FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

Fachbereich Mathematik

Lehrgebiet Algebra/Geometrie
Prof. Dr. H. P. Petersson

FernUniversität · D - 58084 Hagen

Lützowstr. 125
D - 58084 Hagen

Ihr Zeichen/Schreiben vom	Mein Zeichen/Auskunft erteilt	Telefon 0 23 31 / 9 87–	Hagen,
	schu 1151/99/Korrbrief	2650, 2682	02.03.2000

Fehler in den Lösungshinweisen zu Aufgabe 6 der Klausur zum Kurs 01151

Sehr geehrte Klausurteilnehmer,

nachträglich hat sich herausgestellt, dass die Lösungshinweise zu Aufgabe 6 b) fehlerhaft sind. Wir können nicht ausschließen, dass zur Korrektur dieser Aufgabe die fehlerhaften Lösungshinweise herangezogen worden sind. Deshalb bitten wir Sie, anhand der als Anlage beigefügten korrigierten Lösungshinweise zu prüfen, ob die Korrektur im Falle Ihrer Klausur unter diesem Aspekt zu beanstanden ist. Sollte dies der Fall sein, haben Sie die Möglichkeit, die Klausur zwecks Überprüfung und Nachkorrektur unverzüglich an uns zurückzusenden, und zwar an die folgende Anschrift:

Prof. Dr. H. P. Petersson
Fachbereich Mathematik
FernUniversität
D - 58084 Hagen

Mit freundlichen Grüßen,
Prof. Dr. H. P. Petersson

Telefonvermittlung 0 23 31 / 9 87 - 01 | Telefax 02331/987 - 2445 | Bildschirmtext * 6 28 04 # | Buslinien 508.512.525 | E-Mail: Holger.Petersson@FernUni-Hagen.de

Mathematik für Informatiker I (Bachelor), WS 99/00
Klausur vom 19.02.2000:
Korrigierte Lösung zu Aufgabe 6

Aufgabe 6

a) (i) $\operatorname{Kern} f := \{v \in V : f(v) = 0\}$ (nach Definition 4.1.4).
(ii) $\operatorname{rang} f := \dim \operatorname{Bild} f = \dim f(V)$ (nach Definition 4.2.1).

b) (i) Für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ gilt

$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ -(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + 5(z_1 + z_2) \\ 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2x_1 - z_1) + (2x_2 - z_2) \\ (-x_1 + 3y_1 + 5z_1) + (-x_2 + 3y_2 + 5z_2) \\ (2y_1 + 3z_1) + (2y_2 + 3z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - z_1 \\ -x_1 + 3y_1 + 5z_1 \\ 2y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 - z_2 \\ -x_2 + 3y_2 + 5z_2 \\ 2y_2 + 3z_2 \end{pmatrix} \\ &= f(v_1) + f(v_2). \end{aligned}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt $av = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} f(av) &= \begin{pmatrix} 2(ax) - (az) \\ -(ax) + 3(ay) + 5(az) \\ 2(ay) + 3(az) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(2x - z) \\ a(-x + 3y + 5z) \\ a(2y + 3z) \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + 3y + 5z \\ 2y + 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

© 2000 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

$$= af(v).$$

Insgesamt ist damit gezeigt, dass f linear ist.

(ii) Zunächst bestimmen wir $\dim \operatorname{Kern} f$:
Wegen $\operatorname{Kern} f = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ ermitteln wir dazu alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ 2y & & & + & 3z & = & 0. \end{array}$$

Wir erhalten $z = 2x$ (aus der ersten Gleichung), $2y + 6x = 0$ (aus der dritten Gleichung), also $y = -3x$. Die zweite Gleichung $-x+3y+5z = -x-9x+10x = 0$ ist dann automatisch erfüllt. Also gilt

$$\operatorname{Kern} f = \{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ 2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ ist eine Basis von $\operatorname{Kern} f$, somit ist $\dim \operatorname{Kern} f = 1$.

Mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Bild} f &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern} f \\ &= 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

(iii) Wegen $\operatorname{Kern} f \neq \{0\}$ ist f nach dem Injektivitätskriterium für lineare Abildungen nicht injektiv, also auch nicht bijektiv.
Wegen $\dim \operatorname{Bild} f = 2$ ist $\operatorname{Bild} f \neq \mathbb{R}^3$, also f nicht surjektiv.

Mathematik I / Mathematik für Informatiker I, WS 99/00 Bachelor

Klausur vom 19.02.2000:

Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

a) $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$, $M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$, siehe 2.6.1.

b) Seien M, N Mengen. Wir zeigen: $M \subset N \iff M \cup N = N$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $M \subset N$. Die Inklusion $N \subset M \cup N$ ist trivial. Ist umgekehrt $x \in M \cup N$, also $x \in M$ oder $x \in N$, so ist wegen $M \subset N$ in jedem Fall $x \in N$. Damit gilt auch $M \cup N \subset N$, also $M \cup N = N$.

„$\Leftarrow$": Es gelte $M \cup N = N$. Aus $M \subset M \cup N = N$ folgt sofort $M \subset N$.

Aufgabe 2

Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^n})$. Dazu greifen wir auf die Summenformel für die endliche geometrische Reihe (3.2.4) zurück, nachdem wir eine Indexverschiebung (1.4.3 c)) vorgenommen haben:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{5})^k = \frac{1 - (\frac{1}{5})^{(n-1)+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{\frac{5-1}{5}}$$
$$= \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^n}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Alternativ kann der Beweis natürlich auch durch vollständige Induktion nach n geführt werden:

Induktionsanfang $(n = 1)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{5^{k-1}} = 1 = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5})$.

Induktionsschritt $(n - 1 \to n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^{n-1}})$ (Induktionsannahme). Daraus haben wir $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^n})$ zu folgern.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5^{k-1}} + \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^{n-1}}) + \frac{1}{5^{n-1}}$$
$$= \frac{5}{4}(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{5^{n-1}}) = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^{n-1}})$$
$$= \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^n}).$$

Folglich gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

© 2000 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

Aufgabe 3

a) Siehe 2.3.1.

b) (i) Die Menge $U_1 := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$ ist nach 2.3.2 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, da $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$, denn $0 = 0$.

(ii) Die Menge $U_2 := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\}$ ist als Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $G \quad x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ von einer Gleichung in drei Unbekannten über $\mathbb{R}$ nach 2.4.8 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Die Menge $U_3 := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \geq x_3\} \subset \mathbb{R}^3$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3$, da $1 + 0 = 1 \geq 0$, aber für $a := -1 \in \mathbb{R}$ ist $au = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, da $-1 + 0 = -1 < 0$. Also erfüllt U_3 nicht **U3** in 2.3.1 und ist somit kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

a) (i) Siehe 3.1.2.

(ii) Siehe 2.5.12 a).

(iii) Siehe 3.1.8 b).

b) Es sei $U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

Wir zeigen, dass $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von U ist. Daraus können wir $\dim U = 2$ ablesen (3.3.3 a)).

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$ beliebig, so folgt aus der Definition von U : $\quad x_3 = 2x_2 - x_1$, also gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U.$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in U$ (wegen $1 - 2 \cdot 0 + (-1) = 0$ bzw. $0 - 2 \cdot 1 + 2 = 0$) ist $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ folglich (nach 2.5.13 d)) ein Erzeugendensystem von U. Darüber hinaus sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, denn für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ folgt aus

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 2a_2 - a_1 \end{pmatrix}$$

sofort $a_1 = a_2 = 0$. Also ist $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ nach 3.1.9 d) und der Definition 3.1.8 b) eine Basis von U.

Aufgabe 5

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge des folgenden (inhomogenen) linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

von drei Gleichungen in drei Unbekannten über $\mathbb{R}$.

