Mathematik II / Mathematik für Informatiker II, SS 2000
Klausur vom 26.08.2000:
Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Aus $0 \leq (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ folgt $2x \leq 1 + x^2$, also nach Division durch $x > 0$

$$2 \leq \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x.$$

Aufgabe 2

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{3n^2 - 6n + 1}{2n^3 - 4} = \dfrac{\frac{3}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{4}{n^3}} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{n} - 6 \cdot (\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^3}{2 - 4 \cdot (\frac{1}{n})^3}$;
da $(\frac{1}{n})$ nach 2.1.9 (ii) eine Nullfolge ist, konvergiert (a_n) nach 2.1.12 gegen den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot \frac{1}{n} - 6 \cdot (\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^3}{2 - 4 \cdot (\frac{1}{n})^3} = \dfrac{3 \cdot 0 - 6 \cdot 0^2 + 0^3}{2 - 4 \cdot 0^3} = 0.$

b) Es gilt $a_1 = \cos \pi = -1$ und $a_2 = \cos 2\pi = 1$. Wegen der Periodizität des Cosinus 5.4.6 (6) haben wir $a_{2k-1} = -1$ und $a_{2k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(Beweis durch vollständige Induktion: $k = 1$: s. o. ,
$k \to k+1$: $a_{2k+1} = \cos(\pi(2k+1)) = \cos(\pi(2k-1) + 2\pi) = \cos(\pi(2k-1)) = a_{2k-1} = -1$ nach Ind. Ann. und $a_{2k+2} = \cos(\pi 2k + 2\pi) = \cos(\pi 2k) = a_{2k} = 1$ nach Ind. Ann.)
Demnach ist die Folge $(\cos(\pi n)) = (-1)((-1)^n)$ divergent, da $((-1)^n)$ nach 2.1.9 (iv) divergent ist und $(-1)((-1)^n)$ nach Satz 2.1.12 (ii) genau dann konvergiert, wenn $((-1)^n)$ konvergiert.

Aufgabe 3

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n^2}{n^3+n} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n},$$

also ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n}$ nach dem Minorantenkriterium 2.4.1 (ii) divergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist (vgl. Beweis von 2.3.5).

b) Nach 5.3.4 (ii) hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ den Konvergenzradius ∞, das heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist damit die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$ konvergent.

©2000 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

Aufgabe 4

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge reeller Zahlen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

a) Nach Definition 3.5.4 heißt f *gleichmäßig stetig (auf D)*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

wenn es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in D$ aus $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

b) Da die Funktion $\sqrt{\ } : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ nach Ü 3.2.3 stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|\sqrt{x}| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$ für alle $x \in [0, \infty[$ mit $|x| < \delta$. Daraus folgt für alle $x, y \in D$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} < \varepsilon, \text{ falls } |x - y| < \delta.$$

f ist also gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5

a) Siehe 4.1.7 (v).

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := e^{-x^2} \cdot \sin\left(\pi(1-2x)^5\right)$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar, mit der Produktregel 4.1.7 (iii) und der Kettenregel 4.1.7 (v) folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{-x^2}\right)' \cdot \sin\left(\pi(1-2x)^5\right) + e^{-x^2} \cdot \left(\sin\left(\pi(1-2x)^5\right)\right)' \\ &= e^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot \sin\left(\pi(1-2x)^5\right) + e^{-x^2} \cdot \cos\left(\pi(1-2x)^5\right) \cdot \left(\pi(1-2x)^5\right)' \\ &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \sin\left(\pi(1-2x)^5\right) + e^{-x^2} \cdot \cos\left(\pi(1-2x)^5\right) \cdot 5\pi(1-2x)^4 \cdot (-2). \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Siehe 4.2.2.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Wir zeigen $(1+x)^a > 1 + ax$ für alle $x > 0$.
Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := (1+x)^a = \exp\left(a \log(1+x)\right)$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ (nach 5.4.5 (1)). Zu $x > 0$ gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in]0, x[$ mit

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = a(1+\xi)^{a-1}.$$

Wegen $a - 1 > 0$ (und dem streng monotonen Wachstum von $\log, \exp$) ist

$$(1+\xi)^{a-1} = \exp\left((a-1)\log(1+\xi)\right) > \exp\left((a-1)\log 1\right) = \exp 0 = 1,$$

also ist $a(1+\xi)^{a-1} > a$ und damit

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} > a.$$

Durch Multiplikation mit $x > 0$ und Addition von 1 folgt $(1+x)^a > 1 + ax$.

