Aufgabe 9

Es sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine geordnete Basis eines W-Vektorraumes V, und eine geordnete Basis C von V sei definiert durch

$$\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4) := (v_4, v_1, v_3, v_2).$$

(Sie brauchen nicht zu zeigen, daß C eine geordnete Basis von V ist.)

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Punkte **a)** Bestimmen Sie Mc(f).

3 Punkte **b)** Bestimmen Sie ein $P \in$ GL@) mit Mc(f) $= P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$.

Aufgabe 10

4 ***Punkte*** Zeigen Sie, daß für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

invertierbar ist, bestimmen Sie det P, und berechnen Sie $\det(P^{-1})$.

Aufgabe 11

Seien K ein Körper, n $\in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

2 ***Punkte*** **a)** Wann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von A?

3 ***Punkte*** **b)** Seien λ_1, λ_2 Eigenwerte von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Beweisen Sie:

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \{0\}.$$

Aufgabe 12

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 ***Punkte*** **a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

4 ***Punkte*** b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

2 ***Punkte*** c) Untersuchen Sie (mit Beweis), ob A diagonalisierbar ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, *so* daß $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Mathematik 1 / Mathematik für Informatiker 1, WS 96/97

Klausur vom 15.02.97:

Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Es gilt

$$z = \frac{3+i}{4+3i} = \frac{(3+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{(12+3)+(4-9)i}{16+9} = \frac{15-5i}{25} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i,$$

also ist Rez $= \frac{3}{5}$ und Imz $= -\frac{1}{5}$. Es folgt

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{10},$$

$$\overline{z} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i,$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Aufgabe 2

Zu zeigen ist: Für alle n $\in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang n $= 1$: Für $n = 1$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^{1-1}} = 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

womit der Induktionsanfang gesichert ist.

Induktionsschritt von n auf n t 1:

Wir betrachten ein n $\in \mathbb{N}$ und nehmen an, es gelte

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Wir haben zu zeigen, daß dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

© 1997 Fernuniversität - Gesamthochschule - in Hagen

folgt. Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $(*)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{3^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{k-1}}+\frac{1}{3^n}\\ &= \frac{3}{2}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)+\frac{1}{3^n} \qquad \text{(mit } (*))\\ &= \frac{3}{2}\Big(1-\frac{3}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\Big)\\ &= \frac{3}{2}\Big(1-\frac{1}{3^{n+1}}\Big),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 3

a) Siehe 2.3.1 oder 2.3.2.

b) Siehe Lösung LE 2.1 der Einsendeaufgabe E 2.1.

Aufgabe 4

a) (i) s. 25.12.

(ii) s. 3.1.8 a).

(iii) s. 3.1.8 b).

b) Zu betrachten sind die Vektoren

$$u := \begin{pmatrix} i\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ v := \begin{pmatrix} 1+i\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\ w := \begin{pmatrix} 1+2i\\ -4\\ 2-i\end{pmatrix}$$

des Vektorraums $\mathbb{C}^3$ (über $\mathbb{C}$).

Wir testen zunächst u, v, w auf lineare Unabhängigkeit: Seien a, b, c $\in \mathbb{C}$ mit

$$(*) \qquad au+bv+cw=0.$$

Äquivalent zu $(*)$ ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+i & 1+2i\\ 0 & -2 & -4\\ -1 & 1 & 2-i\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}),$$

dessen Lösungsmenge wir im folgenden bestimmen. Mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet man

A			rechte Seite	Umformungen
i	$1+i$	$1+2i$	0	
0	- 2	- 4	0	
- 1	1	2 - i	0	$Z_3 \mapsto Z_3 - iZ_1$
i	$1+i$	$1+2i$	0	
0	- 2	- 4	0	
0	2 - i	$4-2i$	0	$Z_3 \mapsto Z_3 + \frac{1}{2}(2-i)Z_2$
i	1 + i	$1+2i$	0	
0	- 2	- 4	0	
0	0	0	0	

Speziell für c := 1 erhält man

$$b = -2,\quad a = -\frac{1}{i}((1+i)b+(1+2i)c) = i(-2(1+i)+1+2i) = i(-1) = -i,$$

und mit diesen Werten a, b, c ist $au + bv + cw = 0$ eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors aus u, v, w, so daß diese Vektoren linear abhängig sind.

