Zusammenstellung von Fragen der Vordiplomsprüfung Mathe für Informatiker I (Kurs 1181)

Vorbemerkungen

Die nachfolgenden Fragen sind eine Zusammenstellung aus ca. 26 Protokollen von Februar 1990 bis November 1995. Die Zahlen in Klammern hinter einer Frage geben die absolute Häufigkeit dieser Frage an, getrennt nach den Prüfern Petersson, Kamps und Duma (in dieser Reihenfolge). Die Antworten stammen teilweise aus den Protokollen, sowie aus dem Kurstext (Version 10/91).
"(*)" hinter einer Frage bedeutet, daß diese Frage in den Protokollen nicht vorgekommen ist, sie meiner Meinung nach aber gut in den Zusammenhang paßt.

Inhalt

Allgemeine Fragen, „Duma-Specials“

- Einige nicht so geläufige griechische Buchstaben: (*)
  - χ - Chi, ζ - Zeta, ξ - Xi
- Wozu betreibt man lineare Algebra? (0, 0, 1)
- Gegeben seien die stetigen Funktionen x, sin x, cos x, exp x als Vektoren. Sind diese Vektoren linear unabhängig? (0, 0, 1)
  - Es ist also zu zeigen: ax + b sin x + c cos x + d exp x = 0
    für a, b, c, d nicht sämtlich gleich Null.
    Sie sind linear unabhängig (wie Prof. Duma zeigte).

Span, Erzeugendensystem

Span

- Wie ist Span (A) definiert? (2, 0, 0)
  - Sei A eine nichtleere Teilmenge von V.
    Dann ist Span (A) := $\{ \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, a_i \in A \ (1 \leq i \leq m) \}$
  - Span ($\emptyset$) = $\{0\} \subset V$.
  - Span (A) ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen einer Teilmenge A von V mit Skalaren aus K.
  - 2.6.6, 2.6.7
- Welche Eigenschaften hat Span (A)? (1, 0, 0)
  - Span (A) ist Untervektorraum des Vektorraums V, der A enthält.
    Beweis:
    a) Für jedes $a \in A$ gilt $a = 1 * a \in$ Span (A), also enthält Span (A) jeden Vektor $a \in A$, also auch A.
    b) Wenn $u, v \in$ Span (A) gilt, dann ist auch $\alpha u + \beta v \in$ Span (A), was unter Verwendung der Definitionsgleichung von Span (A) gezeigt werden kann, indem die Reihenentwicklungen von u und v zu einer neuen Reihe addiert werden.
  - $A \subset A' \Rightarrow$ Span (A) $\subset$ Span (A')
  - $A \subset$ Span (A)
- Sei E eine Teilmenge von V, U ein Untervektorraum von V. Welche Relation besteht zwischen den Aussagen $E \subset U$ und Span (E) $\subset U$? (1, 0, 0)
  - Die Aussagen sind äquivalent.
- Welche Richtung ist wohl trivial zu zeigen? (1, 0, 0)
  - Span (E) $\subset U \Rightarrow E \subset U$, da E eine Teilmenge von Span (E) ist.
- Zeigen Sie nun die andere Richtung. (1, 0, 0)
  - Beweis (2.6.8):
    Gilt $E = \emptyset$, also Span (E) = Span ($\emptyset$) = $\{0\}$, so folgt Span (E) $\subset U$, weil U als Untervektorraum stets den Nullvektor (von V) enthält.
    Gilt $E \neq \emptyset$, so gilt für jedes $v \in$ Span (E) $v = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, $a_i \in E$. Wg. $E \subset U$ gilt dann auch $a_i \in U$ und aus der wiederholten Anwendung der Untervektorraum-Bedingung $\alpha u + \alpha' u' \in U$ für $u, u' \in U$ folgt $v \in U$.

Erzeugendensystem

- Was ist ein Erzeugendensystem? (5, 0, 2)
  - Ein Erzeugendensystem von V ist eine Teilmenge E von V mit Span (E) = V.
- Wann ist ein Erzeugendensystem E eine Basis? (1, 0, 0)
  - Wenn E linear unabhängig ist.
- Hat jeder Vektorraum ein Erzeugendensystem? (1, 0, 0)
  - Ja, da Span (V) = V gilt, ist jeder Vektorraum V ein Erzeugendensystem für sich selbst.
  - Ja, da jeder Vektorraum eine Basis hat und jede Basis auch ein Erzeugendensystem ist.

Lineare (Un-) Abhängigkeit

- Was ist lineare Unabhängigkeit? (1, 0, 1)
- Wie ist die lineare Unabhängigkeit definiert? (3, 0, 1)
  - Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.
    Dann sind $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ linear unabhängig.
    $\Leftrightarrow$ Für alle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ gilt: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
  - Eine Teilmenge A von V ist linear unabhängig, wenn die Vektoren jeder endlichen Teilmenge von A, die nur verschiedene Vektoren enthält, linear unabhängig sind.
  - $\emptyset \subset V$ ist linear unabhängig.
- Wie ist die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren definiert? (1, 0, 3)
  - Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur als die triviale Linearkombination dargestellt werden kann.
  - Vektoren $v_1, ..., v_n$ sind linear abhängig, wenn Skalare $\alpha_1, ..., \alpha_n$ existieren, die nicht sämtlich gleich Null sind, so daß $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ gilt.
- Was ist noch zu fordern, um zum Basisbegriff zu gelangen? (1, 0, 0)
  - Die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ müssen V erzeugen.
- Was bedeutet lineare Unabhängigkeit anschaulich für 2 Vektoren in der Ebene? (1, 0, 0)
  - Die Vektoren spannen ein <u>echtes</u> Parallelogramm auf.
- Wie zeigt man, daß V linear abhängig bzw. unabhängig ist? (0, 0, 1)
- Was ist eine Linearkombination, was ist lineare Unabhängigkeit? (0, 0, 2)
  - $\Sigma_{i=1}^m \alpha_i a_i$ ist Linearkombination der $a_1, ..., a_m \in V$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$.
  - 2.6.2
  - 3.1.2
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen linearer Unabhängigkeit und einer Basis? (0, 0, 1)
  - Sei $B := \{b_1, ..., b_m\}$ eine Basis. Dann kann jeder Vektor $v \in V$ <u>eindeutig</u> als Linearkombination der $b_1, ..., b_m$ dargestellt werden. (Basiskriterium 3.1.11)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen linearer Unabhängigkeit und dem Rang? (0, 0, 1)
  - Sei rang A := m $\Leftrightarrow$ Es gibt m linear unabhängige Vektoren in A; je m + 1 Vektoren aus A sind linear abhängig.

