Lösungshinweise zur Klausur Mathematik II

Sommersemester 2004

Aufgabe 1

(a) **(i)** Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}^0$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$, die **Bernoullische Ungleichung** (1.1.5).

(ii) Das **Supremum** $\sup M$ einer nichtleeren Menge M reeller Zahlen ist die keinste obere Schranke von M, also diejenige reelle Zahl S, für die $M \leq S$ gilt und $S \leq s$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $M \leq s$ (1.2.4 (i)).

(b) **(i)** Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass $\sum_{k=2}^{n+1}(2k+1) = n(n+4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=2}^{1+1}(2k+1) = 4+1 = 5 = 1(1+4)$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, und die Induktionsannahme $\sum_{k=2}^{n+1}(2k+1) = n(n+4)$ sei erfüllt.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{(n+1)+1}(2k+1) &= \sum_{k=2}^{n+2}(2k+1) = \sum_{k=2}^{n+1}(2k+1) + 2(n+2) + 1 \\
&= n(n+4) + 2n + 5 \quad \text{[nach Induktionsannahme]} \\
&= n^2 + 6n + 5 \\
&= (n+1)(n+5) = (n+1)((n+1)+4).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

(ii) Wir zeigen, dass für alle $x, y \in \,]-3, \infty[$ mit $x \leq y$ gilt

$$\frac{x}{3+x} \leq \frac{y}{3+y}.$$

Aus $x \leq y$ folgt $3x \leq 3y$ mit 1.1.2 (ii), und daraus $3x + xy \leq 3y + xy$ mit 1.1.2 (i), also

$$(*) \qquad x(3+y) \leq y(3+x).$$

Wegen $-3 < x$ und $-3 < y$ haben wir $0 < 3+x$ und $0 < 3+y$ nach 1.1.3 (i), also $0 < \frac{1}{3+x}$ und $0 < \frac{1}{3+y}$ nach 1.1.3 (vi). Aus $(*)$ folgt nun mit 1.1.2 (ii) zunächst

$$\frac{x}{3+x}(3+y) \leq y$$

und daraus die Behauptung $\frac{x}{3+x} \leq \frac{y}{3+y}$.

Aufgabe 2

(a) **Satz von Bolzano-Weierstraß** (vgl. 2.2.7):
Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

(b) (i)
$$a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{c_n}{d_n},$$

wobei
$$c_n = \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n},\ d_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$
für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $d_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bekanntlich ist $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge (vgl. 2.1.9 (ii)). Daraus folgt mit 2.1.12 und Ü 2.1.2 bzw. dem Folgenkriterium 3.2.5 für die stetige Wurzelfunktion, dass (c_n) konvergent ist mit Grenzwert 0 und (d_n) konvergent ist mit Grenzwert 1, also (a_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{0}{1} = 0$.

(ii)
$$b_n = \frac{1}{3^n - 2^n} = \frac{(\frac{1}{3})^n}{1-(\frac{2}{3})^n} = \frac{c_n}{d_n},$$

wobei
$$c_n = (\frac{1}{3})^n,\ d_n = 1-(\frac{2}{3})^n$$
für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $d_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bekanntlich ist (q^n) eine Nullfolge für $0 \leq q < 1$ (vgl. 2.1.9 (iii)). Daraus folgt, dass (c_n) konvergent ist mit Grenzwert 0 und mit 2.1.12 (d_n) konvergent ist mit Grenzwert 1, also (a_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{0}{1} = 0$.

(c) (i) Die Folge $(\frac{n-1}{2n}\pi)$ ist wegen
$$\frac{n-1}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{n})$$
eine monoton wachsende Folge mit Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ (vgl. 2.1.12). Die Cosinusfunktion cos ist im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig, monoton fallend und es gilt $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (vgl. 5.4.6). Daher ist $(\cos(\frac{n-1}{2n}\pi))$ eine monoton fallende Nullfolge (vgl. 3.2.5). Nach dem Leibnizkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos(\frac{n-1}{2n}\cdot\pi)$.

(ii) Die gegebene Reihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit
$$a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^n.$$
Es gilt
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\frac{n+1}{2n-1})^n} = \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}},$$

also nach 2.1.12:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$.

Aufgabe 3

(a) Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **stetig** in einem Punkt $a \in D \subset \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für jedes $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ (Satz 3.2.4).

