Lösungshinweise zur Klausur Mathematik für Informatiker I
WS 98/99

Aufgabe 1

a) $z = (6-2i) - (2+i) = 4-3i$, also $\operatorname{Re} z = 4$, $\operatorname{Im} z = -3$ und $|z| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Ferner gilt $\bar{z} = 4+3i$ und $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{4+3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

b) $z = (1+i)\cdot(7+i) = (7-1)+(1+7)i = 6+8i$, also $\operatorname{Re} z = 6$, $\operatorname{Im} z = 8$ und $|z| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$. Ferner gilt $\bar{z} = 6-8i$ und
$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{6-8i}{100} = \frac{3}{50} - \frac{2}{25}i$.

c) $z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$, also $\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$ und $|z| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Ferner gilt $\bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ und $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{10}{4}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$.

Aufgabe 2

a) (i) $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt:

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0. \quad \text{(Vgl. 3.1.2.)}$$

(ii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn zu jedem $v \in V$ Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ existieren mit $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ (d.h. wenn sich jedes $v \in V$ als Linearkombination der v_i darstellen läßt, vgl. 2.5.12 und 2.5.6).

(iii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt *Basis* von V, wenn die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem von V bilden. (Vgl. 3.1.8.)

b) (i) Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ sind die vier Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^3$ sicher linear abhängig. (Vgl. 3.3.10 (i).)

(ii) Wir prüfen, ob v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. (Daraus würde nach 3.1.8 folgen, daß $\{v_1, v_2, v_3\}$ und damit auch $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.)

$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0 \iff Ax = 0$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\begin{aligned} \det A &= 1\cdot 2\cdot(-1) + 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 0 \\ &= -2 + 0 + 2 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

ist A invertierbar und $Ax = 0$ nur für $x = 0$ möglich. Daher sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kann keine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein, weil v_1, v_2, v_3, v_4 nach (i) linear abhängig sind.

Aufgabe 3

a) Gemäß 2.5.6 haben wir

$$\mathrm{Lin}(M) := \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_m \in K, v_1, \ldots, v_m \in M\}.$$

b) Es sind $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ zu bestimmen mit

$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, d.h. wir suchen Lösungen von $Ax = w$ mit

$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dieses lineare Gleichungssystem lösen wir mit dem Gaußschen Algorithmus:

A	w	Umformungen
$1\ 4\ 5$ $2\ 7\ 8$ $3\ 6\ 9$	0 10 0	$Z_2 \longmapsto Z_2 - 2Z_1$ $Z_3 \longmapsto Z_3 - 3Z_1$
$1\ 4\ 5$ $0\ -1\ -2$ $0\ -6\ -6$	0 10 0	$Z_3 \longmapsto Z_3 - 6Z_2$
$1\ 4\ 5$ $0\ -1\ -2$ $0\ 0\ 6$	0 10 -60	$Z_2 \longmapsto -Z_2$ $Z_3 \longmapsto \frac{1}{6}Z_3$
$1\ 4\ 5$ $0\ 1\ 2$ $0\ 0\ 1$	0 -10 -10	

Für die Lösung gilt

$x_3 = -10$

$x_2 + 2x_3 = -10 \Longrightarrow x_2 = -10 - 2x_3 = -10 - 2 \cdot (-10) = 10$

$x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = -4x_2 - 5x_3 = -40 + 50 = 10,$

also $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + (-10) \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Das lineare Gleichungssystem lautet in Matrixform

$Ax = w$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir lösen es mit dem Gaußschen Algorithmus:

A	w	Umformungen
$\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}Z_2 \longmapsto Z_2 - 4Z_1\\ Z_3 \longmapsto Z_3 - 7Z_1\end{matrix}$
$\begin{matrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$	$Z_3 \longmapsto Z_3 - 2Z_2$
$\begin{matrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$	$Z_2 \longmapsto -\frac{1}{3}Z_2$
$\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\-\frac{1}{3}\\0\end{matrix}$	

Die dritte Gleichung ist weggefallen, also können wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei wählen und erhalten

$x_2 + 2x_3 = -\frac{1}{3} \Longrightarrow x_2 = -\frac{1}{3} - 2x_3 = -\frac{1}{3} - 2t$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -2(-\frac{1}{3} - 2t) - 3t = \frac{2}{3} + t.$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist

$$\mathrm{L(G)} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = w\} = \{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + t \\ -\frac{1}{3} - 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 5

a) Die Dimensionsformel für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lautet gemäß 4.1.14

$$\dim \text{Bild } f + \dim \text{Kern } f = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

b) Zunächst bestimmen wir eine Basis von Kern $f = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x) = 0\}$. Dazu lösen wir das homogene lineare Gleichungssystem

