Aufgabe 1

Es seien M, N, L Mengen.

2 Punkte a) Wann heißt eine Abbildung $f : M \to N$ injektiv?

3 Punkte b) Es seien $f : M \to N$, $g : N \to L$ Abbildungen. Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Aufgabe 2

4 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n.$$

Aufgabe 3

2 Punkte a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ sind.

3 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_n^2 = -1 \right\}$,

3 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 = x_n \right\}$.

Aufgabe 4

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2 Punkte (1) linear unabhängig sind,

2 Punkte (2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden,

2 Punkte (3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 5

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

4 Punkte a) Definieren Sie folgende Begriffe: $\operatorname{rang} f$, $\operatorname{Kern} f$.

b) Durch

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

wird eine lineare Abbildung definiert. (Das brauchen Sie *nicht* zu zeigen.)

3 Punkte (1) Bestimmen Sie $\operatorname{rang} f$.

5 Punkte (2) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte a) Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

3 Punkte b) Es seien $P, Q \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar. Zeigen Sie, dass PQ invertierbar ist.
(Die Aussage steht im Kurs, sie soll nochmal gezeigt werden.)

Aufgabe 7

a) Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$. Definieren Sie folgende Begriffe:

2 Punkte (1) Eigenwert von A,

2 Punkte (2) Eigenraum $\operatorname{Eig}_A(\lambda)$ von A zum Eigenwert λ.

b) Sei $A \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte (1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

4 Punkte (2) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

2 Punkte (3) Untersuchen Sie (mit Beweis), ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Matrix $P \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.