01152-07-796

Bitte tragen Sie hier Ihre Matrikelnummer und Ihre Anschrift ein.

Postanschrift: Fernuniversität, 58084 Hagen

Vorname Name

Staße Nr.

PLZ Ort

FernUniversität in Hagen

Fachbereich Mathemati

Kurs 01152 Mathematik für Informatiker II (Bachelor)

Musterklausur (Bitte nicht zur Korrektur einschicken!)

Hinweise zur Bearbeitung:

1. Füllen Sie das Deckblatt aus.
2. Beginnen Sie mit der Lösung einer Aufgabe stets auf einem neuen Blatt und versehen Sie dieses m Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
3. Schreiben Sie bitte deutlich, *nicht* mit Bleistift und lassen Sie einen mindestens 5 cm breiten Rand
4. Heften Sie zum Schluss dieses Deckblatt und Ihre Lösungsblätter (nach Aufgaben sortiert) zusamme
5. *Außer einem Taschenrechner sind keine Hilfsmittel wie Studienbriefe, Bücher, Aufzeichnungen et zugelassen.*
6. Die Klausur besteht aus *drei* Teilen:
   - Analysis
   - Numerische Mathematik
   - Stochastik
7. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 12 Punkte erreichen *und in jedem Teil mi destens drei Punkte erzielen.*
8. Eine Bescheinigung für das Finanzamt und ggf. ein Übungsschein bzw. ein Zertifikat werden Ihne zugeschickt.

	Teil 1		Teil 2		Teil 3		
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
erreichbare Punkte	6	6	6	6	6	6	36
erreichte Punktzahl							

bestanden

ja ○

nein ○

© 2003 FernUniversität in Hagen Alle Rechte vorbehalten

Teil 1: Analysis

6 Punkte **Aufgabe 1**

(a) Gegeben seien die Folgen (a_n) und (b_n) durch

$$a_n := (-1)^n - \frac{n}{n+1}, \qquad b_n := \frac{2n^3 - 3n^2 - 5}{(n^2-2)(n+1)}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie jeweils den Grenzwert, falls er existiert. Wenn er nicht existiert, geben Sie bitte eine Begründung für die Divergenz der Folge.

(b) Geben Sie eine möglichst präzise Formulierung des Quotientenkriteriums für die Konvergenz von Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Prüfen Sie, ob das Kriterium in den Fällen

(1) $c_n := (-3)^{-n}(n^2+n)$

(2) $c_n := \frac{1}{\cos\frac{1}{n}}$

anwendbar ist (und daher Konvergenz liefert). Begründen Sie Ihre jeweilige Aussage. Sollte das Kriterium in einem der Fälle (oder in beiden Fällen) nicht anwendbar sein, so entscheiden Sie bitte auf andere (begründete) Weise über Konvergenz oder Divergenz der betreffenden Reihe(n).

6 Punkte **Aufgabe 2**

(a) Es sei I ein Intervall mit mehr als einem Punkt, und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien gegebene Funktionen. Geben Sie eine möglichst präzise Formulierung dafür, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Sei insbesondere $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $F(x) := \ln(1 + x^2)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist dieses F Stammfunktion einer Funktion f? Wenn ja, welcher? Könnte es zu diesem f weitere, von F verschiedene Stammfunktionen geben? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Geben Sie eine möglichst präzise Formulierung der Regel für die partielle Integration und berechnen Sie mit ihrer Hilfe das Integral

$$I(u) := \int_0^u \frac{(\arctan x)^2}{1 + x^2} dx \quad \text{für} \quad u \in \mathbb{R}.$$

[Zur Erinnerung: $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.]
Wie können Sie Ihr Ergebnis überprüfen?

(c) Berechnen Sie $I(u)$ mit Hilfe der Substitutionsregel, indem Sie mittels $t = \arctan x$ eine neue Integrationsvariable einführen.
[Zur Erinnerung: $\tan' = 1 + \tan^2$.]

Teil 2: Numerische Mathematik

Wichtiger Hinweis: In den durch Ankreuzen zu beantwortenden Teilaufgaben ergibt eine richtige Antwort 1 Punkt, eine falsche Antwort -1 Punkt. Werden in einer Aufgabe weniger als 0 Punkte erreicht, so wird auf 0 aufgerundet.

Aufgabe 3

2 Punkte a) Es sei $\tilde{x}_1$ ein Näherungswert zum exakten Datum x_1. Entscheiden Sie über die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

		richtig	falsch
i)	Formelfehler entstehen durch fehlerhafte Problemmodellierung.	○	○
ii)	Der absolute Fehler ε ist $\varepsilon = \tilde{x}_1 - x_1$.	○	○

4 Punkte b) Wird ein Körper einer konstanten Beschleunigung a unterworfen, so legt er, unter Vernachlässigung von Reibungseffekten, in t Sekunden die Strecke

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

zurück.

