1182 Mathematik für Informatiker II (Analysis) SS 02

Klausur am 17.8.2002

Lösungsvorschläge zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

i \ k	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	1.1 X	1.2	1.3 X	1.4 X
(2)	2.1 X	2.2 X	2.3 X	2.4 X
(3)	3.1	3.2	3.3 X	3.4 X
(4)	4.1	4.2	4.3	4.4 X

Aufgabe 2

(a) 2.4.1(i) und 2.4.3.

(b)(i) Es ist

$$\frac{2n-1}{3n^3+n^2+1} \leq \frac{2n}{3n^3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+n^2+1}$.

(ii) Für $a_n := \frac{n^\alpha}{2^n}$ gilt (für $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$ ist, konvergiert nach dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 3

(a) Die Funktionen

$$\begin{aligned} &p_1 : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow p_1(x) := 4 - x^2, \\ &p_2 : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow p_2(x) := 4 - x \quad \text{und} \\ &\log :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \log x \end{aligned}$$

©2002 FernUniversität - Gesamthochschule in Hagen

sind differenzierbar (p_1 und p_2 sind Einschränkungen von Polynomen) mit

$$\begin{aligned} p_1'(x) &= -2x, \\ p_2'(x) &= -1, \\ \log' x &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ferner ist $w : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow w(x) := \sqrt{x}$ differenzierbar auf $]0,\infty[$ mit $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$.
Für $x \in]-2,2[$ gilt $4 - x^2 > 0$ und $4 - x > 0$, daher sind nach der Kettenregel auch

$$\begin{aligned} f_1 : [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_1(x) := (w \circ p_1)(x) = \sqrt{4-x^2} \quad \text{und} \\ f_2 : [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_2(x) := (\log \circ p_2)(x) = \log(4-x) \end{aligned}$$

auf $]-2,2[$ differenzierbar, und zwar gilt

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= w'(p_1(x)) \cdot p_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \\ f_2'(x) &= \log'(p_2(x)) \cdot p_2'(x) = \frac{1}{4-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{4-x} \end{aligned}$$

für $x \in]-2,2[$. Als Produkt $f = f_1 f_2$ ist nach der Produktregel auch f auf $]-2,2[$ differenzierbar mit

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) = \frac{-x\log(4-x)}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{-\sqrt{4-x^2}}{4-x}.$$

(b) Es ist $f(-2) = f(2) = 0$. Ferner ist f stetig, da p_1, p_2, w und log stetig sind und nach den Regeln für stetige Funktionen auch f_1, f_2 und f. Da f auf $]-2,2[$ differenzierbar ist, existiert nach dem Mittelwertsatz (bzw. Satz von Rolle) ein $\xi \in]-2,2[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Andere Beweismöglichkeit: Die Ableitung $f' :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, da sie im Sinne der Regeln für stetige Funktionen zusammengesetzt ist, und es gilt

$$f'(-1) = \frac{\log 5}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{5\log 5 - 3}{5\sqrt{3}} > 0$$

(wegen $\log 5 > \log e = 1$) sowie

$$f'(0) = \frac{0}{2} - \frac{2}{4} < 0.$$

Als stetige Funktion auf dem Intervall $]-2,2[$ nimmt f' nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert zwischen $f'(0)$ und $f'(1)$, also auch den Wert 0 an, d. h. es gibt ein $\xi \in]-2,2[$ (sogar $\xi \in]-1,0[$) mit $f'(\xi) = 0$.

Aufgabe 4

(a) Für $x = 0$ haben wir die Folge $(f_n(0))$, also die konstante Folge $\widehat{0} = (0)$. Diese ist konvergent mit Grenzwert 0.

Für $x > 0$ gilt (nach den Regeln für konvergente Folgen)

$$f_n(x) = \frac{x\cos x}{\frac{1}{n} + x} \longrightarrow \frac{x\cos x}{x} = \cos x \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist. Also ist (f_n) punktweise konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \cos x & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(b) Die Folge (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent.

Denn die Folgenglieder f_n sind stetig auf $[0,1]$ (f_n ist Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner für $x \geq 0$ niemals null wird.)

Wäre die Folge (f_n) gleichmäßig konvergent, so wäre die Grenzfunktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \cos x & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

stetig. Aber f ist in 0 nicht stetig, da z. B. für $x_n := \frac{1}{n}$ zwar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0$ (wegen der Stetigkeit von $\cos$), also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(0)$ gilt.

Andere Beweismöglichkeit: Wäre (f_n) gleichmäßig konvergent, so müsste

$$(*) \qquad \|f_n - f\|_{[0,1]} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

gelten. Nun ist nach Definition der Norm

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{[0,1]} \quad \text{für jedes} \quad x \in [0,1],$$

insbesondere also

$$(**) \qquad \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \|f_n - f\|_{[0,1]}.$$

Aus $(*)$ und $(**)$ würde also

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 0$$

folgen. Jedoch gilt

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n}}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n} = -\frac{\cos\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Daher kann $(*)$ nicht gelten.

Aufgabe 5

Wir berechnen $\int\limits_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ für $a > 0$

(i) mithilfe partieller Integration,

(ii) mithilfe der Substitution $x = t^2 - 1$ $(t > 0)$.

