Lösungshinweise zur Klausur Mathematik für Informatiker II
Sommersemester 2003

Aufgabe 1

(a) (i) Die **Vollständigkeitseigenschaft** von $\mathbb{R}$ (vgl. 1.2.2) besagt, dass zu je zwei nichtleeren Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ mit $A \leq B$ ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $A \leq c \leq B$.

(ii) Der **Satz von Archimedes** 1.2.7 macht die Aussage, dass es zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a < n$.

(b) (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir wegen $1 + (x+1)^2 > 0$

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - 1 > \frac{15}{1+(x+1)^2} &\iff ((x+1)^2 - 1)(1 + (x+1)^2) > 15 \\
&\iff (x+1)^4 - 1 > 15 \\
&\iff (x+1)^4 > 16 \\
&\iff (x+1)^2 > 4 \\
&\iff x+1 < -2 \quad \text{oder} \quad x+1 > 2 \\
&\iff x < -3 \quad \text{oder} \quad x > 1 \\
&\iff x \in]-\infty, -3[\cup]1, \infty[,
\end{aligned}$$

also gilt $\{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 - 1 > \frac{15}{1+(x+1)^2}\} =]-\infty, -3[\cup]1, \infty[$.

(ii) Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\{|2x-1| < |4x-6|\}$.
Nach 1.3.1 (ii) gilt

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{falls } x \geq \frac{1}{2}, \\ -(2x-1), & \text{falls } x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

und

$$|4x-6| = \begin{cases} 4x-6, & \text{falls } x \geq \frac{3}{2}, \\ -(4x-6), & \text{falls } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. Fall: $x < \frac{1}{2}$

Dann ist auch $x < \frac{3}{2}$, also

$$\begin{aligned}
|2x-1| < |4x-6| &\iff -2x+1 < -4x+6 \\
&\iff 2x < 5 \\
&\iff x < \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist für jedes $x < \frac{1}{2}$ wahr, daher erfüllt *jedes* $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung $|2x-1| < |4x-6|$.

2. Fall: $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$

Hier zeigt sich

$$\begin{aligned} |2x-1| < |4x-6| &\iff 2x-1 < -4x+6 \\ &\iff 6x < 7 \\ &\iff x < \tfrac{7}{6}. \end{aligned}$$

Daher gilt für $\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{6}$ die Ungleichung $|2x-1| < |4x-6|$, für $\frac{7}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ist diese Ungleichung nicht erfüllt.

3. Fall: $x \geq \frac{3}{2}$

In diesem Fall haben wir auch $x \geq \frac{1}{2}$, also

$$\begin{aligned} |2x-1| < |4x-6| &\iff 2x-1 < 4x-6 \\ &\iff 5 < 2x \\ &\iff x > \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Daher gilt für $x > \frac{5}{2}$ die Ungleichung $|2x-1| < |4x-6|$, für $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ ist diese Ungleichung nicht erfüllt.

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| < |4x-6|\} &= \left]-\infty, \tfrac{1}{2}\right[\cup \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{6}\right[\cup \left]\tfrac{5}{2}, \infty\right[\\ &= \left]-\infty, \tfrac{7}{6}\right[\cup \left]\tfrac{5}{2}, \infty\right[. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) **ε-n_0-Kriterium** (vgl. 2.2.4):

$f = (a_n) \in c$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

(b) **(i)** Es gilt

$$a_n = \frac{10n^2 - 1}{(n+1)(2+5n)} = \frac{10 + \frac{1}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})(\frac{2}{n}+5)} = \frac{c_n}{d_n},$$

wobei

$$c_n = 10 + \frac{1}{n^2}, \;\; d_n = (1+\frac{1}{n})(\frac{2}{n}+5)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $d_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n^2})$ Nullfolgen sind, konvergieren nach den Rechenregeln 2.1.12 (c_n) gegen 10 und (d_n) gegen $1 \cdot 5 = 5 \neq 0$, also

$$(a_n) = (\frac{c_n}{d_n}) \quad \text{gegen} \quad \frac{10}{5} = 2.$$

(ii) Die Folge (b_n) hat die Teilfolgen $(c_n), (d_n)$ mit

$$\begin{aligned} c_n &= b_{4n} = \cos^{4n}(\tfrac{4n\pi}{2}) = (\cos(2n\pi))^{4n} = 1^{4n} = 1, \\ d_n &= b_{2n+1} = \cos^{2n+1}(\tfrac{(2n-1)\pi}{2}) = (\cos(n\pi + \tfrac{\pi}{2}))^{2n+1} = 0^{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Diese Teilfolgen konvergieren. Da aber $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, ist die Folge (b_n) divergent nach dem Divergenzkriterium 2.2.3.