Basis, Vektorraum, Dimension eines Vektorraums

Basis

- Was ist eine Basis (von V)? (1, 0, 1)
  - Eine linear unabhängige Teilmenge B von V, die V erzeugt, d.h. B muß gleichzeitig auch Erzeugendensystem von V sein.
  - Die Anzahl der Vektoren der Basis B wird dadurch nach unten beschränkt (mindestens), daß B ein Erzeugendensystem ist; die Anzahl wird nach oben beschränkt (maximal), daß B linear unabhängig ist.
- Wie ist der Begriff der Basis eines Vektorraums definiert? (0, 0, 2)
- Was versteht man unter der Basis eines Vektorraums? (0, 0, 4)
  - Eine Teilmenge B von V heißt Basis von V, falls B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist. (3.1.8)
  - Weitere Stichworte: Erzeugendensystem, Span, Dimension (2.6.12, 2.6.6, 3.3.3)
- Kann man mehrere linear unabhängige Vektoren aus V jederzeit durch andere linear unabhängige Vektoren aus V so ergänzen, daß sie zusammen eine Basis von V bilden? (0, 0, 1)
  - Ja.
- Wie kann man aus einem Erzeugendensystem eine Basis gewinnen? (1, 0, 0)
  - Indem man linear abhängige Vektoren des Erzeugendensystem eliminiert.
- Welche Bedingungen müssen Vektoren erfüllen, um eine Basis zu sein? (0, 0, 1)
  - Sie müssen linear unabhängig sein und ein Erzeugendensystem bilden.
- Wie erhält man eine Basis von V? (1, 0, 0)
  - Indem man linear abhängige Vektoren eliminiert, was genau dann möglich ist, wenn sich der Vektor als Linearkombination anderer Vektoren darstellen läßt. Um dies wiederum festzustellen, kann man ein LGS mit dem Vektor als rechte Seite aufstellen. Ist das LGS lösbar, kann der Vektor eliminiert werden.
- Was ist über die Anzahl der Elemente unterschiedlicher Basen eines Vektorraums zu sagen? (0, 0, 1)
  - Alle Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.
- Zeigen Sie, daß alle Basen eines Vektorraums gleich viele Elemente haben. (0, 0, 4)
  - Beweis (3.3.1 f):
    Seien B, B' Basen von V mit n bzw. n' Elementen.
    Es wird V von B erzeugt, also von n Elemneten. Da B' als Basis linear unabhängig ist, muß $n' \leq n$ gelten. Die umgekehrte Begründung liefert $n \leq n'$, also $n = n'$.
- Wie lautet die Standardbasis des n-dimensionalen Spaltenraumes K^n? (1, 0, 1)
  - $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ wobei die e_i die Einheitsvektoren sind. (3.1.12)
- Wohldefiniertheit der Basis (0, 0, 1)
  - 3.3.10

Vektorraum

- Was ist ein Vektorraum? (0, 0, 3)
  - Ein Vektorraum über dem Körper K ist eine nichtleere Menge V zusammen mit den Abbildungen Addition und skalare Multiplikation, so daß das Assoziativ- und das Kommutativgesetz der Addition, die beiden Distributivgesetze und das Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation gelten. Außerdem müssen bzgl. der Addition das Nullelement und das Inverse existieren. Für die Multiplikation gilt $1v = v$ für alle $v \in V$. (2.3.1)

- Können Sie zeigen, daß das Nullelement eindeutig ist? (0, 0, 1)
  - Gelte v + 0 = v und v + 0' = v. Dann folgt durch Einsetzen von 0' bzw. 0
    0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0, also 0' = 0.
- Was sind endlich und unendlich erzeugte Vektorräume? (0, 0, 1)
- Wie ist ein endlicher Vektorraum definiert? (0, 0, 2)
  - Ein endlicher Vektorraum V hat ein endliches Erzeugendensystem, d.h. es gibt ein Erzeugendensystem von V, das nur endlich viele Elemente hat. (3.3.3 b)
- Nennen Sie mehrere Beispiele für Vektorräume (0, 0, 1)
- Was für Vektorräume kennen Sie? (1, 0, 1)
  - K, K^n, C über IR, $Mat_{m,n}$ (K), Abb(X, K) mit $X \neq \emptyset$, Hom (V, W), ...
  - Es kann auch jeder Körper K als Vektorraum über sich selbst aufgefaßt werden, z. B. IR über IR.
- Wie kann man aus endlichen Vektorräumen neue Vektorräume gewinnen? (1, 0, 0)
  - Man kann durch gewisse einschränkende Bedingungen (z. B. $a_1 + a_2 = 0$) einen Untervektorraum von V erzeugen.
  - Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist wiederum ein Untervektorraum.
  - Anmerkung: Bei der Vereinigung zweier Untervektorräume entsteht nur dann ein Untervektorraum, wenn ein Untervektorraum im anderen enthalten ist.
  - A ist Untervektorraum von V genau dann, wenn A = Span (A) gilt. (2.6.9)
- Was ist ein Untervektorraum? (0, 0, 1)
  - Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn für alle $\alpha, \alpha' \in K$ und $u, u' \in U$ auch $\alpha u + \alpha' u' \in U$ gilt.
  - Die Null von U ist durch die Null von V bestimmt, d.h. $0_V \in U$.
  - Für alle $u \in U$ ist auch $-u \in U$.
  - 2.4.2

Dimension eines Vektorraums

- Erläutern Sie den Begriff der Dimension eines Vektorraumes (1, 0, 1)
- Was ist die Dimension eines Vektorraums V (Definition)? (5, 0, 2)
  - Anzahl der Elemente einer Basis von V (wenn V endlich erzeugt ist, sonst $+\infty$) (3.3.3 a)
  - Die Dimension ist die kleinste ganze Zahl $n \geq 0$ mit der Eigenschaft, daß n + 1 Vektoren in V linear abhängig sind. (3.3.11 a)
  - Eine Basis von V existiert, ist aber nicht eindeutig
  - Je 2 Basen von V haben dieselbe Anzahl von Elementen
  - Es sind mehrere Basen möglich, die aber alle die gleiche Anzahl von Elementen haben.
  - unendlich erzeugt $\Leftrightarrow$ dim V = ∞
  - endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ es existiert eine endliche Basis
    $\Leftrightarrow$ jede Basis ist endlich
    $\Leftrightarrow$ je zwei verschiedene Basen von V haben gleich viele Elemente
  - Die Anzahl der Basisvektoren ist also invariant gegenüber der Wahl der Basis. Diese Invariante nennt man die Dimension des Vektorraums.
- Was gilt für einen Untervektorraum U von V bezüglich der Dimension? (4, 0, 0)
  - dim U $\leq$ dim V
  - Beweis (3.3.13 a):
    Da V endlich ist, existiert ein n := dim V = min N^0 (V), so daß n + 1 Vektoren in V

linear abhängig sind. Also sind auch n + 1 Vektoren in U linear abhängig, was mit N^0 (U) die endliche Dimension von U impliziert.
Mit m := dim U = min N^0 (U) $\leq$ n = dim V folgt die Behauptung.
Anmerkung: min N^0 (V) liefert das kleinste p, so daß p + 1 Vektoren in V linear abhängig sind.