Wir folgen dem Beispiel 2.4.5 a) und nehmen an, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei eine Lösung von G. Aus der dritten Gleichung von G folgern wir zunächst $x_2 = 3x_3 + 1$. Dies setzen wir in die erste Gleichung von G ein und erhalten $x_1 = x_2 - 4x_3 + 2 = 3x_3 + 1 - 4x_3 + 2 = -x_3 + 3$. Setzen wir diese Ergebnisse in die zweite Gleichung von G ein, so erhalten wir

$$7 = 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \cdot (-x_3 + 3) + (3x_2 + 1) - x_3 = -2x_3 + 6 + 3x_3 + 1 - x_3 = 7$$

und damit keine weitere Bedingung an x_1, x_2, x_3. Eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ von G hat also notwendig die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 3 \\ 3x_3 + 1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Umgekehrt zeigt eine Probe, dass alle Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ der Gestalt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für ein $x \in \mathbb{R}$ Lösungen von G sind:

$$\begin{aligned}
&(3-x)-(1+3x)+4x = 3-x-1-3x+4x = 2,\\
&2(3-x)+(1+3x)-x = 6-2x+1+3x-x = 7,\\
&0\cdot(3-x)+(1+3x)-3x = 1+3x-3x = 1.
\end{aligned}$$

Also ist

$$L(G) = \{ \begin{pmatrix} 3-x \\ 1+3x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

die Lösungsmenge von G.

Aufgabe 6

a) (i) $\operatorname{Kern} f := \{v \in V : f(v) = 0\}$ (nach Definition 4.1.4).

(ii) $\operatorname{rang} f := \dim \operatorname{Bild} f = \dim f(V)$ (nach Definition 4.2.1).

b) (i) Für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ gilt

$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned}
f(v_1+v_2) &= \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-(z_1+z_2) \\ -(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)+5(z_1+z_2) \\ 2(x_1+x_2)+3(z_1+z_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (2x_1-z_1)+(2x_2-z_2) \\ (-x_1+3y_1+5z_1)+(-x_2+3y_2+5z_2) \\ (2x_1+3z_1)+(2x_2+3z_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2x_1-z_1 \\ -x_1+3y_1+5z_1 \\ 2x_1+3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2-z_2 \\ -x_2+3y_2+5z_2 \\ 2x_2+3z_2 \end{pmatrix}\\
&= f(v_1)+f(v_2).
\end{aligned}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt $av = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} f(av) &= \begin{pmatrix} 2(ax) - (az) \\ -(ax) + 3(ay) + 5(az) \\ 2(ax) + 3(az) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(2x - z) \\ a(-x + 3y + 5z) \\ a(2x + 3z) \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + 3y + 5z \\ 2x + 3z \end{pmatrix} \\ &= af(v). \end{aligned}$$

Insgesamt ist damit gezeigt, dass f linear ist.

(ii) Zunächst bestimmen wir $\dim \operatorname{Kern} f$:

Wegen $\operatorname{Kern} f = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ ermitteln wir dazu alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0. \end{array}$$

Wir erhalten dafür

$4z = 0 \Longrightarrow z = 0$ (3. Gleichung minus 1. Gleichung),

$2x = z = 0 \Longrightarrow x = 0$ (1. Gleichung),

$3y = x - 5z = 0 \Longrightarrow y = 0$ (2. Gleichung),

also $\operatorname{Kern} f = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, und somit $\dim \operatorname{Kern} f = 0$.

Mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} f &= \dim \operatorname{Bild} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern} f \\ &= 3 - 0 = 3. \end{aligned}$$

(iii) Wegen $\operatorname{Kern} f = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ (vgl. (ii)) ist f nach dem Injektivitätskriterium für

lineare Abildungen injektiv.

Aus $\dim \operatorname{Bild} f = 3$ folgt $\operatorname{Bild} f = \mathbb{R}^3$, d. h. f ist auch surjektiv.
Da f somit sowohl injektiv als auch surjektiv ist, handelt es sich also um eine bijektive Abbildung.