Lösungen zu den Musterklausuraufgaben

Teil 1: Analysis

Aufgabe 1

(a) (i) Die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n - \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist divergent, denn sie besitzt die konvergenten Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n-1}), für die

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{2n} - \frac{2n}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 - \frac{2}{2+0} = 0 \quad \text{und} \\ a_{2n-1} &= (-1)^{2n-1} - \frac{2n-1}{2n-1+1} = -1 - \frac{2-\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow -1 - \frac{2-0}{2} = -2 \end{aligned}$$

für $n \longrightarrow \infty$ gilt, die also verschiedene Grenzwerte haben.

(ii) Die Folge (b_n) mit $b_n := \frac{2n^3-3n^2-5}{(n^2-2)(n+1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 2, denn es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n^3-3n^2-5}{(n^2-2)(n+1)} = \frac{2n^3-3n^2-5}{n^3+n^2-2n-2} = \frac{2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^3}}{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}} \\ &\longrightarrow \frac{2-0-0}{1+0-0-0} = 2 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty . \end{aligned}$$

(b) Zur Formulierung des Quotientenkriteriums siehe 1.4.11 in Kurseinheit 1 des Kurses 01152.

(1) Im Fall $c_n := (-3)^{-n}(n^2+n)$ ist das Quotientenkriterium anwendbar, denn es gilt $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \left|\frac{(-3)^{-(n+1)}((n+1)^2+(n+1))}{(-3)^{-n}(n^2+n)}\right| = \left|\frac{n^2+3n+2}{-3(n^2+n)}\right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{3}\,\frac{1+0+0}{1+0} = \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty , \end{aligned}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{3} < 1$. Damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-3)^{-n}(n^2+n)$ konvergent.

(2) Im Fall $c_n := \frac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar, denn es gilt zwar $c_n \neq 0$ und

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}} < 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

aber da cos in 0 stetig ist, gilt ferner

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 .$$

©2003 FernUniversität in Hagen

Wenn also $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten sollte, müsste $q \geq 1$ sein.
In der Tat ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ nicht konvergent, da

$$c_n = \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

gilt, die Reihenglieder somit keine Nullfolge bilden (vgl. 1.4.5 in Kurseinheit 1 des Kurses 01152).

Aufgabe 2

(a) Siehe 3.4.3 in Kurseinheit 3 des Kurses 01152.
$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow F(x) := \ln(1+x^2)$ ist eine Stammfunktion, da F in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. (Dies folgt aus der Differenzierbarkeit des Polynoms $x \longrightarrow 1+x^2$ und der Funktion ln mit Hilfe der Kettenregel.) Die Kettenregel liefert

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Daher ist F Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$.
Es gibt weitere Stammfunktionen zu f, nämlich alle Funktionen $F + \widehat{c}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) Siehe 3.4.6 in Kurseinheit 3 des Kurses 01152.
Wir setzen $f := \arctan$ und $g := \arctan^2$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g'(x) = 2(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I(u) &= f(x)g(x)\Big|_0^u - \int_0^u f(x)g'(x)dx \\ &= (\arctan x)^3\Big|_0^u - 2\int_0^u \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx \\ &= (\arctan u)^3 - 2I(u)\,. \end{aligned}$$

Es folgt $3I(u) = (\arctan u)^3$, also $I(u) = \frac{1}{3}(\arctan u)^3$.
Das Ergebnis kann durch Differenzieren überprüft werden, da $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longrightarrow I(u)$ eine Stammfunktion von $x \longrightarrow \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$ ist (Satz 3.4.2 in Kurseinheit 3 des Kurses 01152). In der Tat ist nach der Kettenregel

$$I'(u) = \frac{1}{3} \cdot 3(\arctan u)^2 \cdot \frac{1}{1+u^2}\,.$$

(c) Nach der Substitutionsregel ist

$$\int_0^u \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx = \int_0^{\arctan u} \frac{t^2}{1+\tan^2 t} \cdot (\tan' t)dt$$

$$= \int_0^{\arctan u} \frac{t^2}{1+\tan^2 t} \cdot (1+\tan^2 t)dt$$

$$= \int_0^{\arctan u} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^{\arctan u} = \frac{1}{3}(\arctan u)^3.$$

Teil 2: Numerische Mathematik

Aufgabe 3

a) i) richtig
ii) richtig

b) $\tilde{t} = t + \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow s(\tilde{t}) &= \frac{1}{2}a(t+\varepsilon)^2 = \frac{1}{2}a(t^2 + 2t\varepsilon + \varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2}at^2 + t\varepsilon a + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a \\
&= s(t) + t\varepsilon a + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a \\
\Rightarrow \varepsilon_{s(t)} &= s(\tilde{t}) - s(t) = t\varepsilon a + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) i) richtig
ii) falsch

b)

$$\begin{array}{rrrrl}
9 & 6 & 15 & 45 & \mid \cdot(-\frac{6}{9}) \quad \cdot(-\frac{15}{9}) \\
6 & 20 & 6 & 38 & \\
15 & 6 & 27 & 75 & \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
9 & 6 & 15 & 45 & \\
0 & 16 & -4 & 8 & \mid : 4 \\
0 & -4 & 2 & 0 & \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
9 & 6 & 15 & 45 & \\
0 & 4 & -1 & 2 & \\
0 & -4 & 2 & 0 & \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
9 & 6 & 15 & 45 & \\
0 & 4 & -1 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 &
\end{array}$$

$\Rightarrow x_3 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1$

Also $x = (1, 1, 2)^T$.

Teil 3: Stochastik

Lösung zu Aufgabe 5:

(a) $X^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A'\}$.

(b)
$$\begin{aligned} P_X(A') &:= P(X^{-1}(A')) \\ &\underset{(a)}{=} P(\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \in A'\}) . \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} X^{-1}(\{1\}) &= \{5\} \\ X^{-1}(\{2\}) &= \{1,3\} \\ X^{-1}(\{4\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(\{1\}) &= P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{5\}) = \tfrac{1}{5} \\ P_X(\{2\}) &= P(X^{-1}(\{2\})) = P(\{1,3\}) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12} \\ P_X(\{4\}) &= P(X^{-1}(\{4\})) = P(\emptyset) = 0 . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6:

(a) $P(A_t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$

(b) siehe 10.1

(c) siehe (10.1.1)