- Wie beweist man, daß für einen Untervektorraum U von V dim U $\leq$ dim V gilt? (2, 0, 0)
- Wann gilt dim U = dim V? (1, 0, 0)
  - Falls U = V gilt.
- Falls U ein Untervektorraum von V ist, was gilt dann, falls dim U = dim V gilt? (1, 0, 0)
  - U = V
  - Beweis (3.3.13 b):
    Sei n := dim U = dim V. Sei B eine Basis von U. B ist also linear unabhängig und enthält n Elemente. Also ist B in einer Basis B' von V enthalten, die ebenfalls n Elemente enthält, also mit B übereinstimmt. Es folgt U = Span (B) = V.

Lineare Gleichungssysteme

- Was ist ein LGS? (1, 0, 2)
  - Ein Schema mit m Gleichungen (Zeilen) in n Unbekannten auf der linken Seite und einem (konstanten) Vektor b $\in K^m$ als rechter Seite. (2.5.1, 2.5.3)
  - Matrixform: Ax = b mit A $\in \mathrm{Mat}_{m,n}$ (K), x $\in K^n$, b $\in K^m$. (5.6.1)
  - Grundform: $\Sigma_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j = \beta_i$ (i = 1, ..., m)
  - $\Sigma_{j=1}^n a_j\xi_j = b$ (a_j,b $\in K^m$)
- Wie ist ein LGS definiert und welche Eigenschaften (Lösbarkeitskriterien, Lösungsmenge des homogenen LGS, ...) hat es? (1, 0, 0)
- Was sind in der Darstellung $\Sigma_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j$ (i = 1, ..., m) die α_{ij}? (0, 0, 1)
  - Die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems bzw. die Komponenten der Matrix A $\in \mathrm{Mat}_{m,n}$ (K).
- Wann hat ein LGS überhaupt eine Lösung? (1, 0, 0)
- Wann hat ein LGS nicht nur die triviale Lösung? (0, 0, 1)
- Wann ist ein LGS allgemein lösbar und wie berechnet man die Lösungen? (0, 0, 1)
- Wann ist ein LGS Ax = b lösbar? (1, 0, 5)
  - Wenn rang (A) = rang (A, b) gilt. (3.4.6, 5.6.6)
  - Wenn b $\in$ Span (a_1, ..., a_n) gilt. $\Leftrightarrow$ b $\in$ Bild (A) (3.4.6)
  - Wenn A eine n x n - Matrix und invertierbar ist, dann hat A den Maximalrang. Damit gilt stets b $\in$ span (A) und Ax = b ist für alle b $\in K^n$ lösbar.
- Was ist, wenn rang (A) $\neq$ rang (A, b) ist? (0, 0, 1)
  - Dann ist das LGS nicht lösbar, da b nicht in dem von span (A) aufgespannten Raum liegt, also durch keine Linearkombination von A darstellbar ist.
- Wann ist ein LGS eindeutig lösbar? (0, 0, 1)
  - Ein LGS G ist eindeutig lösbar, wenn G^0 nur die triviale Lösung hat, d.h. wenn rang (A) = rang { a_1, ..., a_n } = n gilt, mit a_1, ..., $a_n \in K^m$.
    $\Leftrightarrow$ Kern (A) = {0} (5.6.9)
  - Es gilt der folgende Satz:
    Wenn G eine Lösung besitzt, dann gilt:
    G hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow$ G^0 hat nur die triviale Lösung.
- Wann ist ein LGS universell lösbar? (0, 0, 1)
  - Wenn rang (A) = rang { a_1, ..., a_n } = m gilt, mit a_1, ..., $a_n \in K^m$. (3.4.7, 5.6.7)

  - Universell lösbar bedeutet, daß das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für <u>jedes</u> $b \in K^m$ eine Lösung hat.
- Wann ist ein LGS <u>eindeutig und universell</u> lösbar? (*)
  - Wenn rang (A) = n (wg. eindeutig) und rang (A) = m (wg. universell) gilt. Das hat zur Folge, daß n = m gilt, die Matrix also quadratisch sein muß. Außerdem muß diese quadratische Matrix invertierbar sein, damit rang (A) = n gilt. (5.6.10)
- Sei $Ax = 0$ ein LGS. Wie berechnet man die Lösungsmenge? Ist Kern A ein Untervektorraum des K^n? Warum ist Kern A ein Untervektorraum? (0, 0, 1)
- Was ist die Lösungsmenge eines LGS? (1, 0, 0)
  - Die Menge aller Vektoren $x \in K^n$, die das Gleichungssystem erfüllen.
  - $L(G^0)$ ist ein Untervektorraum von K^n der Dimension n - rang (A). (2.5.8)
  - Ist G ein LGS, G^0 die Homogenisierung von G und $a \in K^n$ eine Lösung von G, so gilt: $L(G) = \{a + x \mid x \in L(G^0)\}$. (2.5.11, 5.6.8 b)
- Ist L(G) ebenfalls ein Untervektorraum von K^n? (1, 0, 0)
  - Nein, weil sie den Nullvektor nicht enthält. (2.5.10)
- Was ist der Bezug zwischen einem Vektorraum und einem LGS? (1, 0, 0)
  - Die Lösungsmenge eines <u>homogenen</u> Gleichungssystems [$(L(G^0)$] ist ein Untervektorraum von K^n.
  - <u>Beweis:</u>
    Der Nullvektor ist stets Lösung von G^0, also ist $L(G^0)$ nicht leer.
    Seien $x, x' \in L(G^0)$ beliebig, $\alpha, \alpha' \in K$.
    Dann ist $A(\alpha x + \alpha' x') = \alpha(Ax) + \alpha'(Ax') = \alpha 0 + \alpha' 0 = 0$, also ist $(\alpha x + \alpha' x') \in L(G^0)$.
- Kann die Lösungsmenge eines nicht-homogenen LGS ein Untervektorraum sein? (1, 0, 0)
- Wie sieht es bei <u>inhomogenen</u> Gleichungssystemen aus? (1, 0, 0)
  - Die Lösungsmenge eines <u>inhomogenen</u> Gleichungssystems [(L(G)] ist <u>kein</u> Untervektorraum von K^n, weil der Nullvektor nicht zu L(G) gehört, aber im Untervektorraum enthalten ist.
- Matrixform des LGS als n-Tupel von Spaltenvektoren des K^m. (1, 0, 0)
  - G ist lösbar, wenn $b \in \mathrm{Span}\,(a_1, ..., a_n)$
- Wann hat $Ax = 0$ nicht nur die triviale Lösung? (0, 0, 1)
  - Wenn rang (A) < n gilt, da $\dim L(G^0) = n - \mathrm{rang}\,(A)$ gilt.
  - Wenn die Zahl der Unbekannten größer ist als die Zahl der Gleichungen. Damit ist n > m. rang (A) ist jedoch höchstens gleich min (n, m) = m, also gilt auf alle Fälle rang (A) < n. (4.1.12)

<u>Cramersche Regel, Gauß-Algorithmus</u>

- Elementare Umformungen eines LGS? (0, 0, 1)
- Wie kann man ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten praktisch lösen? (0, 0, 1)
  - Cramersche Regel
    (nur wenn m = n gilt, d.h. $A \in Mat_n(K)$ und $\det(A) \neq 0$, d.h. A invertierbar)
  - Im Fall $Ax = b$ mit $A \in Mat_n(K)$ und A invertierbar kann die Lösung direkt angegeben werden mit $x = A^{-1}b$. (5.6.11)
  - Gauß-Algorithmus (4.6.7)
- Wie lautet die Cramersche Regel? (0, 0, 5)
  - Sei $\det(A) = \det(a_1, ..., a_n) \neq 0$. Dann ist $\xi_j = \det(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n) / \det(A)$
- Beweisen Sie die Cramersche Regel. (0, 0, 3)

    - Für den Vektor b in der Determinante im Zähler wird die Reihenentwicklung von Ax eingesetzt. Umformen liefert eine Reihe mit dem Index k gleich 1 bis n mit Elementen ξ_k * det (..., a_k, ...) mit a_k als j-te Spalte der Matrix. Nur für k = j ist diese Determinante dann ungleich Null, so daß det (..., b, ...) = ξ_j * det (A) folgt. Division durch det (A) liefert die Behauptung. (6.5.18)
- Wie funktioniert (detailliert) der Gauß-Algorithmus? Woran merkt man, daß das Gleichungssystem keine Lösung hat? (0, 0, 1)
- Wie funktioniert der Gauß-Algorithmus? Wann ist hierbei das LGS lösbar? (0, 0, 1)
    - Sei r := rang (A). Dann ist das LGS lösbar, wenn im umgeformten Matrix-Schema maximal die obersten r Komponenten der rechten Seite b' ungleich Null sind, d.h. es muß $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \quad = b'_n = 0$ gelten. (4.6.7 b)
- Wie berechnet man eine Lösung mit dem Gauß-Algorithmus? (0, 0, 2)
    - 1.) Man formt die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen und Spalten vertauschungen in die benötigte Dreiecks-Form um.
      2.) Man führt die Zeilenumformungen entsprechend für die rechte Seite b aus.
      3.) Man führt die Spaltenvertauschungen entsprechend für den Unbekanntenvektor x aus.
      4.) Wenn $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \quad = b'_n = 0$ gilt, dann ist das LGS lösbar und man gibt sich $x_{r+1}, ..., x_n$ beliebig vor und berechnet rückwärts $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$.
      Allgemein ist $x_i = b_i - \Sigma_{j=i+1}{}^n a_{ij}x_j$ $(1 \le i \le r)$.
- Wie kann man mit dem Gauß-Algorithmus eine Matrix invertieren? (0, 0, 1)
    - Als rechte Seite wird die Einheitsmatrix gewählt.
      (Siehe auch das Kapitel „Matrizen, Determinanten“)

Homomorphismen

- Wie ist ein Homomorphismus definiert? (1, 0, 0)
    - Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für $v, v' \in V$, $\alpha \in K$ gilt: <u>f (v + v') = f (v) + f (v')</u> und <u>f (αv) = αf (v)</u>.
- Injektivitätskriterium: (*)
    - f ist injektiv dann und nur dann, wenn Kern f = {0} gilt. (3.7.6)
- Wie ist der Zusammenhang Homomorphismus $\leftrightarrow$ Isomorphismus? (1, 0, 0)
    - Ein Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus $V \rightarrow W$.
    - V heißt isomorph zu W, falls ein Isomorphismus von V auf W existiert. (3.6.13 a)
      In Zeichen: V =-*Schlange* W.
- Wie wirkt sich ein Homomorphismus auf eine Basis B von V aus? (1, 0, 0)
    - Wenn der VR-Homomorphismus injektiv ist, so ist f (B) eine Basis von Bild (f).
    - Wenn der VR-Homomorphismus bijektiv, also ein VR-Isomorphismus ist, so ist f (B) eine Basis von W. (3.7.8)
- Es seien V, W endlich dimensional. Wann ist dann dim V = dim W? (1, 0, 0)
    - Es gilt:: V ist isomorph zu W $\Leftrightarrow$ dim V = dim W (3.7.9, 3.7.12)
- Was gilt für dim Kern f? (1, 0, 0)
    - Sei f ein Homomorphismus $f : V \rightarrow W$. Dann ist dim Kern f = dim V - rang f.
      Allgemein gilt <u>dim Kern f + dim Bild f = dim V</u> und mit rang f := dim Bild f(V) folgt das obige. (4.1.3)
- Wie heißt die obige Gleichung? (1, 0, 0)
    - Dimensionsformel für Homomorphismen. (3.7.10)
    - Haben V und W endliche Dimension, so gilt dim Bild f + dim Kern f = dim V für jeden Homomorphismus $f : V \rightarrow W$.

- Was assoziieren Sie mit Hom (V, W)? (1, 0, 0)
  - Hom (V, W) ist zunächst die <u>Menge</u> der Homomorphismen von V nach W, d.h. die Menge aller linearen Abbildungen f mit $f : V \to W$.
    <u>Formal:</u> Hom (V, W) := { f | f : $V \to W$ ist ein Homomorphismus }
  - Zusammen mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ist Hom (V, W) aber auch ein <u>Vektorraum</u> (siehe nächster Punkt).
- Wie ist der Vektorraum Hom (V, W) definiert? (1, 0, 1)
  - Hom (V, W) ist die Menge Hom (V, W) der Homomorphismen von V nach W zusammen mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation.
- Wie zeigt man, daß Hom (V, W) ein Vektorraum ist? (1, 0, 0)
  - Indem man die Vektorraum-Eigenschaften aus der Definition des Vektorraums nachweist.

- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen linearen Gleichungssystemen und Vektorraum-Homomorphismen her. (1, 0, 0)
  - Seien $a_1, ..., a_n \in K^m$. Dann ist $f : K^n \to K^m$ mit $f({}^t(\xi_1, ..., \xi_n)) := \Sigma_{j=1}^n \xi_j a_j$ ein Homomorphismus mit rang (f) = rang $\{a_1, ...a_n\}$. Für die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $\Sigma_{j=1}^n \xi_j a_j = 0$ gilt damit
    $\dim L(G^0) = n - \text{rang}\ \{a_1, ..., a_n\}$,
    da dim Kern f = dim V - dim Bild f = dim V - rang $\{a_1, ..., a_n\}$ gilt. (4.1.10)
  - G: Ax = b;
    G^0: Ax = 0
    $h_A: K^n \to K^m$
    $\dim L(G^0) = n - \text{rang}\ A = n - \text{rang}\ \{a_1, ..., a_n\}$
    Kern $h_A = L(G^0)$

- Was ist eine Linearform? (*)
  - Eine Linearform ist ein Vektorraum-Homomorphismus von V in K.
- Was gilt für den Kern einer Linearform? (1, 0, 0)
  - dim Kern λ = dim V - 1 falls λ eine Linearform $\neq 0$ auf V ist und V endliche Dimension hat. Kern λ ist in diesem Fall eine <u>Hyperebene</u> von V.
  - <u>Begründung:</u> Es gilt allgemein dim Kern f = dim V - dim Bild f und mit $\lambda \neq 0$ folgt dim Bild f = dim K = 1.
- Was ist die duale Basis des Dualraums V^*? (1, 0, 0)
  - $B^* = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ist geordnete Basis von V^*.
    Es ist V^* := Hom (V, K) der Vektorraum aller Linearformen von V in K.
  - (Spezialfall $\lambda(x) = 0$ beachten!)

Matrizen und Homomorphismen

- Wie ist der Zusammenhang Matrix $\leftrightarrow$ Homomorphismus? (0, 0, 1)
  - <u>Matrix $\to$ Homomorphismus:</u>
    Sei $A \in Mat_{m,n}(K)$. Dann ist $h_A: K^n \to K^m$, $x \to h_A(x) := Ax$ ein Homomorphismus. (5.3.1 a)
    Die Abbildung $h : Mat_{m,n}(K) \to (K^n, K^m)$ mit $A \to h(A) := h_A$ ist ein Homomorphismus. (5.3.1 c)
- Wie ist die Matrix eines Homomorphismus definiert? (0, 0, 1)

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Menge der Homomorphismen und der Menge der m x n - Matrizen? (0, 0, 1)
  - Isomorphie
- Welche Dimension hat der Vektorraum der m x n - Matrizen? (0, 0, 1)
  - m * n
- Welche Dimension hat dann der Vektorraum der Homomorphismen? (0, 0, 1)
  - Ebenfalls m * n
- Warum ist ein Vektorraum V mit dim V = n isomorph zu K^n? (*)
  - Sei B := $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist $f : K^n \rightarrow K^n$ mit $f\,(^t(\alpha_1, ..., \alpha_n)) := \Sigma_{j=1}^n \alpha_j b_j$ ein Homomorphismus, der injektiv und surjektiv, also bijektiv, und damit ein Isomorphismus ist. (3.6.19)
- Wie ist eine geordnete Basis definiert? (0, 0, 1)
  - Eine geordnete Basis von V ist ein n-Tupel $(b_1, ..., b_n)$ aus paarweise verschiedenen Vektoren aus V, so daß $\{ b_1, .., b_n \}$ eine Basis von V ist. (6.1.1)
- Übersetzungs-Isomorphismus von V auf K^n? (1, 0, 0)
  - Ist B = $(b_1, ..., b_n)$ eine geordnete Basis von V und $E^{(n)} = (e_1, ..., e_n)$ die geordnete Standardbasis von K^n, so heißt der eindeutig bestimmte Isomorphismus $\varphi_B: V \rightarrow K^n$ mit $\varphi_B\,(b_j) := e_j$ $(1 \leq j \leq n)$ der Übersetzungs-Isomorphismus von V auf K^n. (6.2.3)
- Was passiert, wenn man die Basen von V und W (für einen Homomorphismus f: $V \rightarrow W$) wechselt? (0, 0, 2)
  - Sei B = $(b_1, ..., b_n)$ eine geordnete Basis von V, B' = $(b'_1, ..., b'_n)$ ein beliebigies n-Tupel von Vektoren aus V. Schreibt man $b'_j = \Sigma_{i=1}^n \beta_{ij} b_i$ $(1 \leq j \leq n)$ als Linearkombination der Basisvektoren $b_1, ..., b_n$, so heißt $(\beta_{ij}) \in Mat_n\,(K)$ die <u>Übergangsmatrix</u> von B zu B'. (6.2.8)
  - Wenn die Übergangsmatrix invertierbar ist, ist B' eine Basis von V.
  - Für geordnete Basen B, B' von V und geordnete Basen C, C' von W und invertierbare Übergangsmatrizen B_n, C_m gilt dann für jeden Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ $\underline{M_{C',B'}\,(f) = C_m^{-1} * M_{C,B}\,(f) * B_n}$. (6.2.11)
- Wie verhält sich $M_{C,\,B}(f)$ bei Basiswechsel, Übergangsmatrizen? (?)
- Übersetzungsmatrix: Wie von einer Basis zur anderen? (0, 0, 1)
- Welche Dimension hat der Vektorraum Hom (V, W)? (2, 0, 0)
  - (dim V) * (dim W)
  - <u>Beweis / Herleitung:</u>
    Hom (V, W) ist isomorph zu $Mat_{m,n}$ (K).
    Die Matrizeneinheiten sind Basis von $Mat_{m,\,n}$ (K).
    Es gibt m * n Matrizeneinheiten, wobei dim V =: n, dim W =: m sei.
- Wie zeigt man, daß Hom (V, W) =-*Schlange* $Mat_{m,n}$ ist? (1, 0, 0)
  - Man definiere eine Abbildung f : Hom (V, W) $\rightarrow$ $Mat_{m,\,n}$ (K) und weise diese als Isomorphismus nach.
- Sei $A \in Mat_n$ (K). Woran sehen Sie, daß die Abbildung h_A bijektiv ist? (1, 0, 0)
  - Daran, daß A invertierbar ist.
- Wie ist der Zusammenhang von Matrizen und Homomorphismen? (0, 0, 2)
  - Hom $Mat_{m,\,n}$ (K) $\rightarrow$ Hom (K^n, K^m) (?)
  - Hom Hom (V, W) $\rightarrow$ $Mat_{m,\,n}$ (K) (?)
  - Isomorphie zwischen $Mat_{m,\,n}$(K) und Hom (V, W)
- Wie kommt man vom Homomorphismus zur Matrix? (1, 0, 0)
  - Definition von $M_{C,\,B}$ und der $f(b_j)$ (6.1.6)
- Wie findet man zu gegebenen Basen B von V und C von W und dem Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ die zugehörige Matrix? (0, 0, 1)