G $\qquad Ax = 0$

für $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Algorithmus (man beachte: $Ax = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, also Kern $f = \mathrm{L(G)}$):

A			Umformungen
1	1	-1	$Z_2 \longmapsto Z_2 - 3Z_1$
3	6	0	$Z_3 \longmapsto Z_3 - 5Z_1$
5	6	-4	
1	1	-1	
0	3	3	$Z_3 \longmapsto Z_3 - \frac{1}{3}Z_2$
0	1	1	
1	1	-1	
0	3	3	$Z_2 \longmapsto \frac{1}{3}Z_2$
0	0	0	
1	1	-1	
0	1	1	
0	0	0	

$x_3 = t \in \mathbb{R}$ ist frei wählbar,
$x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -x_3 = -t$,
$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2 + x_3 = -(-t) + t = 2t$,
also Kern $f = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} = \text{Lin} \, (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Weil $b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig ist, haben wir die Basis $\mathcal{B} := (b_1)$ von Kern f ermittelt.

Nun bestimmen wir eine Basis von Bild $f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\} = \text{Lin}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) =$
$\text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix})$. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ gilt

$\text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix})$, $b_1' := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $b_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

sind linear unabhängig (aus $a_1 b_1' + a_2 b_2' = 0$ folgt $a_1 = a_2 = 0$) und bilden daher die Basis $\mathcal{B}' := (b_1', b_2')$ von Bild f.

Aufgabe 6

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 2^1 - 2 & 2^0 \end{pmatrix}.$$

Induktionsschritt von n auf $n+1$:
Wir nehmen an, daß für n die Gleichung

$$(*) \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^n - 2 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (\textit{Induktionsannahme})$$

erfüllt ist, und weisen nach, daß $(*)$ auch mit $n+1$ anstelle von n erfüllt ist (*Induktionsbehauptung*):

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A \cdot A^n &\underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^n - 2 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 0 + 2^{n-1} & 2^n + 2 + 2^n - 2 & 2^{n-1} + 0 + 2^{n-1} \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 2^{n-1} + 0 + 2^{n-1} & 2^n + 0 + 2^n - 2 & 2^{n-1} + 0 + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2^n - 2 & 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 2^{n+1} - 2 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{(n+1)-1} & 2^{n+1} & 2^{(n+1)-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{(n+1)-1} & 2^{n+1} - 2 & 2^{(n+1)-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Wegen $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $f(b_1) = 1b_1 + 2b_2 + 2b_3$, $f(b_2) = 0b_1 + 0b_2 + 3b_3$ und $f(b_3) = 1b_1 + 0b_2 + 2b_3$.

Zur Bestimmung von $M_{\mathcal{C}}(f)$ müssen die Bilder der c_i als Linearkombination von c_1, c_2, c_3 geschrieben werden. Es gilt

$f(c_1) = f(b_3) = 1b_1 + 0b_2 + 2b_3 = 2c_1 + 1c_2 + 0b_3,$
$f(c_2) = f(b_1) = 1b_1 + 2b_2 + 2b_3 = 2c_1 + 1c_2 + 2c_3$ und
$f(c_3) = f(b_2) = 0b_1 + 0b_2 + 3b_3 = 3c_1 + 0c_2 + 0c_3,$

also $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Für die Übergangsmatrix $P := M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ (vgl. 6.2.10) von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{C}$ gilt nach 6.2.12 $P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = M_{\mathcal{C}}(f)$.
Zur Bestimmung dieser Übergangsmatrix stellen wir die Basisvektoren von $\mathcal{C}$ als Linearkombination der Basisvektoren von $\mathcal{B}$ dar:

$c_1 = b_3 = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$
$c_2 = b_1 = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$
$c_3 = b_2 = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3,$

also $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Sei $P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ wie in b) und $P_\alpha := \alpha P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$

($\alpha \neq 0$). Dann ist P_α invertierbar mit Inversem $P_\alpha^{-1} = \alpha^{-1}P^{-1}$. Angesichts der Assoziativität und der Skalarverträglichkeit der Matrizenmultiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} P_\alpha^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P_\alpha &= (\alpha^{-1}P^{-1}) M_{\mathcal{B}}(f) (\alpha P) \\ &= (\alpha^{-1} \cdot \alpha) P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P \\ &= P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P \\ &= M_{\mathcal{C}}(f). \end{aligned}$$

Jede der (unendlich vielen) Matrizen P_α erfüllt also dieselbe Gleichung wie P, das heißt P ist durch diese Gleichung *nicht* eindeutig bestimmt.