Wegen dim $\mathbb{C}^3 = 3$ bilden die drei Vektoren u, u, w dann auch kein Erzeugendensystem und insbesondere keine Basis von $\mathbb{C}^3$ (vgl. 3.3.10).

Aufgabe 5

a) (i) s. 3.6.1 bzw. 3.6.3.

(ii) s. 4.1.4, 4.2.1.

b) Zu betrachten ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f\Big(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Big) := \begin{pmatrix} x_1+2x_2-x_3\\ x_1+x_2+x_3\\ 2x_1+3x_3\\ x_1+x_2\end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Nach dem Injektivitätskriteriumfür lineare Abbildungen (s. 4.1.10) ist f genau dann injektiv, wenn Kern $f = \{0\}$ gilt.

Bestimmen wir im folgenden also Kernf. Es ist Kemf genau die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

G $\qquad As = 0$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Mittels Gaußschem Algorithmus berechnet man für die Lösungsmenge L(G)

A			rechte Seite	Umformungen
1	2	-1	0	
1	1	1	0	$Z_2 \mapsto Z_2 - Z_1$
20		3	0	$Z_3 \mapsto Z_3 - 2Z_1$
11		0	0	$Z_4 \mapsto Z_4 - Z_1$
1	2	-1	0	
0	-1	2	0	
0	-4	5	0	$Z_3 \mapsto Z_3 - 4Z_2$
0	-1	1	0	$Z_4 \mapsto Z_4 - Z_2$
1	2	-1	0	
0	-1	2	0	
0	0	-3	0	
0	0	-1	0	$Z_4 \mapsto Z_4 - \frac{1}{3}Z_3$
1	2	-1	0	
0	-1	2	0	
0	0	-3	0	
00		0	0	

Folglich gilt

$$\mathrm{Kern}\, f = L(G) = \{0\},$$

also ist f injektiv.

(ii) Nach Definition von rang und nach der Dimensionsformel 4.1.14 gilt

$$\mathrm{rang}\, f = \dim \mathrm{Bild}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Kern}\, f = 3 - 0 = 3.$$

Zur Berechnung einer Basis von Bild f : Offenbar sind

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

drei linear unabhängige Vektoren in Bildf (vgl. Rechnung in (i)). Wegen dim Bild f = 3 bilden sie also eine Basis von Bild f.

Ferner ergibt sich aus

$$\dim \mathrm{Bild}\, f = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4,$$

daß f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 6

a) s. 4.1.14.

b) (i) Angenommen, es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit rang f = 2 und dim Kern f = 2. Dann liefert die Dimensionsformel

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Kern}\, f + \dim \mathrm{Bild} f = \dim \mathrm{Kern}\, f + \mathrm{rang}\, f = 2 + 2 = 4.$$

Widerspruch! Somit kann eine lineare Abbildung mit den verlangten Eigenschaften nicht existieren.

(ii) Angenommen, es gibt eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Die Dimensionsformel ergibt wegen Bild $f = \mathbb{R}^4$ dann

$$0 \leq \dim \mathrm{Kern}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Bild}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{R}^4 = 3 - 4 = -1.$$

Widerspruch! D. h. es gibt keine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

(iii) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ist offenbar linear und injektiv.

(iv) Es kann keine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ geben wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ (bzw. da es nach (ii) insbesondere keine surjektiven linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gibt).