Sei nun der Eingabewert, nämlich die Zeit t, fehlerbehaftet. Bestimmen Sie den daraus für $s(t)$ resultierenden absoluten Fehler.

Aufgabe 4

2 Punkte a) Entscheiden Sie über die Richtigkeit folgender Aussagen:

		richtig	falsch
i)	Mit dem Horner-Schema kann man auch Ableitungswerte eines Polynoms berechnen.	○	○
ii)	Die Koeffizienten des Taylor-Polynoms lauten im Entwicklungspunkt x_0: $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu+1)!}, \quad \nu = 0, \ldots, n.$	○	○

4 Punkte b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 15 \\ 6 & 20 & 6 \\ 15 & 6 & 27 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad b = \begin{pmatrix} 45 \\ 38 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das angegebene Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren von Gauß.

Teil 3: Stochastik

Aufgabe 5:

Sei (Ω, P) ein W–Raum, Ω' eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$ sowie $X : \Omega \to \Omega'$.

$1\frac{1}{2}$ Punkte (a) Sei $A' \subset \Omega'$. Definieren Sie das Urbild $X^{-1}(A')$

$$X^{-1}(A') := \underline{\qquad\qquad}$$

2 Punkte (b) Das Bildmaß $P_X : \Omega' \to [0;1]$ ist definiert durch

$$P_X(A') := \underline{\qquad\qquad} \qquad \underline{\qquad\qquad}$$

$2\frac{1}{2}$ Punkte (c) Seien insbesondere $\Omega = \mathbb{N}_5$ und P das diskrete W–Maß auf Ω mit

$$P(\{1\}) = \tfrac{1}{12}\,,\ P(\{2\}) = \tfrac{2}{15}\,,\ P(\{3\}) = \tfrac{1}{3}\,,$$

$$P(\{4\}) = \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(\{5\}) = \tfrac{1}{5}\,.$$

Sei weiterhin $X : \mathbb{N}_5 \to \mathbb{N}_4$ gegeben durch $X(1) = 2$, $X(2) = 3$, $X(3) = 2$, $X(4) = 3$ und $X(5) = 1$.

Bestimmen Sie zunächst die folgenden Urbilder

$$X^{-1}(\{1\}) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$X^{-1}(\{2\}) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$X^{-1}(\{4\}) = \underline{\qquad\qquad}$$

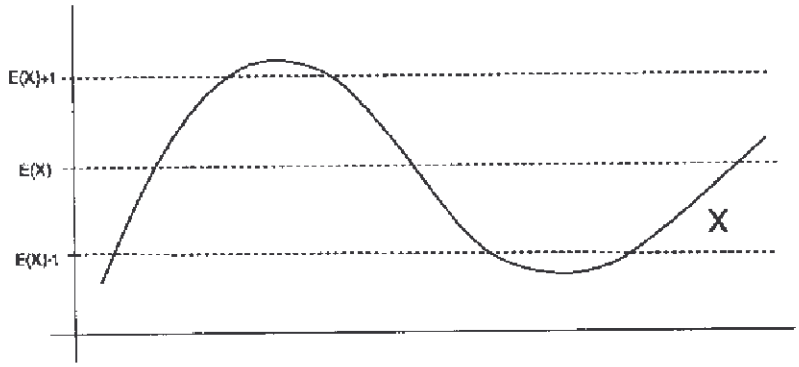
Bestimmen Sie nun die folgenden Werte des Bildmaßes P_X:

$$P_X(\{1\}) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$P_X(\{2\}) = \underline{\qquad\qquad}$$
$$P_X(\{4\}) = \underline{\qquad\qquad}$$

Aufgabe 6:

Seien (Ω, P) ein diskreter W–Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV mit existierender Varianz $V(X)$ bzw. Erwartungswert $E(X)$.

2 Punkte (a) Sei $A_t := \{\omega \in \Omega \,|\, |X(\omega) - E(X)| \geq t\}$ für $t \geq 0$.
Formulieren Sie die Tschebyschev'sche Ungleichung, wobei Sie die Menge A_t benutzen wollen.

2 Punkte (b) Beweisen Sie die Tschebyschev'sche Ungleichung (offenbar ist $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(|X - E(X)|^2)$).

2 Punkte (c) Zeichnen Sie im untenstehenden Graphen die Menge A_t ein: