## Mathematik für Informatiker I (Bachelor), WS 01/02 Klausur vom 16.02.2002:

Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

### Aufgabe 1

a) Siehe 2.2.1 a):  $M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ .

b) Für Mengen M, N, X gelte  $M \subset N \cup X$  und  $M \cap X \subset N$ . Wir zeigen  $M \subset N$ . Sei  $x \in M$  beliebig. Wegen  $M \subset N \cup X$  folgt  $x \in N \cup X$ , also  $x \in N$  oder  $x \in X$ . Ist  $x \in N$ , so sind wir fertig. Ist  $x \in X$ , so gilt  $x \in M \cap X$ , also wegen  $M \cap X \subset N$  auch  $x \in N$ . Für ein beliebiges  $x \in M$  ist damit  $x \in N$  gezeigt. Also gilt  $M \subset N$ .

### Aufgabe 2

Wir zeigen

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang n = 1: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 = (-1)^1 \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Induktionsschritt  $n \to n+1$ : Sei  $n \in \mathbb{N}$ , es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$
 (Induktions  
voraussetzung)

Dann folgt

$$\begin{split} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \\ &= (-1)^n \, \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \qquad \text{[nach Induktions vor.]} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1) \big( -\frac{n}{2} + (n+1) \big) \\ &= (-1)^{n+1} (n+1) \big( \frac{n}{2} + 1 \big) \\ &= (-1)^{n+1} (n+1) \frac{1}{2} (n+2) = (-1)^{n+1} \, \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{split}$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

## Aufgabe 3

a) Sei V ein reeller Vektorraum. Nach Definition 4.3.1 heißt eine Teilmenge U von V Untervektorraum von V, wenn

U1 U nicht-leer ist,

U2  $u + u' \in U$  für alle  $u, u' \in U$  gilt, und

U3  $au \in U$  für alle  $a \in K$  und alle  $u \in U$  gilt.

b) (1) Die Menge 
$$U_1:=\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ x_1^2+x_2^2=0\}$$
 
$$=\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ x_1=x_2=0\}\subset\mathbb{R}^n$$

ist als Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$G \qquad x_1 = 0, \ x_2 = 0$$

ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  (vgl. Satz 4.4.6).

(2) Die Menge 
$$U_2:=\left\{\begin{pmatrix} x+1\\x+2\\ \vdots\\x+n\end{pmatrix}\mid x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathbb{R}^n$$
 ist nach Proposition 4.3.2

kein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , da  $0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2$  (denn aus x+1=0

folgt  $x + 2 \neq 0$ ).

# Aufgabe / 5

Wir stellen fest, dass in

$$G \qquad 2x - 5y = 0$$
$$-4x + 10y = 0$$

die zweite Gleichung sich aus der ersten Gleichung durch Multiplikation mit -2 ergibt. Daher hat G dieselben Lösungen wie

$$G' \qquad 2x - 5y = 0.$$

Wir lösen G' nach y auf und erhalten  $y = \frac{2}{5}x$ , also

$$L(G) = L(G') = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, \ y = \frac{2}{5}x \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{5}x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}).$$

Demnach bildet  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$  eine Basis des Lösungsraumes L(G) von G .

Aufgabe # 4

- a) (1) Nach Definition 5.3.1 heißen die Vektoren  $v_1, \ldots, v_n$  linear unabhängig, wenn für alle  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$  aus  $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$  notwendig  $a_1 = \ldots = a_n = 0$  folgt.
- (2) Eine Menge von Vektoren  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  wird nach Definition 5.1.9 genau dann als *Erzeugendensystem* von V bezeichnet, wenn  $\text{Lin}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$  gilt.
- (3) Eine Menge von Vektoren  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  heißt nach Definition 5.3.7b) Basis von V, wenn die Vektoren  $v_1, \ldots, v_n$  linear unabhängig sind und  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  ein Erzeugendensystem von V ist.
- b) (1) Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  sind nicht linear unabhängig, sondern linear abhängig:  $4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- (2) Die Vektoren  $\binom{1}{-2}$ ,  $\binom{-4}{8} \in \mathbb{R}^2$  bilden kein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ , denn nach (1) gilt  $\dim \operatorname{Lin}(\binom{1}{-2}, \binom{-4}{8}) = 1$ , also

$$\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \mathbb{R}^2 \text{ nach Satz 5.5.1.}$$

(3) Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  bilden *keine Basis* des  $\mathbb{R}^2$ , da diese Vektoren nach (1) nicht linear unabhängig sind.

## Aufgabe 6

- a) siehe 6.1.1.
- b) (1) f ist nicht linear wegen

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1^2 + 0^2 = 1,$$

$$f(-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = (-1)^2 + 0 = 1 \neq -1 = -f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

(2) g ist nicht linear wegen

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) h ist linear wegen

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 7

a) Für 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Kern } f \text{ folgt}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und erhalten

$$2x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 0.$$

Hiervon subtrahieren wir die zweite Gleichung und erhalten

$$5x_2 + 15x_3 = 0.$$

Division durch 5 liefert  $x_2 + 3x_3 = 0$ , also  $x_2 = -3x_3$ . Wir setzen dies in die erste Gleichung ein und erhalten  $x_1 - 12x_3 + 7x_3 = 0$ , also  $x_1 = 5x_3$ . Insgesamt folgt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen sieht man aber, dass alle Vielfachen des Vektors  $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  in Kern f liegen; also ist  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von Kern f.

b) Nach a) ist dim Kern f=1, und die Dimensionsformel liefert  ${\rm rang}\, f=\dim \mathbb{R}^3-\dim {\rm Kern}\, f=3-1=2=\dim \mathbb{R}^2.$ 

Wegen Bild  $f \subset \mathbb{R}^2$  ist also Bild  $f = \mathbb{R}^2$  und  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von Bild f.

c) Nach a) ist Kern  $f \neq 0$ , f also nicht injektiv. Nach b) ist Bild  $f = \mathbb{R}^2$ , f also surjektiv.