkeit

- Es sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $M \subset \mathbb{R}^n$  gegeben. Was lässt sich über die Differenzierbarkeit einer solchen Abbildung sagen?
  - $f$  ist genau dann differenzierbar, wenn alle ihre  $m$  Koordinatenfunktionen  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind.
  - Man bestimmt also mit partieller Ableitung die Gradienten aller  $f_i$ . Diese bilden dann die Jacobi-matrix, welche man anstelle von  $A$  in der Definition für Differenzierbarkeit einsetzen kann, um dann die Restfunktion  $r(x)$  zu überprüfen. Oder besser noch: man überprüft alle partiellen Ableitungen auf Stetigkeit.
  - Zusammenhang von stetig (part.) differenzierbar, (total) differenzierbar und part. differenzierbar erklärt.
- Was können Sie über partielle Ableitungen zweiter Ordnung sagen?
  - Satz von Schwarz.
  - Hessesche Matrix, welche symmetrisch ist.
- Wozu bracht man denn die Hessesche Matrix?

- Bestimmen von Extrema, wobei  $f'(a) = 0$  ein notwendiges aber kein hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein eines Extremum ist (wie schon in ANI).
- Im Gegensatz zu ANI, wo  $f'(a) \in \mathbb{R}$  gilt, ist  $f'(a)$  in ANII eine Matrix. D.h. man kann nicht mehr sagen, ob  $f'(a) > 0$  oder  $f'(a) < 0$  gilt. Deswegen braucht es die Quadratische Form.
- Die Begriffe Quadratische Form, definit, semidefinit und indefinit definiert. Entscheid, ob Minimum, Maximum, Sattelpunkt oder nichts von alledem.
- Können Sie mir ein Beispiel nennen für eine Abbildung mit mindestens zwei Veränderlichen, welche einen Sattelpunkt hat? Mit den Armen gestikulierend deutete Herr Duma an, wie der Graph einer solchen etwa aussehen könnte :-)
  - Nach längerem Nachdenken:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := x^2 - y^2$

### 3 (Lokaler) Umkehrsatz

- Was können Sie mir darüber erzählen?
  - Es geht um das Lösen von Gleichungssystemen mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen (also z.B.  $f(x) = y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ).
  - Im linearen Fall bieten sich die Methoden der Linearen Algebra an ( $\det(A) \neq 0$  usw).
  - Im nicht linearen Fall hilft der lokale Umkehrsatz weiter. Satz hingeschrieben mit den Vorbedingungen (die Beweisidee war zum Glück nicht gefragt).
  - Hinweis auf die Transformation von Polarkoordinaten als eine schöne Anwendung davon.

### 4 Implizite Funktionen

- Was können Sie mir darüber erzählen?
  - Es geht um das Lösen von Gleichungssystemen mit mehr Variablen als Gleichungen (also z.B.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $f(x, y) = 0$  und  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ).
  - Im linearen Fall bieten sich die Methoden der Linearen Algebra an ( $\det(A_2) \neq 0$  usw).
  - Im nicht linearen Fall hilft der Satz über Implizite Funktionen weiter. Hier reichte es zu sagen, dass es darum geht, eine Funktion  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g(x) = y$  zu suchen, so dass  $f(x, g(x)) = 0$  gilt.

### 5 Lebesgue-Integral

- Was können Sie mir darüber erzählen? (Dazu hatte ich glücklicherweise nur noch fünf Minuten Zeit, also konnte ich nicht mehr ins Detail gehen.)
  - Das Lebesgue-Integral ist gegenüber dem Riemann-Integral schon mal eine Erweiterung, weil wir auch über unbeschränkte Quader integrieren können. Es lässt sich also ganz  $\mathbb{R}^n$  zerlegen und nicht nur ein beschränktes Intervall  $I$ .
  - Treppenfunktionen (fast) wie beim Riemann-Integral.
  - LM-integrierbare Funktionen (ungefähre Definition und Hinweis auf den Grenzprozess gegeben). Das Problem ist, dass es Abbildungen gibt mit  $f \in \mathcal{LM}$  und  $-f \notin \mathcal{LM}$  (siehe Beispiel in KE 6).
  - Mit der Definition der L-integrierbaren Abbildungen ist dieses Problem aus der Welt geschafft (ungefähre Definition/Idee gegeben und Hinweis, dass kein Grenzprozess im Spiel ist).
  - Allgemein gilt:  $\mathcal{T} \subset \mathcal{LM} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ , wobei  $\mathcal{M}$  die Menge der messbaren Abbildungen ist.
  - Mit dem Satz von Levi und  $f_n \in \mathcal{L}$  können nun quasi neue Abbildungen  $f$  „geschaffen“ werden, welche aber wieder in  $\mathcal{L}$  liegen, d.h. die Menge  $\mathcal{L}$  ist in diesem Sinne abgeschlossen.
  - Satz von Fubini erwähnt (Nachteil: es muss gelten  $f \in \mathcal{L}$ ).
  - Satz von Tonelli erwähnt (Vorteil: es muss nicht gelten  $f \in \mathcal{L}$ ).

- Wie kann man die Menge der R- und L-integrierbaren Funktionen zueinander in Beziehung setzen?
  - Es gilt  $\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ :
  - Die „restringierte“ Dirichletfunktion als Beispiel für eine Funktion, die nicht R-integrierbar, wohl aber L-integrierbar ist. In diesem Zusammenhang noch Ober- und Untersumme bei R-integrierbaren Funktionen genannt. Die Obersumme bleibt bei 1 „kleben“, die Untersumme bei 0, d.h. eben nicht R-integrierbar. Ausserdem den Begriff der Nullmengen, mit deren Hilfe die obige Abbildung L-integriert werden kann ( $\int f = \int g$  falls  $f = g$  f.ü.).

## 6 Allgemeiner Eindruck

- Seine Ruhe geht sehr schnell auf den Studenten über, ich war nur gerade am Anfang etwas nervös. Er war äusserst gut gelaunt, was vermutlich auch Auswirkungen auf die gute Benotung hatte.
- Wenn man es schafft, einen Überblick über die Kurseinheiten zu geben und wenn man Zusammenhänge aufzeigen kann, werden fast keine Beweise verlangt.
- Kleinere Fehler oder Versäumnisse wirken sich nicht auf die Benotung aus.
- Man sollte sich ein paar wichtige, kurze Beweise einprägen. Diese kann man dann unaufgefordert an den Mann bringen, und so vielleicht die schwierigeren vermeiden.
- Herr Duma freute sich über jedes Beispiel oder Gegenbeispiel.
- Ich würde jederzeit wieder eine Prüfung bei ihm absolvieren. Viel Glück!

Mein Dank an alle welche auch Prüfungsprotokolle schreiben.