(b) (i) Wir haben $f = f_1 - f_2 \circ f_3$ mit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) := x^4$, $f_2 := \sqrt{\ }$ und $f_3 = |\cdot|$. Als Polynomfunktion ist f_1 nach 3.2.7 stetig auf $\mathbb{R}$, gemäß Ü 3.2.2 bzw. Ü 3.2.3 sind Betrags- und Wurzelfunktion stetig auf $\mathbb{R}$. Die Kettenregel für stetige Funktionen 3.2.6 (v) liefert nun die Stetigkeit von $f_2 \circ f_3$, woraus mit 3.2.6 (i), (ii) folgt, dass auch $f = f_1 + (-1)f_2 \circ f_3$ *in jedem Punkt stetig* ist.

(ii) Die reelle Funktion g stimmt auf der Menge $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der rationalen Funktion $g_0 := g|_D$ überein, die nach 3.2.8 stetig ist. Weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist (vgl. Satz 3.2.3) ist auch g auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Im Punkt $a = 0$ ist g nach dem Folgenkriterium 3.2.5 unstetig, denn für die Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(h(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $h(\frac{1}{n}) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht konvergent.

Aufgabe 4

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine in $a \in D$ n-mal differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nach Definition 4.3.7 das **n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a.**

(b) (i) Es gilt $f = f_1 f_2$ mit

$$f_1 :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f_1(x) := x^3,$$
$$f_2 :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f_2(x) := \log x.$$

f_1, f_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} f_1' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f_1'(x) = 3x^2 \quad \text{(vgl. 4.1.8)}, \\ f_2' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f_2'(x) = \tfrac{1}{x} \quad \text{(vgl. 5.4.2)}. \end{aligned}$$

Nach der Produktregel 4.1.7 (iii) ist dann auch $f = f_1 f_2$ differenzierbar in jedem $x \in]0,\infty[$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 f_2)'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) \\ &= 3x^2 \log x + x^3 \cdot \tfrac{1}{x} = x^2(1 + 3\log x). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $g = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ mit

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & g_1(x) &:= \cos x, \\ g_2 &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, & g_2(x) &:= \sqrt{x}, \\ g_3 &:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, & g_3(x) &:= 1 - x^2. \end{aligned}$$

g_1, g_2 und g_3 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} g_1' &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & g_1'(x) &:= -\sin x \quad \text{(vgl. 5.4.6)}, \\ g_2' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, & g_2'(x) &:= \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(vgl. 4.1.11)}, \\ g_3' &:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, & g_3'(x) &:= -2x \quad \text{(vgl. 4.1.8)}. \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel 4.1.7 (v) ist dann zunächst $g_1 \circ g_2$ differenzierbar in jedem $x \in]0,\infty[$ mit

$$(g_1 \circ g_2)'(x) = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

und dann $g = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ differenzierbar in jedem $x \in]-1,1[$ mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= (g_1 \circ g_2)'(g_3(x)) \cdot g_3'(x) = -\sin\sqrt{1-x^2} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{x \sin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $h = \dfrac{h_1}{h_2}$ mit

$$\begin{aligned} h_1 &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ h_1(x) := x^2, \\ h_2 &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ h_2(x) := 1 + 2\log x. \end{aligned}$$

h_1, h_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} h_1' &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ h_1'(x) = 2x \quad \text{(vgl. 4.1.8)}, \\ h_2' &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ h_2'(x) = \tfrac{2}{x} \quad \text{(vgl. 4.1.7, 5.4.2)}. \end{aligned}$$

Nach der Quotientenregel 4.1.7 (iv) ist dann auch $h = \frac{h_1}{h_2}$ differenzierbar in jedem $x \in]1,\infty[$ mit

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{h_1}{h_2}\right)'(x) = \frac{h_1'(x) h_2(x) - h_1(x) h_2'(x)}{(h_2(x))^2} \\ &= \frac{2x(1 + 2\log x) - x^2 \cdot \frac{2}{x}}{(1 + 2\log x)^2} = \frac{4x \log x}{(1 + 2\log x)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ mit $a, a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^0)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch $f : U_r(a) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ definierte Funktion differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}$ für alle $x \in U_r(a)$ (siehe Satz 5.3.7).

