Klausur Mathematik für Informatiker I (1151) WS 06/07

Klausur am 10.02.2007:

Aufgabenstellungen

I. Die Lösungen der folgenden vier Aufgaben müssen Sie nicht begründen.

Aufgabe I.1

Geben Sie vier verschiedene Beispiele von Unterräumen von $\mathbb{R}^3$, die alle die Dimension 2 haben.

[*4 Punkte*]

Aufgabe I.2

Geben Sie jeweils ein Beispiel für

1. eine injektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die nicht surjektiv ist.
2. eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die nicht injektiv ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe I.3

Geben Sie ein Beispiel für zwei 2×2-Matrizen A und B über $\mathbb{R}$, die beide den Rang 1 haben, und die nicht zeilenäquivalent sind.

[*4 Punkte*]

Aufgabe I.4

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Geben Sie für folgende Aussagen jeweils eine logisch äquivalente Aussage.

1. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

© 2006 Fernuniversität in Hagen

2. $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

[*4 Punkte*]

II. Die Lösungen der folgenden sieben Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe II.1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe II.2

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $f : V \to V$ definiert durch $f(a + bT + cT^2) = (a + c) + bT^2$ für alle $a + bT + cT^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V und berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*4 + 4 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe II.3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist. Lin GS.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

Aufgabe II.4

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien λ und λ' Lösungen von $Ax = b$.

Beweisen Sie, dass $\lambda - \lambda'$ eine Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe II.5

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt.

$$\sum_{i=1}^{n}(4i - 3) = n(2n - 1)$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe II.6

Seien $A \in \mathrm{M}_{21}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass AB nicht invertierbar ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe II.7

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $f \circ f = f$.

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ ist.

[*8 Punkte*]