Aufgabe 7

a) Die Koeffizientenmatrix von G_a ist

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & -2a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

und die erweiterte Matrix von G_a ist

$$B_a := \begin{pmatrix} 11 & 0 & 1 \\ 2 & a & -2a & 0 \\ 11 & a & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Um diejenigen a $\in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die G_a lösbar bzw. eindeutig lösbar ist, wird nun der Rang von A_a und von B_a berechnet.

erweiterte Matrix				Umformungen
1	1	0	1	$Z_2 \mapsto Z_2 - 2Z_1$
2	a	$-2a$	0	$Z_3 \mapsto Z_3 - Z_1$
1	1	a	2	
1	1	0	1	$Z_2 \mapsto Z_2 + 2Z_3$
0	$a-2$	$-2a$	-2	
0	0	a	1	
1	1	0	1	
0	$a-2$	0	0	
0	0	a	1	

Für $a \neq 0, 2$ ist rang $A_a =$ rang $B_a = 3$, also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar (nach 5.6.6 und 5.6.9).
Für $a = 0$ ist rang $A_0 = 2 < 3 =$ rang B_0, also ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
Für $a = 2$ ist rang $A_2 =$ rang $B_2 = 2$, also ist das Gleichungssystem lösbar, aber es ist nicht eindeutig lösbar.

b) Für $a = 2$ folgt (nach den obigen Umformungen) $2x_3 = 1$, also $x_3 = \frac{1}{2}$. Man kann x_2 beliebig vorgeben und erhält (aus der ersten Zeile)

$$x_1 = 1 - x_2.$$

Für $a = 2$ ist also

$$L(G_2) = \{ \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Aufgabe 8
a) Siehe Definition 5.4.1.
b) Siehe Beweis zu 5.4.6 c).

Aufgabe 9
a) Gemäß 6.1.6 gilt

1. $f(v_1) = 9v_1 + 2v_2$, 2. $f(v_2) = 7v_2 + 5v_4$,
3. $f(v_3) = 9v_3 + v_4$, 4. $f(v4) = v_4$.

Um Mc(f) zu erhalten, müssen wir gemäß 6.1.6 zunächst $f(w_i)$ als Linearkombination in w_1, w_2, w_3, w_4 darstellen (wir beachten $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (v_4, v_1, v_3, v_2)$):

1. $f(w_1) = f(v_4) = v_4 = w_1$,
2. $f(w_2) = f(v_1) = 9v_1 + 2v_2 = 9w_2 + 2w_4$,
3. $f(w_3) = f(v_3) = 9v_3 + v_4 = 9w_3 + w_1$,
4. $f(w_4) = f(v_2) = 7v_2 + 5v_4 = 7w_4 + 5w_1$,

damit lesen wir nun Mc(f) ab:

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Laut 6.2.10 ist $P := M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach C; weiter ist P invertierbar, da $\mathcal{B}$ und C Basen sind. Mit 6.2.12 folgt

$$M_C(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P.$$

Wie sieht nun P aus? Wir müssen die Bilder $\mathrm{id}_V(w_i)$ als Linearkombinationen in v_1, v_2, v_3, v_4 darstellen:

1. $\mathrm{id}_V(w_1) = w_1 = v_4$, 2. $\mathrm{id}_V(w_2) = w_2 = v_1$,
2. $\mathrm{id}_V(w_3) = w_3 = v_3$, 4. $\mathrm{id}_V(w_4) = w_4 = v_2$;

d. h.

$$P = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Inverse von P lautet:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun unmittelbar nach (zur Kontrolle, nicht Bestandteil dieser Aufgabe), daß

$$\mathrm{Mc(f)} = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$$

gilt.

