Klausur Mathematik für Informatiker (Bachelor) II (Kurs 1152) vom 21.8.2004

Die Aufgaben sind mit Hilfe von Stichworten und aus dem Gedächtnis heraus aufgeschrieben worden. Für die Richtigkeit übernehme ich keine Gewähr!

Aufgabe 1:

(1) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch (a_n) konvergent.

(2) Ist (a_n) konvergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(3) Ist (a_n) eine Nullfolge, dann ist (a_n) monoton fallend.

(4) Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so ist (a_n) konvergent.

a) Sind die Aussagen (1) bis (4) wahr oder falsch? (ankreuzen) (2 Punkte)

b) Begründen Sie ihre Antwort in a) für (2) und (3). (2 Punkte)

c) Untersuchen Sie, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n!}$ konvergiert. (2 Punkte)

Aufgabe 2:

$f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x):=x^2\ln x$

a) Berechnen Sie $f'(x)$.

b) Zeigen Sie, daß f streng monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie: $\forall x\in[1,e]: f(x)\in[0,e^2]$, d.h. $f([1,e])\subset[0,e^2]$.

c) Begründen Sie mit einem geeigneten Satz aus dem Kurs:

$\forall y\in[0,e^2]\exists x\in[1,e]: f(x)=y$ (d.h. $[0,e^2]\subset f([1,e])$)

d) Bestimmen Sie $\int_1^e x^2\ln x\,dx$ mit partieller Integration.

(je 1 Punkt ?)

Aufgabe 3:

a) Bitte kreuzen sie an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

i) Für t-stellige normalisierte Gleitkommazahlen gilt:

$$x \overset{*}{+} y = (x+y)(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-t}$$

ii) Im Hifi-Bereich können mit 2 Byte 65536 Zahlen dargestellt werden.

(1 Punkt für eine richtige Antwort, ein Punkt Abzug für eine falsche)

b) Es sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - 1$.

i) Zeigen Sie, daß f in $[1,2]$ genau eine Nullstelle besitzt.
ii) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Berechnung dieser Nullstelle an.
iii) Berechnen Sie einen Newton-Schritt mit $x^{(0)} = \frac{3}{2}$. (4 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Bitte kreuzen sie an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

i) Die zu den paarweise verschiedenen Knoten $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ gehörenden Lagrange-Grundpolynome $l_0, \ldots l_n \in \prod_n$ bilden eine Basis von $\prod_n$.

ii) Die Lagrange-Grundpolynome sind definiert durch

$$l_\nu(x): \prod_{\mu=0}^{n} \frac{x - x_\mu}{x_\nu - x_\mu}, \quad \nu = 0, \ldots n.$$

(1 Punkt für eine richtige Antwort, ein Punkt Abzug für eine falsche)

b) Von einem quadratischen Polynom p liegt folgende Wertetabelle vor, in die sich genau ein Fehler bei einem y_i eingeschlichen hat:

x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1,1	1,21	1,44	1,69	1,96

Stellen Sie anhand eines Schemas dividierter Differenzen fest, für welches i der Wert y_i fehlerhaft ist.

Aufgabe 5:

Seien (Ω, P) ein W-Raum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei ZVen.

a) Geben Sie die Definition der stochastischen Unabhängigkeit von X und Y wieder, indem Sie ergänzen:

$P_{(X,Y)} =$ _____ . (1,5 Punkte)

Sei nun $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $T(x, y) = x + y$.

b) Definieren Sie die Faltung der W-Maße P_X und P_Y mit Hilfe von T:

$P_X * P_Y :=$ _____ . (1,5 Punkte)

c) Sind X und Y stochastisch unabhängig, so gilt $P_{X+Y} = P_X * P_Y$. Ergänzen Sie den Beweis:

$P_{X+Y} = P_{T \circ (X,Y)} =$ (_____)$_T$ = _____ = _____ . (3 Punkte)

Aufgabe 6:

Seinen $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Omega' = \{1, 2, 3\}$ und P das durch

ω	1	2	3	4
$P(\{\omega$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

über Ω gegebene W-Maß und $X : \Omega \to \Omega'$ definiert durch:

ω	1	2	3	4
$X(\omega)$	1	3	2	1

a) Bestimmen Sie die Urbilder und Bildmaße:

$X^{-1}(\{1\}) =$ _____

$X^{-1}(\{2\}) =$ _____

$X^{-1}(\{3\}) =$ _____

$P_X(\{1\}) =$ _____

$P_X(\{2\}) =$ _____

$P_X(\{3\}) =$ _____ (2,5 Punkte)

b) Bestimmen Sie gemäß der Definition des Erwartungswertes:

$E_P(X) =$ _____ + _____ + _____ + _____ = _____

$E_{P_X}(id_{\Omega'}) =$ _____ + _____ + _____ = _____ (2,5 Punkte)