(i) Wir integrieren den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, d. h., wir suchen eine (differenzierbare) Funktion $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Eine solche wird z. B. durch $f(x) := 2\sqrt{1+x}$ gegeben. Ferner betrachten wir $g : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Da f und g stetig differenzierbar sind, lässt sich partielle Integration anwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx &= \int\limits_0^a f'(x)g(x)dx \\
&= f(x)g(x)|_0^a - \int\limits_0^a f(x)g'(x)dx \\
&= 2\sqrt{1+x}\cdot x\Big|_0^a - \int\limits_0^a 2\sqrt{1+x}\cdot 1\,dx \\
&= 2a\sqrt{1+a} - 2(1+x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^a \\
&= 2a\sqrt{1+a} - \frac{4}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \varphi(t) := t^2 - 1$. Dann ist φ stetig differenzierbar, und es gilt $\varphi(]0,\infty[) =]-1,\infty[$, sodass wegen der Stetigkeit des Integranden $x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ auf $]-1,\infty[$ die Voraussetzungen für die Anwendung der Substitutionsregel erfüllt sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx &= \int\limits_{\sqrt{1+0}}^{\sqrt{1+a}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+\varphi(t)}}\,\varphi'(t)dt \\
&= \int\limits_1^{\sqrt{1+a}} \frac{t^2-1}{\sqrt{1+t^2-1}}\cdot 2t\,dt = \int\limits_1^{\sqrt{1+a}} 2(t^2-1)dt \\
&= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^{\sqrt{1+a}} \\
&= \frac{2}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+a} - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{2}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+a} + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

[Anmerkung: Die Ergebnisse aus (i) und (ii) müssen natürlich übereinstimmen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} 2a(1+a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}} &= 2(1+a)^{\frac{1}{2}}(a - \frac{2}{3}(1+a)) \\ &= 2(1+a)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{3}(1+a) - 1) \\ &= \frac{2}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}} - 2(1+a)^{\frac{1}{2}}.] \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \sin y}{y}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$

(a) Wir berechnen $D_1 f(x,y)$ und $D_2 f(x,y)$ in den Punkten $\binom{x}{y}$ mit $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{\sin y}{y} \\ D_2 f(x,y) &= \frac{yx \cos y - x \sin y}{y^2} \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen, dass $D_1 f(a,0)$ für alle Punkte $\binom{a}{0}$ existiert. Dazu betrachten wir (bei festem a) die Funktion

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \varphi_1(t) := f(a+t, 0) = 0;$$

es ist also φ_1 die konstante Funktion $\widehat{0}$; diese hat (in 0) die Ableitung 0. Daher existiert $D_1 f(a,0) = \varphi_1'(0) = 0$.

(c) Wir zeigen, dass $D_2 f(a,0)$ für $a = 0$ existiert, für $a \neq 0$ jedoch nicht.
Ist $a = 0$, so haben wir

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow f(0,t) = \begin{cases} \dfrac{0 \sin t}{t}, & \text{falls } t \neq 0, \\ 0, & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

zu betrachten, d. h., $\varphi_2 = \widehat{0}$. Wie in (b) erhalten wir $D_2 f(0,0) = 0$. Ist $a \neq 0$, so haben wir

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow f(a,t) = \begin{cases} \dfrac{a \sin t}{t}, & \text{falls } t \neq 0, \\ 0, & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit in $t = 0$ zu untersuchen, d. h., es ist zu untersuchen, ob

$$\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(0)}{t} \quad \text{für} \quad t \longrightarrow 0 \quad \text{einen Grenzwert hat.}$$

Für $0 < |t| \leq \frac{\pi}{2}$ ist (wegen $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi}|t|$)

$$\left|\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(0)}{t}\right| = \left|\frac{a \sin t}{t^2}\right| \geq \frac{|a|}{|t|} \cdot \frac{2}{\pi},$$

also gilt

$$\left|\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(0)}{t}\right| \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad t \longrightarrow 0$$

und φ_2 ist in 0 nicht differenzierbar, d. h., $D_2 f(a, 0)$ existiert nicht, falls $a \neq 0$ ist.

Andere Beweismöglichkeit: Für $a \neq 0$ ist die Funktion φ_2 in 0 unstetig (und daher nicht differenzierbar); denn wegen $\frac{\sin y}{y} \longrightarrow 1$ für $y \longrightarrow 0$ gilt

$$\varphi_2(t) = \frac{a \sin t}{t} \longrightarrow a \neq 0 = \varphi_2(0) \quad \text{für} \quad t \longrightarrow 0\,.$$

(d) Wäre f in $\binom{0}{0}$ differenzierbar, so wäre die Matrix $(0 \quad 0)$ die Ableitung, und es gälte

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - (0 \quad 0)\binom{x-0}{y-0}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist aber nicht der Fall, wie man z. B. mithilfe der Folge $\binom{x_n}{y_n}$ mit $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ feststellen kann (Folgenkriterium). Es gilt zwar $\binom{x_n}{y_n} \longrightarrow \binom{0}{0}$, aber

$$\frac{f(x_n, y_n)}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\,\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

(wegen $\frac{\sin y}{y} \longrightarrow 1$ für $y \longrightarrow 1$). Daher ist f in $\binom{0}{0}$ nicht differenzierbar.

Ergebnistabelle zu Aufgabe 1

i \ k	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	1.1 X	1.2 ✓	1.3 ✗ ✓	1.4 f. x
(2)	2.1 ✗ ✓	2.2 X	2.3 ✗ ✓	2.4 f. x
(3)	3.1 ✗ f.	3.2 ✗ ✓	3.3 X	3.4 ✗ f.
(4)	4.1 ✓	4.2 ✓	4.3 ✓	4.4 X

3.2 ist nicht angekreuzt
3.4 "

4/6