Lösungen der Klausur Mathematik für Informatiker I (1151) WS 07/08

Klausur am 09.02.2008:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform und erhalten

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Links des Strichs steht die Treppennormalform T der Koeffizientenmatrix A.

Wir führen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir fügen nun -1 überall auf der Diagonalen ein, wo 0 steht.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

© 2008 Fernuniversität in Hagen

An dieser Matrix können wir die Lösungsmenge ablesen: Eine spezielle Lösung steht rechts des Strichs, und die Lösungsmenge des homogenen Systems ist die Menge der Linearkombinationen der Spalten, in denen wir -1 eingeführt haben. Es folgt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ in V. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \begin{pmatrix} 2a+2x & b+c+y+z \\ b+c+y+z & 2d+2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2u \end{pmatrix} = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt

$$f(xA) = \begin{pmatrix} 2xa & xb+xc \\ xb+xc & 2xd \end{pmatrix} = xf(A).$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Als Basis $\mathcal{B}$ wählen wir die Standardbasis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &&= 2 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \\ f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &&= 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \\ f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &&= 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \\ f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &&= 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 2 \cdot E_{22}. \end{aligned}$$

Es folgt ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \langle f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)),$$

also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4 - 3 = 1$. Es reicht also, eine linear unabhängige Matrix in $\mathrm{Kern}(f)$ zu finden.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $A \in \mathrm{Kern}(f)$. Somit ist A eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

zu Aufgabe 3

1. Die erste Teilmenge ist kein Unterraum, denn die Nullmatrix ist nicht enthalten.
2. Die zweite Teilmenge besteht nur aus der Nullmatrix. Sie ist somit ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.
3. Die dritte Teilmenge ist kein Unterraum, denn die Nullmatrix ist nicht enthalten.
4. Die Menge $X_4 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ ist ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in X_4. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in X_4$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in X_4$.

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in X_4$. Dann gilt $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in X_4$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass X_4 ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

zu Aufgabe 4

1. Sei $x \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f(x) = 0$, also $g(f(x)) = g(0) = 0$, denn g ist linear. Da $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, folgt $x \in \mathrm{Kern}(g \circ f)$.

2. Sei g ein Isomorphismus, und sei $x \in \mathrm{Kern}(g \circ f)$. Dann gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$. Da g ein Isomorphismus ist, ist $\mathrm{Kern}(g) = \{0\}$, also $f(x) = 0$. Somit gilt $x \in \mathrm{Kern}(f)$, also $\mathrm{Kern}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Mit dem ersten Teil der Aufgabe folgt die Behauptung.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei $f = g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, gilt $f \circ g = f$, also $\mathrm{Kern}(g \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$. Da der Rang der Matrix 1 ist, folgt, dass g kein Isomorphismus ist.

zu Aufgabe 5

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Es sind $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

In der Induktionsannahme nehmen wir an, es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

zu Aufgabe 6

Die Wahrheitstafel für $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	f	f
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	w	f
f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

Wenn wir die mittleren Spalten zwischen den Doppelstrichen als Nebenrechnungen interpretieren (was sie ja auch sind), so sind die verbleibenden Spalten der Wahrheitstafeln gleich. Die Aussagen sind somit logisch äquivalent.

zu Aufgabe 7

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$a(v_1 + v_2) + b(v_1 - v_2) + c(v_1 + v_2 + v_3) = (a + b + c)v_1 + (a - b + c)v_2 + cv_3 = 0.$$

Da (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V ist, folgt

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0. \end{array}$$

Aus $c = 0$ folgt $a+b = 0$ und $a-b = 0$. Addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $2a = 0$, also $a = 0$. Es folgt $b = 0$. Die Gleichung $a(v_1+v_2)+b(v_1-v_2)+c(v_1+v_2+v_3) = 0$ ist also nur für $a = b = c = 0$ lösbar. Es folgt, dass die Vektoren $v_1+v_2, v_1-v_2, v_1+v_2+v_3$ linear unabhängig sind. Da aber drei linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 3 bereits eine Basis bilden, ist $v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3$ eine Basis von V.