Aufgabe 8

a) $$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 6 + 0 + 6 - 4 - 0 - 6 \\ &= 2. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} A^\sharp &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 & -(1 \cdot 3 - 3 \cdot 1) & 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ -(2 \cdot 3 - 2 \cdot 0) & 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 & -(1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 & -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) $\det(A^\sharp \cdot A) = \det(\det(A)\mathbf{1}_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$

Nun gilt $8 = \det(A^\sharp \cdot A) = \det(A^\sharp) \cdot \det(A) = \det(A^\sharp) \cdot 2$, also $\det(A^\sharp) = \frac{8}{2} = 4$.

d) Wegen $\det(A) = 2 \neq 0$ (vgl. a)) ist A invertierbar mit Inversem

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A} A^\sharp = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Wegen $\det(A^\sharp) = 4 \neq 0$ (vgl. c)) ist $A^\sharp$ invertierbar mit Inversem

$$(A^\sharp)^{-1} = \tfrac{1}{\det A} A = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9

a) Ein Körperelement $\lambda \in K$ heißt Eigenwert der $n \times n$–Matrix A, wenn es einen Vektor $v \in K^n$ gibt mit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$.

b) Der Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ der Matrix A zum Körperelement $\lambda \in K$ ist definiert als Menge aller Vektoren $x \in K^n$ mit $Ax = \lambda x$; kurz

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{x \in K^n : Ax = \lambda x\}.$$

c) Wir zeigen zunächst $\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2) \subseteq \{0\}$:
Für jeden Vektor $v \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$ gilt definitionsgemäß $Av = \lambda_1 v$ und $Av = \lambda_2 v$, also $\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v$. Daraus folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0$ und damit $v = 0$, da wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jedenfalls $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ gilt.

Nun zeigen wir $\{0\} \subseteq \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$:
Für den Nullvektor $0 \in K^n$ gilt $A0 = 0 = \lambda_1 0$ und $A0 = 0 = \lambda_2 0$, also $0 \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_1)$ und $0 \in \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$.

Insgesamt ist somit die Gleichheit der beiden Mengen $\{0\}$ und $\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}_A(\lambda_2)$ bewiesen.

Aufgabe 10

a) Das charakteristische Polynom χ_A von A ist

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(x\mathbf{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & -1 \\ -2 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \\
&= (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) + 1\cdot(-2)\cdot 1 \\
&\quad -(-2)\cdot(x-2)\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot(x-1) - (x-4)\cdot(-2)\cdot(-1) \\
&= (x-1)\cdot(x^2 - 2x - 4x + 8) - 2 - 2 + 2\cdot(x-2) + 1\cdot(x-1) - 2\cdot(x-4) \\
&= (x-1)\cdot(x^2 - 6x + 8) - 4 + 2x - 4 + x - 1 - 2x + 8 \\
&= (x^3 - 6x^2 + 8x - x^2 + 6x - 8) + (x-1) \\
&= x^3 - 7x^2 + 15x - 9.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\chi_A(x)$. Zu deren Bestimmung bemerken wir zunächst die erste Nullstelle $x = 1$ ($\chi_A(1) = 1 - 7 + 15 - 9 = 0$) und dividieren nun $\chi_A(x)$ durch $x - 1$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) : (x - 1) = x^2 - 6x + 9 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -6x^2 + 15x \\
\quad \underline{-(-6x^2 + 6x)} \\
\quad\quad 9x - 9 \\
\quad\quad \underline{-(9x - 9)} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Daraus ergibt sich $\chi_A(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 6x + 9) = (x-1) \cdot (x-3)^2$, das heißt A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ (einfach) und $\lambda_2 = 3$ (doppelt).

b) Der Eigenraum von A zum Eigenwert $\underline{\lambda_1 = 1}$ ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Eig}_A(1) &= \mathrm{Kern}(1\mathbf{1}_3 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad [\text{Umformungen: } Z_3 \longmapsto Z_3 - Z_2 \text{ und } Z_3 \longmapsto Z_3 + 2Z_1] \\
&= \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).
\end{aligned}
$$

Eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(1)$ ist also gegeben durch $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Der Eigenraum von A zum Eigenwert $\underline{\lambda_2 = 3}$ ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Eig}_A(3) &= \mathrm{Kern}(3\mathbf{1}_3 - A) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad [\text{Umformungen: } Z_2 \longmapsto Z_2 + Z_1, \ Z_3 \longmapsto Z_3 + Z_1] \\
&= \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).
\end{aligned}
$$

Eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(3)$ ist also gegeben durch $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

c) Wir bilden aus den in b) berechneten Basisvektoren die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det P &= (-1)\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 \\ &= -2+1+0-0-0-1 = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

ist P invertierbar.
Die Spalten von P bilden somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht, d.h. A ist diagonalisierbar mit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\begin{aligned} P\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A\cdot P \end{aligned}$$

wie gewünscht.