01182 Sommersemester 2004

Aufgabe 1

1 Punkt (a) (i) Formulieren Sie die Bernoullische Ungleichung.

1 Punkt (ii) Wie ist das Supremum $\sup M$ einer nichtleeren Menge M von reellen Zahlen definiert?

4 Punkte (b) (i) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n+1}(2k+1) = n(n+4).$$

4 Punkte (ii) Zeigen Sie, dass die Ungleichung $\frac{x}{3+x} \leq \frac{y}{3+y}$ für alle $x, y \in \,]-3, \infty[$ mit $x \leq y$ gilt.

Aufgabe 2

1 Punkt (a) Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?

(b) Untersuchen Sie, ob die Folge

2 Punkte (i) (a_n) mit $a_n := \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^2+1}}$

2 Punkte (ii) (b_n) mit $b_n := \frac{1}{3^n - 2^n}$

konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

3 Punkte (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos(\frac{n-1}{2n}\cdot\pi)$

2 Punkte (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n.$

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 3

2 Punkte (a) Formulieren Sie das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit einer reellen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D \subset \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie (mit Begründung), in welchen Punkten die folgenden Abbildungen stetig sind:

4 Punkte (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x^4 - \sqrt{|x|}$,

4 Punkte (ii) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{, falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 4

2 Punkte (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine in $a \in D$ n-mal differenzierbare Funktion.
Wie lautet das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a?

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

2 Punkte (i) $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x^3 \log x$,

3 Punkte (ii) $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \cos\sqrt{1 - x^2}$,

3 Punkte (iii) $h :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) := \dfrac{x^2}{1 + 2\log x}$.

Aufgabe 5

2 Punkte (a) Stellen Sie die Ableitung der durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$ definierten Funktion als Potenzreihe dar.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^n + e^{-n}) x^n.$$

4 Punkte (c) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := x^2 \exp(x) - 4,$$

alle lokalen Extrema, sowie Minimum und Maximum von f auf $[0, 1]$.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 6

(a) Sei I ein nichtleeres, beschränktes Intervall.

1 Punkt (i) Was ist eine Treppenfunktion auf I?

1 Punkt (ii) Wie ist das Integral einer Treppenfunktion über I definiert?

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

4 Punkte (i) $\int_1^e (\log x)^2 dx$,

4 Punkte ✓ (ii) $\int_0^1 x \sin(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}) dx$.