Aufgabe 7

a) In $I :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := e^x - e^{-x} \quad \text{und} \quad g(x) := \sin x$$

differenzierbar mit $g'(x) = \cos x \neq 0$ für alle $x \in I$. Wegen der Stetigkeit von f, g in 0 gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 - e^0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \sin 0 = 0.$$

Wegen $f'(x) = e^x - e^{-x} \cdot (-1) = e^x + e^{-x} \to 2$ für $x \to 0$ und $g'(x) = \cos x \to 1$ für $x \to 0$ existiert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Nach der Regel von de l'Hospital existiert auch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

b) Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin(2x)} \qquad \text{[Zähler und Nenner verschwinden in 0]} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4\cos(2x)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Siehe 5.1.3 oder 5.1.6.

b (1) Es seien

$$f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) := f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Wegen $f_n = f$ für alle n konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, da

$$\|f_n - f\| = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(2) (f_n) mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{\sin(n+x)}{n}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\hat{0} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, denn wegen

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin(n+x)|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

ist $0 \leq \|f_n - \hat{0}\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{n}$, also $(\|f_n - \hat{0}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 9

a) Siehe 5.3.2.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n + 2^{-n})x^n$ ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ mit $a = 0$ und $a_n = 2^n + 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}^0$. Es ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$ und

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n + 2^{-n}}{2^{n+1} + 2^{-n-1}} = \frac{2^n(1+2^{-2n})}{2^{n+1}(1+2^{-2n-2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2^{-2n}}{1+2^{-2n-2}} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } n \to \infty,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ (wegen $|\frac{1}{4}| < 1$) und $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-2n-2} = 0$. Nach Ü 5.3.1 hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n + 2^{-n})x^n$ den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$. Die Potenzreihe konvergiert also in $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{2}$, also für $x < -\frac{1}{2}$ oder $x > \frac{1}{2}$. Es sind noch die Punkte $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ zu untersuchen. Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 2^{-n})\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 + 2^{-2n}),$$

die divergiert, da $(1+2^{-2n})$ wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^{-2n}) = 1$ keine Nullfolge ist (s. 2.3.5). Für $x = -\frac{1}{2}$ erhält man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 2^{-n})\frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1 + 2^{-2n}),$$

die ebenfalls divergiert, da $\left((-1)^n(1+2^{-2n})\right)$ wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |(-1)^n(1+2^{-2n})| = 1$ keine Nullfolge ist.

Aufgabe 10

a) Siehe 6.2.9.

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen, dass es für alle $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ und $C \in \mathbb{R}$ genau eine Stammfunktion F von f mit $\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = C$ gibt.

Dazu seien $\alpha, \beta \in [a,b]$ mit $\alpha < \beta$ und $C \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest vorgegeben. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vgl. a)) besitzt f eine Stammfunktion $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, d. h. es ist $F_0' = f$ und jede weitere Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ von f unterscheidet sich von F_0 nur um eine Konstante. Genauer

gilt (vgl. 6.2.8): $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $F = F_0 + K$. Ist $F = F_0 + K$ eine Stammfunktion von f, so ist F differenzierbar (6.2.7), damit (nach 4.1.5) stetig, also (nach 6.2.3) integrierbar und es gilt:

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big(F_0(x) + K\big)\,dx = \int_\alpha^\beta F_0(x)\,dx + (\beta - \alpha)K.$$

Folglich gilt:

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = C \iff K = \frac{1}{\beta - \alpha}\Big(C - \int_\alpha^\beta F_0(x)\,dx\Big)$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 11

a) Das Integral $\int_2^{\sqrt{\pi+4}} x\cos(x^2-4)\,dx$ berechnen wir mit Hilfe der Substitutionsregel (6.2.11), setzen $I := [2, \sqrt{\pi+4}]$, definieren $f : I \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x\cos(x^2-4)$ für alle $x \in I$ und versuchen, uns des Terms $x^2 - 4$ im Argument des Cosinus zu entledigen. Dazu suchen wir ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi(J) \subset I$ und $\varphi(t)^2 - 4 = t$ für alle $t \in J$ und setzen folglich $\varphi(t) = \sqrt{t+4}$ für $t \in [-4, \infty[$. Da $\varphi(0) = 2$ und $\varphi(\pi) = \sqrt{\pi+4}$; wählen wir $J := [0, \pi]$ und erhalten wie gewünscht $\varphi(J) \subset I$. Darüberhinaus ist φ stetig differenzierbar mit $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4}}$ für alle $t \in J$. Folglich gilt mit $\alpha := 0$ und $\beta := \pi$ nach der Substitutionsregel 6.2.11:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\sqrt{\pi+4}} x\cos(x^2-4)\,dx &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{t+4}\cos\big(\sqrt{t+4}^2 - 4\big)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4}}\,dt \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

b) Das Integral $\int_0^1 x^2\cosh(x)\,dx$ berechnen wir mit Hilfe zweifacher partieller Inte-

gration (6.2.10):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \cosh(x)\,dx &= x^2 \sinh(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x \sinh(x)\,dx \\
&= x^2 \sinh(x)\Big|_0^1 - 2x\cosh(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \cosh(x)\,dx \\
&= x^2 \sinh(x)\Big|_0^1 - 2x\cosh(x)\Big|_0^1 + 2\sinh(x)\Big|_0^1 \\
&= \sinh(1) - 2\cosh(1) + 2\sinh(1) - 2\sinh(0) \\
&= 3\sinh(1) - 2\cosh(1) = \frac{3}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \left(e + \frac{1}{e}\right) \\
&= \cancel{\frac{1}{2}e - 2\frac{1}{e} = \frac{e}{2} - \frac{2}{e} = \frac{1}{2e}(e^2 - 4).} \quad = \frac{1}{2}e - \frac{5}{2}\frac{1}{e}
\end{aligned}$$