Aufgabe 10

Mit

$$\det P = 1 + 0 + 0 + b^2 + a^2 + 0 \quad \text{(Jägerzaunregel)}$$
$$= 1 + a^2 + b^2 > 0 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

ist P gemäß 6.5.16 invertierbar. Laut 6.5.16 erhalten wir für die Determinante $\det(P^{-1})$ der Inversen von P:

$$\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1} = \frac{1}{1 + a^2 + b^2}.$$

Aufgabe 11

a) Siehe 7.5.4.

b) Wir zeigen: Ist $v \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1)$ fl $\mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$, dann gilt u $= 0$ (die Inklusion $\{0\} \subset \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$ ist klar). Sei also u $\in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$, dann gilt

$$\lambda_1 v = Au = \lambda_2 v;$$

d. h. $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$. Da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ gilt, muß u = 0 sein (sonst wäre $(\lambda_1 - \lambda_2)v \neq 0$), und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe 12

a) $$\chi_A(x) = \det(x\mathbf{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-3 & 2 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ -3 & 3 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ x-1 & 3 & x+2 \end{pmatrix}$$

(Wir haben zur 1. Spalte die 3. Spalte addiert, der Wert der Determinante ändert sich damit nicht, siehe 6.5.4)

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

(Wir haben von der 3. Zeile die 1. Zeile subtrahiert, der Wert der Determinante ändert sich damit nicht, siehe 6.5.9)

$$= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1) \quad (6.5.12)$$

Also ist $\chi_A(x) = (x - 1)^2(x + 1)$.

Da die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen von χ_A sind (vgl. 7.5.11), besitzt A die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$.

b) Wenn A diagonaiisierbar ist, müssen wir eine Basis von $\mathbb{R}^3$ finden können, die aus lauter Eigenvektoren von A besteht; Eigenvektoren finden wir in den Eigenräumen:

1. $\mathrm{Eig}_A(-1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A + \mathbf{1}_3)v = 0\}$.

Zur Bestimmung von $\mathrm{Eig}_A(-1)$ müssen wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem

$$(G_1) \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 53 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die 1. Gleichung ist die Summe aus der 2. und 3. Gleichung. Die 2. Gleichung liefert $x_3 = x_1 + x_2$; setzen wir dies in die 3. Gleichung ein, so erhalten wir

$x_1 - 4x_2 = 0$, d. h. $x_1 = 2x_2$;

also $v = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit gilt

$$\mathrm{Eig}_A(-1) = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}),$$

ersichtlich ist $\{{}^t(2, 1, 3)\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(-1)$.

2. $\mathrm{Eig}_A(1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \mathbf{1}_3)v = 0\}$.

Zur Bestimmung von $\mathrm{Eig}_A(1)$ müssen wir das folgende homogene lineare Gleichungssystem

$$(G_2) \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 2x2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die 1. und die 3. Gleichung sind Vielfache der 2. Gleichung. Es ergibt sich

$$x_1 = x_2 + x_3$$

d. h. $v = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Also gilt

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}),$$

ersichtlich ist $\{{}^t(1,1,0), {}^t(1,0,1)\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(1)$.

c) Wir setzen $v_1 := \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Behauptung: $v_1, v_2,$ us sind linear unabhängig, und also eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Denn sei (1) $a_1v_1 + a_2v_2 + am = 0$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, wenden wir A auf diese Gleichung an, so folgt

$$(2) \qquad 0 = -a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

denn: $Av_1 = -v_1$, $Av_i = v_i$ (i = $2,3$). Addieren wir die Gleichungen (1) und (2), so folgt

$$0 = 2a_2v_2 + 2a_3v_3;$$

da v_2, v_3 linear unabhängig sind, erhalten wir $a_2 = a_3 = 0$, und also $a_1 = 0$. Damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig. Wir setzen

$$P := \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

dann ist P gemäß 6.5.17 und 6.5.16 invertierbar. Weiter gilt

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

denn mit $v_i = Pe_i$ (er, e_2, es Standardbasis von $\mathbb{R}^3$) erhalten wir

$$P^{-1}APe_i = P^{-1}Av_i = P^{-1}\lambda_iv_i = \lambda_iP^{-1}v_i = \lambda_ie_i$$

(Xi = -1 für i = 1, $\lambda_i = +1$ für i $= 2,3$). Damit ist also A diagonalisierbar.