Aufgabe 1

Untersuchen Sie (mit Begründung), ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

3 Punkte (1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto f(n) := 2n - 1\,,$

3 Punkte (2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) := x^2 - 2x\,.$

Aufgabe 2

6 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Aufgabe 3

2 Punkte **a)** Es sei V ein reeller Vektorraum. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind.

2 Punkte (1) $U_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}\,,$

2 Punkte (2) $U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}\,.$

4 Punkte **Aufgabe 4**

Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem

$G \qquad 3x + 4y = 0$

in zwei Unbekannten.

Bestimmen Sie (mit Begründung) eine Basis des Lösungsraumes $L(G)$ von G.

Aufgabe 5

a) Es seien V ein reeller Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2 Punkte (1) linear unabhängig sind;

2 Punkte (2) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Aufgabe 6

2 Punkte **a)** V und W seien reelle Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ sei eine lineare Abbildung. Wie ist $\operatorname{Kern} f$ definiert?

6 Punkte **b)** Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(Sie brauchen *nicht* nachzuweisen, dass f linear ist.)
Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} f$ durch Angabe einer Basis.

Aufgabe 7

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte **a)** Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

2 Punkte **b)** Zeigen Sie: Ist $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ invertierbar, so gilt für alle Matrizen $B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$:

$$PB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.$$