Aufgabe 1

Seien M, N Mengen.

2 Punkte **a)** Wie sind $M \cup N$ und $M \cap N$ definiert?

3 Punkte **b)** Zeigen Sie: $M \subset N \iff M \cup N = N$.

4 Punkte **Aufgabe 2**

Bestimmen Sie für die komplexe Zahl

$$z = \frac{1-2i}{3+4i}$$

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, und geben Sie z^{-1} in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

4 Punkte **Aufgabe 3**

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right).$$

Aufgabe 4

2 Punkte **a)** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung:

2 Punkte (i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_2 \right\}$,

2 Punkte (ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$,

2 Punkte (iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \geq x_3 \right\}$.

Aufgabe 5

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (i) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (ii) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (iii) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

5 Punkte **b)** Gegeben sei der folgende Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}.$$

(Sie brauchen *nicht* zu zeigen, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.)
Bestimmen Sie eine Basis von U und die Dimension von U. Begründen Sie Ihre Angaben.

Aufgabe 6

5 Punkte Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen in drei Unbekannten über $\mathbb{R}$:

$$G \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 1. \end{array}$$

Aufgabe 7

a) Seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wie sind folgende Begriffe definiert?

2 Punkte (i) $\operatorname{Kern} f$,

2 Punkte (ii) $\operatorname{rang} f$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + 3y + 5z \\ 2x + 3z \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2 Punkte (i) Zeigen Sie, dass f linear ist.

6 Punkte (ii) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{rang} f$.

3 Punkte (iii) Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 8

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte **a)** Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar?

4 Punkte **b)** Seien $P, Q \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar. Zeigen Sie:
PQ ist invertierbar mit $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.
(Die Aussage steht im Kurs, soll hier aber nochmal bewiesen werden.)

Aufgabe 9

a) Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Definieren Sie folgende Begriffe:

2 Punkte (i) Eigenwert von A,

2 Punkte (ii) Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ von A zum Eigenwert λ.

b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

6 Punkte (ii) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

3 Punkte (iii) Untersuchen Sie (mit Beweis), ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.