  - $f(b_j)$ ist eine Linearkombination der Vektoren der geordneten Basis C mit $f(b_j) := \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_{ij}c_i$ ($1 \leq j \leq n$).
    Die $\alpha_{ij} \in K$ sind eindeutig bestimmt und die Matrix $M_{C,B}(f) := (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$ heißt die Matrix von f bzgl. B und C. (6.1.6)
  - Die j-te Spalte von (α_{ij}) entsteht, indem man $f(b_j)$ als Linearkombination der c_i realisiert und die dabei auftretenden Koeffizienten der Reihe zu einer Spalte zusammenfaßt. (6.1.7)
- Was ist der Kern von $M_{C,\,B}$? (1, 0, 0)
- Wie kann man jeder Matrix einen Homomorphismus zuordnen? (0, 0, 1)
  - $f: K^n \to K^m$ mit $f(x) = Ax$
- Wie findet man zu gegebener Matrix den zugehörigen Homomorphismus? (0, 0, 1)
  - Bzgl. der geordneten Standardbasen von K^n und K^m ist der Homomorphismus $h_A: K^n \to K^m$, $x \to Ax$ durch die Matrix A selbst definiert. (6.2.1)
- Welche Beziehung besteht zwischen $Mat_{m,\,n}(K)$ und Hom (V, W)? (0, 0, 1)
  - $M_{C,B}$: Hom (V, W) $\to Mat_{m,n}(K) \to M_{C,B}(f)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Insbesondere gilt $M_{C,B}(\alpha f + \beta g) = \alpha M_{C,B}(f) + \beta M_{C,B}(g)$ für alle $\alpha, \beta \in K$ und $f, g \in Hom_K(V,W)$. (6.1.11)
- Wie sind die Dimensionen von $Mat_{m,n}(K)$ und Hom (V, W)? (0, 0, 1)
- Warum hat der Vektorraum $Mat_{m,n}(K)$ die Dimension m * n? (0, 0, 1)
  - Weil die kanonische Standardbasis des $Mat_{m,\,n}(K)$ aus m * n Matrizeneinheiten besteht. (4.2.16)
  - Für alle $A \in Mat_{m,n}(K)$ sind die Matrizeneinheiten E_{pq} ein Erzeugendensystem von $Mat_{m,n}(K)$, da $A := (\alpha_{i,j}) = \Sigma_{p=1}^{m}\Sigma_{q=1}^{n} \alpha_{pq}E_{pq}$ gilt. Da die E_{pq} linear unabhängig sind, sind sie eine Basis von $Mat_{m,n}(K)$. Also gilt dim $Mat_{m,n}(K) = m * n$.
- Dies benutzt man bei der Diagonalisierung, was können Sie dazu sagen? (0, 0, 1)

- Gegeben seien Vektorraum V, Vektorraum W und eine lineare Abbildung. Wie ist der Zusammenhang mit Matrizen? (0, 0, 1)
- Sie haben zwei Vektorräume mit je einer Basis und eine lineare Abbildung. Wie können Sie diese durch die Basen kennzeichnen? (0, 0, 1)
  - Matrix bei Basiswechsel $M_{C,B}(f)$
- Ist die Matrix eindeutig bestimmt? (0, 0, 1)
  - Ja, da die c_i eine Basis von C bilden, gibt es genau eine solche Linearkombination, da jeder Vektor aus W eindeutig als Linearkombination der Basis C darstellbar ist.
- Übergangsmatrizen erklären. (0, 0, 1)
  - Die zugehörige Abbildung ist die Identität. (?)
- Transformationsverhalten bei verschiedenen Basen (0, 0, 1)

Matrizen, Determinanten

- Welche elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen gibt es? (1, 0, 0)
  - Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile,
    Multiplikation einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar,
    Addition einer Linearkombination von Zeilen zu einer von diesen verschiedenen Zeile,
    Vertauschung zweier Zeilen. (4.4.2)
  - Entsprechende Umformungen für Spalten
- Wie ist die Matrizen-Multiplikation definiert? (0, 0, 2)

  - Die (i, j) - Komponente von A * B entsteht, indem man die i-te Zeile von A komponentenweise mit der j-ten Spalte von B multipliziert und die „Teilprodukte“ addiert. (5.1.9)
- Wann ist die Matrizen-Multiplikation A * B definiert? (0, 0, 1)
  - Wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. (5.1.2 a)
- Welche Eigenschaften hat die Matrix-Multiplikation? (0, 0, 1)
  - Sie ist skalarverträglich, assoziativ, links- und rechts-distributiv und unitär. (5.1.5)
  - Sie ist <u>nicht kommutativ</u>. (5.1.6 b)
  - Sie besitzt Nullteiler.
- Was kann man aus dem Kern A einer Matrix $A \in Mat_{m,\ n}$ (K) ableiten? (0, 0, 1)
  - dim Kern A = n - rang A
  - Kern A = $L(G^0)$ mit G^0: Ax = 0, $x \in K^n$

- Wie bestimmt man den Rang einer Matrix, die aus n Spaltenvektoren besteht? (1, 0, 0)
  - Durch iterierte elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen wird die Matrix auf eine Form gebracht, in der nur die obersten r Zeilen ungleich Null sind und außerdem die r x r - Matrix „links oben“ in der umgeformten Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, die auf der Hauptdiagonalen nur Einsen enthält. Dann ist r der Rang der Matrix.
- Invarianzsatz (1, 0, 0)
  - Der Rang einer Matrix wird durch iterierte elementare (Zeilen- und Spalten-) Umformungen <u>nicht</u> verändert. (4.4.9)
- Ergebnis: Blockmatrizen, aus denen der Rang einer Matrix direkt entnommen werden kann. (1, 0, 0)
  - 4.4.12
- Wie ist der Zusammenhang des Ranges einer n x n -Matrix mit der Determinante? (1, 0, 0)
  - Für det (A) $\neq$ 0 gilt rang (A) = n.
    Für det (A) = 0 gilt rang (A) < n.
- Was ist der Rang einer Matrix A und wie bestimmt (errechnet) man ihn? (2, 0, 1)
  - Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger (Spalten- bzw. Zeilen-) Vektoren von A für A $\neq$ 0.
    Der Rang der Nullmatrix ist gleich Null (rang 0 := 0). (4.3.7 bzw. 4.3.15)
  - Es gilt zeilenrang A = spaltenrang A = rang (A). (4.3.24)
  - Für alle $A \in Mat_{m,n}$ (K) gilt rang (A) $\leq$ min (m, n). (4.3.25)
- Was ist der Rang von Vektoren bzw. einer Matrix? (1, 0, 4)
  - Für eine Teilmenge A von V heißt rang (A) := dim Span (A) der Rang von A. (3.4.1)

- Was bedeutet Invertierbarkeit? (1, 0, 0)
  - Es existiert ein $A' \in Mat_n$ (K), so daß AA' = A'A = $\underline{\underline{1}}_n$ ist.
- Wann ist eine Matrix $A \in Mat_n$ (K) invertierbar? (0, 0, 1)
  - Wenn rang (A) = n $\Leftrightarrow$ det (A) $\neq$ 0 gilt.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer invertierbaren Matrix und ihrer Determinante? (0, 0, 1)
  - Wenn eine Matrix invertierbar ist, ist ihre Determinante ungleich Null.
- Was ist die Inverse einer Matrix? Wie sieht die geschlossenen Form der Inversen aus? (0, 0, 1)
  - Die Inverse einer Matrix A ist eine Matrix $A' \in Mat_n$ (K), so daß AA' = A'A = $\underline{\underline{1}}_n$ ist.

