Mathematische Grundlagen (01141) WS 2016/17

Klausur am 04.03.2017:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ ,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6}$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{(Aufspalten der Summe)} \\
&= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + (n+1)^2 && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{13}{6}n + 1 \ ,
\end{aligned}$$

und das ist tatsächlich identisch mit

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \ .
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & | & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} \ .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache der ersten und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

addieren die zweite Zeile zur dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

© FernUniversität in Hagen, 2017

und subtrahieren (um die Null über der zweiten Pivot-Eins zu erhalten) das doppelte der zweiten Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} .$$

Damit haben wir schon die Treppennormalform erreicht.

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 = 4 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = 4 - 2x_3 \ , \quad x_1 = -1 + x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ 2a+c & 2b+c \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ b = a, c = -2a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \ ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist als einzelner Vektor linear unabhängig, bildet also eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Dieser Vektor kann durch zwei beliebige Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden; z.B. sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, denn aus $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $a+b = 0, a+c = 0, -2a = 0$, also $a = b = c = 0$.

© FernUniversität in Hagen, 2017

Damit bilden (z.B.) $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ und $f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$, d.h. $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$ eine Basis von Bild(f).

Aufgabe 4

Für $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, $x \in I = [0, \infty)$ gilt $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$; damit liegt in $x_0 = 0$ ein globales (und damit gleichzeitig lokales) Minimum vor. Nun suchen wir nach möglichen weiteren Extrema im offenen Intervall $(0, \infty)$; dort müsste die Ableitung der (rationalen und damit auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbaren) Funktion f eine Nullstelle haben. Wegen

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

ist das für $x > 0$ nur bei $x_1 = \sqrt[3]{2}$ der Fall. Weiter lässt sich $f'(x) > 0$ für $0 < x < \sqrt[3]{2}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \sqrt[3]{2}$ ablesen, also ist f streng monoton steigend auf $[0, x_1)$ und streng monoton fallend auf (x_1, ∞), also ist in $x_1 = \sqrt[3]{2}$ das einzige lokale (und globale) Maximum.

Aufgabe 5

Wenn f und g auf I differenzierbar sind, gilt das auch für h mit $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Gleichzeitig ist $h(a) = h(b) = 0$ (wegen $f(a) = 0$ bzw. $g(b) = 0$). Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$. Da wegen der strengen Monotonie a die einzige Nullstelle von f und b die einzige Nullstelle von g ist, können wir durch $f(x_0)$ und $g(x_0)$ dividieren und erhalten wie behauptet $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

Aufgabe 6

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 \geq 1$, somit auch $n^3 + 1 \leq 2n^3$ und damit $a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

b) Wegen $\frac{n^2}{n^4+1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ und der bekannten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$.

c) Hier können wir uns das Leben (bzw. eine saubere Lösung) leichter machen, indem wir Quotienten- und Majorantenkriterium hintereinanderschalten: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $d_n = \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{1}{3} < 1$ für $n \to \infty$; also konvergiert wegen $\frac{n^2}{3^n+1} < \frac{n^2}{3^n}$ und dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe c).

© FernUniversität in Hagen, 2017

Aufgabe 7

Der Zähler des Integranden ist (fast) die Ableitung des Nenners, daher substituieren wir $x^3 + 1 = g(x)$, also $g'(x) = 3x^2, g(0) = 1, g(2) = 9$, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{g(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^9 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln(u)\Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{3}(\ln(9) - \ln(1)) = \frac{\ln(9)}{3}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll}\alpha &=& (D \vee (B \wedge \neg C)) \to A & \\ &\approx& A \vee \neg(D \vee (B \wedge \neg C)) & \text{Junktorminimierung} \\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge \neg(B \wedge \neg C)) & \text{de Morgan} \\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee \neg\neg C)) & \text{de Morgan} \\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \text{doppelte Verneinung} \\ &\approx& (A \vee \neg D) \wedge (A \vee (\neg B \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\ &\approx& (A \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .}\end{array}$$

Dies ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

Wenn wir oben in der 5. Zeile wieder einsteigen, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll}\alpha &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \\ \alpha &\approx& A \vee ((\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C)) & \text{Distributivgesetz} \\ \alpha &\approx& A \vee (\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C) & \text{Klammern weglassen} \\ .& & & \end{array}$$

Das ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

© FernUniversität in Hagen, 2017