(b) Wir bestimmen den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := e^n + e^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch Berechnung des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (vgl. Ü 5.3.1). Es gilt $a_n = e^n + e^{-n} > e^n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}} = \frac{e^n(1+e^{-2n})}{e^{n+1}(1+e^{-2n-2})} \\ &= \frac{1}{e}\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-2n-2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, vgl. 5.4.1 (5), haben wir

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2n-2} = 0.$$

Daher gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-2n-2}} = \frac{1}{e}$, somit hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(e^n + e^{-n})x^n$ den Konvergenzradius $r = \frac{1}{e}$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2\exp(x) - 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen die lokalen Extrema von f mit Hilfe der notwendigen Bedingung 4.3.13, gemäß der bei lokalen Extremstellen die Ableitung eine Nullstelle besitzt.
Wir haben nach der Produktregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\exp(x) + x^2\exp(x) \\ &= (x^2+2x)\exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

also $f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x = 0 \iff x = 0$ oder $x = -2$. Als Extremstellen von f kommen daher nur die beiden Stellen $x = 0$ und $x = -2$ in Frage.
Die hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen 4.3.14 erlaubt es zu entscheiden, welche Art von Extremstelle vorliegt: Wir erhalten wiederum mit der Produktregel

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+2)\exp(x) + (x^2+2x)\exp(x) \\ &= (x^2+4x+2)\exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

also $f''(0) = 2e^0 = 2 > 0$ und $f''(-2) = (-2)e^{-2} = \frac{-2}{e^2} < 0$. Nach 4.3.14 liegt somit bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = -2$ ein lokales Maximum vor, weitere lokale Extremstellen besitzt f nicht.
Weil das Intervall $[0,1]$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß 3.5.3 Stellen $b, c \in [0,1]$ mit $f(b) = \min f([0,1])$ und $f(c) = \max f([0,1])$. Da f auf $]0,1[$ kein lokales Extremum hat, wird das Minimum bzw. das Maximum von f auf $[0,1]$ in einem der Randpunkte $0, 1$ angenommen. Wegen $f(0) = -4$ und $f(1) = e - 4 > -4$ finden wir $b = 0,\ c = 1$ und

$$\begin{aligned} \min f([0,1]) &= f(0) = -4, \\ \max f([0,1]) &= f(1) = e - 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

(a) **(i)** Eine Funktion $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ heißt **Treppenfunktion auf** I, wenn es eine Zerlegung

$$I = \bigcup_{\rho=1}^{r} I_\rho$$

in endlich viele disjunkte, nichtleere Teilintervalle I_ρ gibt mit der Eigenschaft:

$$f|_{I_\rho} \quad \text{ist konstant (für } \rho = 1, \ldots, r).$$

(vgl. 6.1.1).

(ii) Sei $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ eine Treppenfunktion und sei $I = \bigcup_{\rho=1}^{r} I_\rho$ eine zu f passende Zerlegung von I (also wie in (i)). Dann heißt

$$\mathrm{Int}_I(f) := \sum_{\rho=1}^{r} f(I_\rho)\lambda(I_\rho)$$

das **Integral von f über I** (vgl. 6.1.6).
Dabei ist $f(I_\rho)$ der konstante Wert, den f auf I_ρ annimmt, und $\lambda(I_\rho)$ die Länge des Intervalls I_ρ (vgl. 6.1.4).

(b) **(i)** Wir wollen die Methode der partiellen Integration verwenden und setzen

$$f, g : [1, e] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x,\ g(x) := (\log x)^2.$$

f und g sind stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = 1,\ g'(x) = \frac{2\log x}{x}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_1^e f'(x)g(x)d(x) = f(x)g(x)\Big|_1^e - \int_1^e f(x)g'(x)dx \\ &= x(\log x)^2\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2\log x}{x} dx \\ &= e - 2\int_1^e \log x dx,\end{aligned}$$

da $\log e = 1$, $\log 1 = 0$. Erneute partielle Integration liefert nun

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x dx &= x\log x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 0 - \int_1^e 1\, dx \\ &= e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2\int_1^e \log x\, dx = e - 2.$$

(ii) Dieses Integral ist ein Kandidat für die Substitutionsregel 6.2.11, denn im Integranden finden wir die Funktion

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(t) := \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

und deren Ableitung $\varphi'(t) = t$, so dass mit

$$f : [\varphi(0), \varphi(1)] = [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) := \sin(\pi x)$$

der Integrand die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ hat. Die Voraussetzungen der Substitutionsregel sind erfüllt, da f stetig, φ stetig differenzierbar und $\varphi([0,1]) = [\frac{1}{2}, 1]$ gilt (φ ist monoton wachsend). Es folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{2})dx &= \int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\frac{1}{\pi}\cos\pi - (-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

da $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.