  - Für det (A) ≠ 0 gilt $A^{-1} = [1 / \det(A)] * A^{\#}$. (7.1.12)
    ($A^{\#}$ ist die Adjunkte oder auch Komplementärmatrix zu A).
  - Die Adjunkte $A^{\#} := (\alpha_{ij}^{\#})$ entsteht aus A, indem an die Stelle i, j das Produkt von $(-1)^{i+j}$ und der Determinante der Matrix A_{ji} gesetzt wird. A_{ji} entsteht aus A, wenn man die j-te Zeile und die i-te Spalte von A löscht.
    Der Faktor ±1 kann auch leicht aus dem sogenannten Schachbrettmuster abgelesen werden.
- Wie berechnet man die invertierte Matrix? (0, 0, 3)
  - Gauß-Algorithmus mit der Einheitsmatrix als rechter Seite. Dabei wird die Matrix A in die Einheitsmatrix und die Einheitsmatrix in die Inverse A^{-1} umgewandelt.
    Es ist darauf zu achten, daß entweder nur elementare Zeilenumformungen oder nur elementare Spaltenumformungen vorgenommen werden. (5.5.8)
  - geschlossene Form der Inversen (siehe vorhergehenden Punkt)

Determinante

- Was ist die Determinante einer Matrix und wie wird sie berechnet? (0, 0, 2)
  - Geometrische Vorstellung:
    Die Determinante einer Matrix ist das Volumen des Parallelepipeds, das von den Spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$ der Matrix im K^n aufgespannt wird.
- Wozu braucht man Determinanten? (0, 0, 1)
- Wie berechnet man (effektiv) die Determinante einer Matrix? (0, 0, 6)
  - Entwicklungssatz
  - Man führt Zeilen- oder Spaltenumformungen mit dem Ziel durch, in einer Zeile bzw. Spalte möglichst viele Nullen entstehen zu lassen, um dann nach dieser Zeile bzw. Spalte zu entwickeln. Nach dem „Schachbrettmuster" entscheidet sich, ob die Unter-Determinanten positiv oder negativ in die Summe eingehen.
  - Bei der Vertauschung zweier Zeilen bzw. Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
  - Sonderfälle für n = 1, 2 bzw. 3. (6.4.12)
  - $A \in Mat_3(K)$: Jägerzaunregel bzw. Regel von Sarrus.
  - Leibnizscher Entwicklungssatz (7.2.5)
    (Ist allerdings nicht effektiv für größere n, da n! verschiedene Produkte entstehen.)
- Was ist eine Determinantenfunktion? (1, 0, 0)
  - Eine Determinatenfunktion ist eine Abbildung $\Delta : Mat_n(K) \to K$, so daß für alle $A, B \in Mat_n(K)$ folgende Bedingungen erfüllt sind:
    a) $\Delta(B) = \Delta(A)$, falls B aus A durch Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte entsteht.
    b) $\Delta(B) = \alpha\, \Delta(A)$, falls B aus A durch Multiplikation einer Spalte mit einem (beliebigen) Skalar $\alpha \in K$ entsteht.
  - 6.4.3
- Beweisen Sie: det(AB) = det(A) * det(B) (0, 0, 1)
  - A wird fixiert und $\Delta_2(B) := \Delta_1(AB)$ wird als Determinantenfunktion nachgewiesen. (6.4.8, 6.5.6)

Polynome, Pol K

- Kennen Sie einen nicht endlich (unendlich) erzeugten Vektorraum? (2, 0, 1)

  - Pol K = { f | f : K $\rightarrow$ K ist Polynom } (7.3.7)
  - Pol K ist Untervektorraum von Abb (K, K) wobei K unendlich viele Elemente hat.
- Was ist ein Polynom? (1, 0, 0)
  - Eine Abbildung f: K $\rightarrow$ K mit m $\in$ IN^0, $\alpha_0, ..., \alpha_m \in$ K mit f (ξ) = $\Sigma_{i=0}^m \alpha_i \xi^i$ für alle $\xi \in$ K. (7.3.7)
  - 2.4.10
- Nennen Sie eine Basis des Vektorraums der Polynome. (0, 0, 1)
  - 1, x, x^2, x^3, ... (d.h. die Monome ξ^i, i $\in$ IN^0)
- Wie zeigt man, daß Pol K nicht endlich erzeugt ist? (2, 0, 0)
  - Man zeigt, daß die Monome ein Erzeugendensystem von Pol K bilden und linear unabhängig sind.
  - Dazu wird u. a. die Vandermondesche Determinante benötigt, für die det („Vand“) = $\Pi_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j - \alpha_i)$ gilt. (7.1.18)
    Die Matrix der Vandermondschen Determinanten enthält dabei in der ersten Zeile die Werte 1 = α_1^0, α_1, α_1^2, ..., α_1^{n-1}, in der zweiten Zeile die Werte 1 = α_2^0, α_2, α_2^2, ..., α_2^{n-1}, usw. bis zur letzten Zeile mit den Werten 1 = α_n^0, α_n, α_n^2, ..., α_n^{n-1}.
  - 7.3.14
- Was ist der triviale Teil an diesem Beweis? (1, 0, 0)
  - Monome bilden ein Erzeugendensystem von Pol K
- <u>Algebraisch abgeschlossener Körper:</u> (*)
  - K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes nicht konstante Polynom aus Pol K mindestens eine Nullstelle in K besitzt. (7.4.11)
- <u>Fundamentalsatz der Algebra:</u> (*)
  - Der Körper C der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen. (7.4.12)

Eigenwerte, charakteristisches Polynom, ...

- Wie ist das Eigenwertproblem definiert? (2, 0, 0)
  - $\lambda \in$ K ist Eigenwert von A, falls ein Vektor x $\in$ K^n, x $\neq$ 0 mit Ax = λx existiert. (7.5.1)
- Was sind Eigenwerte einer Matrix? (3, 0, 4)
  - Alle Werte $\lambda \in$ K, zu denen ein Vektor x $\in$ K^n mit x $\neq$ 0 existiert, so daß Ax = λx gilt.
- Was wissen Sie über Eigenwerte? (0, 0, 1)
  - 7.5.1 - 7.5.5
  - Eig_A (λ) := {x $\in$ K^n mit Ax = λx} $\neq$ {0} falls λ Eigenwert von A ist.
    Eig_A (λ) ist dann Untervektorraum von K^n.
- Was ist ein Eigenwert, was ein Eigenvektor (einer Matrix)? (0, 0, 6)
  - Ein Eigenvektor einer Matrix A ist jeder Vektor x $\in$ K^n, x $\neq$ 0, für den Ax = λx gilt (jeweils auf einen Eigenwert λ bezogen).
- Warum berechnet man die Eigenwerte einer Matrix? (0, 0, 1)
  - Geometrische Deutung:
    Die durch x bestimmte Gerade Span (x) $\subset$ K^n wird von A invariant gelassen.
- Was sind die Eigenwerte einer Diagonalmatrix (oberen Dreiecksmatrix)? (0, 0, 1)
  - Die Werte auf der Hauptdiagonalen.
    Denn es gilt hier $X_A(\xi)$ = det (ξ * $\underline{\underline{1}}_n$ - A) = $\Pi_{i=1}^n(\xi\underline{\underline{1}}_n - \lambda_i)$, so daß die Werte λ_i auf der Hauptdiagonalen der Matrix gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bilden.
- Wie berechnet man praktisch die Eigenwerte? (0, 0, 7)
  - Charakteristisches Polynom: $X_A(\xi)$:= det(ξ * $\underline{\underline{1}}_n$ - A)

- Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

- Was ist das charakteristische Polynom? (0, 0, 1)
- Wie ist der Zusammenhang des Eigenwertproblems mit der Determinante? (1, 0, 0)
  - Das charakteristische Polynom ist als $X_A(\xi) = \det(\xi * \underline{\underline{1}}_n - A)$ definiert. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die Eigenwerte von A.
- Wie ist das charakteristische Polynom definiert? (2, 0, 0)
  - <u>Definition:</u> $X_A: K \to K$ mit $X_A(\xi) = \det(\xi * \underline{\underline{1}}_n - A)$ (7.5.5)
  - <u>Spezialfälle:</u>
    $A \in Mat_2(K)$: $X_A(\xi) = \xi^2 - (\text{spur } A)\xi + \det(A)$
    $A \in Mat_3(K)$: $X_A(\xi) = \xi^3 - (\text{spur } A)\xi^2 + (\text{spur } A^{\#})\xi - \det(A)$
- Wie entsteht das charakteristische Polynom aus $Ax = \lambda x$? (Beweis) (0, 0, 1)
- Beweis: λ ist Eigenwert $\Leftrightarrow$ λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms (0, 0, 2)
- Warum stellen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte dar? (0, 0, 4)
  - $Ax = \lambda x$
    $\Leftrightarrow$ $(\lambda\underline{\underline{1}}_n - A)\, x = 0$
    $\Rightarrow$ $Eig_A(\lambda) = \text{Kern}(\lambda\underline{\underline{1}}_n - A)$, also ist λ Eigenwert, wenn $Eig_A(\lambda) \neq 0$ ist
    (wg. $x \neq 0$ in der Definition des Eigenwertes)
    $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(\lambda\underline{\underline{1}}_n - A) < n$ (d.h. die Matrix $(\lambda\underline{\underline{1}}_n - A)$ ist nicht invertierbar)
    $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda\underline{\underline{1}}_n - A) = 0$
  - 7.5.9
- Ist 0 als Eigenwert zugelassen? (0, 0, 1)
  - Ja.
- Wann sind alle Eigenwerte einer Matrix reell? (0, 0, 1)
  - Wenn die Matrix diagonalisierbar ist und die Diagonalmatrix nur reelle Werte enthält.
  - Wenn die Matrix hermitesch ist, d.h. wenn ^{t}A-*quer* = A gilt ($A \in Mat_n(C)$).
    Im Fall $A \in Mat_n(IR)$ ist hermitesch gleichbedeutend mit symmetrisch, d.h. ${}^tA = A$.
- Wieviele Eigenwerte hat eine quadratische Matrix? (1, 0, 0)
- Wieviele Eigenwerte hat eine Matrix $A \in Mat_n(K)$ höchstens? (2, 0, 0)
  - n
- Warum? (1, 0, 0)
  - Weil die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, welches höchstens n Nullstellen (in IR) hat.
  - Ist K algebraisch abgeschlossen, so hat A <u>genau</u> n Eigenwerte, sofern jeder Eigenwert ggf. mit seiner Vielfachheit gezählt wird. (7.5.10)
- Satz von Hamilton-Cayley (*)
  - Für alle $A \in Mat_n(K)$ gilt $X_A(A) = 0$, d.h. setzt man A in das charakteristische Polynom von A ein, so erhält man die <u>Null-Matrix</u>. (7.5.17)

<u>Normalformen von Matrizen, Diagonalisierung</u>

- Wozu braucht man Diagonalmatrizen? (0, 0, 1)
  - Viele Eigenschaften einer Matrix übertragen sich auch auf ihre Diagonalmatrix, so z. B. die Eigenwerte, die bei einer Diagonalmatrix besonders einfach zu bestimmen bzw. sogar als Werte auf der Hauptdiagonalen abzulesen sind.
- Wann ist eine Matrix A diagonalisierbar? (0, 0, 4)

  - Wenn eine invertierbare Matrix $P \in Mat_n(K)$ existiert, so daß $P^{-1} A P$ eine Diagonalmatrix ist. (7.6.1)
  - $A \in Mat_n(K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine geordnete Basis von K^n existiert, die aus den Eigenvektoren von A besteht. (7.6.5)
- Wie wird die Diagonal-Matrix berechnet? (0, 0, 1)
- Wann heißt eine Matrix A diagonalisierbar und was verbindet die diagonalisierte Matrix mit A? (0, 0, 1)
  - A und $P^{-1} A P$ haben die gleichen Eigenwerte und damit auch das gleiche charakteristische Poynom.
  - Ist $P^{-1} A P$ eine Diagonalmatrix, so sind die Werte auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte von A.
  - 7.6.1 - 7.6.5
- Was ist Diagonalisierung? Wann ist eine Matrix A diagonalisierbar? (0, 0, 3)
- Wie diagonalisiert man eine Matrix? (0, 0, 1)
  - $P^{-1} A P$ mit P invertierbar.
- Wie hilft man sich, wenn eine Matrix nicht diagonalisierbar ist? (0, 0, 1)
  - Jordansche Normalform. Sie existiert für <u>jede</u> Matrix $A \in Mat_n(K)$, sofern K algebraisch abgeschlossen ist.
- Gibt es andere „angenehme" Matrixformen? (0, 0, 1)
  - Jordansche Normalform
  - Nur auf der Haupdiagonalen und der ersten oberen Nebendiagonalen treten von Null verschiedene Werte auf, und zwar die Eigenwerte von A und der Wert 1.
- Wie sieht die Jordansche Normalform aus? (0, 0, 1)
- Bitte erklären Sie die Jordansche Normalform. (0, 0, 1)
- Ist diese Matrix in Jordanscher Normalform? (Beispiel war gegeben) (0, 0, 1)

- Gibt es Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind? Was kann man dann tun? (0, 0, 1)
  - Ja, z. B. obere Dreicksmatrizen ungleich der Null-Matrix, deren Hauptdiagonale nur Nullen enthält. (7.6.7)
  - Übergangsmatrix (?)
  - Transformationsformel (?)