(c) **(i)** Die Logarithmusfunktion $\log :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und monoton wachsend (vgl. 5.4.2). Daher ist $(\log(\frac{n+1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \log(\tfrac{n+1}{n}) &= \log(\lim_{n\to\infty}(1 + \tfrac{1}{n})) = \log 1 = 0, \quad \text{vgl. 3.2.5, und} \\ \log \tfrac{(n+1)+1}{n+1} &= \log(1 + \tfrac{1}{n+1}) \leq \log(1 + \tfrac{1}{n}) = \log \tfrac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \log(\frac{n-1}{n})$.

(ii) Die gegebene Reihe hat die Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| &= \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)! \cdot (n!)^2} \\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Aufgabe 3

(a) Seien $a \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 3.2.1 (i) heißt f **stetig in** a, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt mit $f(U \cap D) \subset V$.

(b) (i) Es ist $f = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ mit $f_1 : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) := \sqrt{x},\ f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_2(x) := |x|$ und $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_3(x) := x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Ü 3.2.2 und Ü 3.2.3 sind f_1 und f_2 stetig, und f_3 ist als Polynomfunktion stetig nach 3.2.7. Gemäß der Kettenregel für stetige Funktionen 3.2.6 (v) erweist sich zunächst $f_1 \circ f_2$ und damit dann auch $f = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ als stetig.
Somit ist f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

(ii) Wir zeigen, dass g auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, im Punkt $a = 0$ aber unstetig. Auf $]-\infty, 0[$ stimmt g mit der Funktion $g_1 :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R},\ g_1(x) := 1 - |x|$ überein, und auf $]0, \infty[$ stimmt g mit der Funktion $g_2(x) := -1 + |x|$ überein. Die konstante Funktion $\hat{1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ ist nach Beispiel 3.2.2 (i) stetig, die Funktion $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist nach Ü 3.2.2 stetig, also sind $\hat{1} - |\ |$ und $-\hat{1} + |\ |$ und damit auch g_1 und g_2 stetig (vgl. Satz 3.2.6). Da g auf $]-\infty, 0[$ und auf $]0, \infty[$ mit einer stetigen Funktion übereinstimmt, ist g stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.
Im Punkt $a = 0$ ist g unstetig nach dem Folgenkriterium 3.2.5, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g(-\tfrac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty} (1 - \tfrac{1}{n}) = 1, \\ \lim_{n\to\infty} g(\tfrac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty} (-1 + \tfrac{1}{n}) = -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) **1. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung** (vgl. 4.2.2):
Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf $\mathring{I} :=]a, b[$. Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in \mathring{I}$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

(b) (i) Es gilt $f = f_1 f_2$ mit

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) := x^3,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_2(x) := \sin x.$$

f_1 und f_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$f_1' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_1'(x) = 3x^2 \quad \text{(vgl. 4.1.8)},$$

$$f_2' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_2'(x) = \cos x \quad \text{(vgl. 5.4.6)}.$$

Nach der Produktregel 4.1.7 (iii) ist dann auch $f = f_1 f_2$ differenzierbar in jedem $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 f_2)'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $g = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ mit

$$g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g_1(x) := \cos x,$$

$$g_2 :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ g_2(x) := \log x,$$

$$g_3 :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[,\ g_3(x) := x^2.$$

g_1, g_2 und g_3 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$g_1' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g_1'(x) = -\sin x \quad \text{(vgl. 5.4.6)},$$

$$g_2' :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ g_2'(x) = \tfrac{1}{x} \quad \text{(vgl. 5.4.2)},$$

$$g_3' :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[,\ g_3'(x) = 2x \quad \text{(vgl. 4.1.8)}.$$

Nach der Kettenregel 4.1.7 (v) ist dann zunächst $g_2 \circ g_3$ differenzierbar in jedem $x \in]0, \infty[$ mit

$$(g_2 \circ g_3)'(x) = g_2'(g_3(x))g_3'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

und dann $g = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ differenzierbar in jedem $x \in]0, \infty[$ mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= g_1'(g_2 \circ g_3(x))(g_2 \circ g_3)'(x) = -(\sin(\log x^2)) \cdot \tfrac{2}{x} \\ &= -\frac{2\sin(\log x^2)}{x}. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $h = \dfrac{h_1}{h_2}$ mit

$$h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h_1(x) := (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

$$h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h_2(x) := e^x \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(vgl. 5.4.1)}.$$

h_1 und h_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$h_1' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h_1'(x) = 2 + 2x,$$

$$h_2' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h_2'(x) = e^x \quad \text{(vgl. 5.4.1)}.$$

Nach der Quotientenregel 4.1.7 (iv) ist dann $h = \frac{h_1}{h_2}$ differenzierbar in jedem $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{h_1}{h_2}\right)'(x) = \frac{h_1'(x)h_2(x) - h_1(x)h_2'(x)}{(h_2(x))^2} \\ &= \frac{(2+2x)e^x - (1+x)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x^2}{e^x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Nach 5.3.2 ist der Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ das eindeutig bestimmte $r \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $0 \le r \le \infty$ und folgenden Eigenschaften:

- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < r$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$,
- für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > r$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{2n+3}{n+1})^n x^n$ hat den Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$, denn es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\frac{2n+3}{n+1}\right) = 2,$$

da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, vgl. 5.3.4 (i), und $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$. Nach dem Satz von Hadamard 5.3.3 ist daher $r = \frac{1}{2}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{2n+3}{n+1})^n x^n$.

(c) Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich $]0,\infty[$, einer offenen Menge, differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2} \quad \text{für alle } x \in]0,\infty[.$$

Hat f in $a \in]0,\infty[$ ein lokales Extremum, so muss nach 4.3.13 gelten $0 = f'(a) = 3a^2 - \frac{48}{a^2}$, also $3a^4 = 48$, das heißt $a = 2$.
Mit der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 6x + \frac{96}{x^3} \quad \text{für alle } x \in]0,\infty[$$

gilt $f''(2) = 12 + \frac{96}{8} = 24 > 0$. Gemäß 4.3.14 besitzt f ein einziges lokales Minimum an der Stelle $a = 2$, aber f besitzt kein lokales Maximum.
Weil das Intervall $I := [3,4]$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß 3.5.3 Stellen $b, c \in I$ mit $f(b) = \min f(I)$ und $f(c) = \max f(I)$. Weder b noch c liegen in $]3,4[$, dem Inneren von I, da f nur ein einziges lokales Extremum bei $a = 2 \notin I$ hat. Wir erhalten $b, c \in \{3,4\}$ und berechnen

$$f(3) = 27 + \frac{48}{3} = 43, \quad f(4) = 64 + \frac{48}{4} = 76.$$

Somit gilt $b = 3$, $c = 4$ und

$$\min f(I) = f(3) = 43,$$
$$\max f(I) = f(4) = 76.$$

Aufgabe 6

(a) **Riemann-integrierbare Funktion** (vgl. 6.1.9):
Eine Funktion $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ heißt **Riemann-integrierbar** über I, wenn gilt:
Es gibt zwei Folgen $(\underline{f_n})$ und $(\overline{f_n})$ in $\mathcal{T}(I)$ (= Menge aller Treppenfunktionen auf I) mit

$$\underline{f_n} \leq f \leq \overline{f_n} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Int}_I(\overline{f_n} - \underline{f_n}) = 0.$$

(b) (i) Wir wollen die Methode der partiellen Integration verwenden und setzen

$$f, g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \sin x,\ g(x) := x^2.$$

f und g sind stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = \cos x,\ g'(x) = 2x.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\ dx &= \int_0^{2\pi} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)g'(x)dx \\
&= x^2 \sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin x\ dx \\
&= -\int_0^{2\pi} 2x \sin x\ dx,
\end{aligned}$$

da $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$. Erneute partielle Integration liefert nun

$$\begin{aligned}
-\int_0^{2\pi} 2x \sin x\ dx &= -(2x(-\cos x))\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\cos x\ dx \\
&= 2x\cos x\Big|_0^{2\pi} - 2\sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi,
\end{aligned}$$

da $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$, $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$. Damit folgt

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\ dx = 4\pi.$$

(ii) Dieses Integral ist ein Kandidat für die Substitutionsregel 6.2.11, denn im Integranden finden wir den Logarithmus

$$\varphi : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(t) := \log t$$

und seine Ableitung $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$, so dass mit

$$f : [\varphi(1), \varphi(2)] = [0, \log 2] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \cos x$$

der Integrand die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ hat. Die Voraussetzungen der Substitutionsregel sind erfüllt, da f stetig, φ stetig differenzierbar und $\varphi([1,2]) = [0, \log 2]$ gilt (φ ist monoton wachsend). Es folgt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x} dx &= \int_1^2 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x)dx = \int_0^{\log 2} \cos x \; dx \\ &= \sin x \Big|_0^{\log 2} = \sin(\log 2) - \sin 0 = \sin(\log 2).\end{aligned}$$