Lösungshinweise zur Klausur Mathematik II
Sommersemester 2005

Aufgabe 1

(a) **(i)** Arithmetisches Mittel: $\frac{1}{2}(a+b)$;
geometrisches Mittel: $\sqrt{ab}$
(vgl. 1.1.6).

(ii) $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ (vgl. 1.1.6)

(b) Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \qquad |x+3| < |x-2|.$$

Es gilt

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & , \text{ falls } x \geq -3 \\ -(x+3) & , \text{ falls } x < -3 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & , \text{ falls } x > 2 \\ -(x-2) & , \text{ falls } x \leq 2. \end{cases}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $x < -3$
Dann ist auch $x \leq 2$, also

$$\begin{aligned} |x+3| < |x-2| &\Leftrightarrow -x-3 < -x+2 \\ &\Leftrightarrow -3 < 2. \end{aligned}$$

Da dies eine richtige Aussage ist, ist $(*)$ für alle $x < -3$ richtig.

Fall 2: $-3 \leq x \leq 2$
Hier gilt

$$\begin{aligned} |x+3| < |x-2| &\Leftrightarrow x+3 < -x+2 \\ &\Leftrightarrow 2x < -1 \\ &\Leftrightarrow x < -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daher gilt $(*)$ für $-3 \leq x < -\frac{1}{2}$, für $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ hingegen nicht.

Fall 3: $x > 2$
Dann ist auch $x \geq -3$,
also

$$\begin{aligned} |x+3| < |x-2| &\Leftrightarrow x+3 < x-2 \\ &\Leftrightarrow 3 < -2. \end{aligned}$$

Da dies eine falsche Aussage ist, ist $(*)$ für $x > 2$ nicht erfüllt.
Zusammenfassend ergibt sich

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| < |x-2|\} =]-\infty - \frac{1}{2}[\,.$$

(c) Für die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-5)^2 \leq 4\}$ gilt $M = [3,7]$, denn

$$\begin{aligned} (x-5)^2 \leq 4 &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-7) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3 \leq 0 \text{ und } x-7 \geq 0) \\ &\quad\ \text{oder} \\ &\quad\ (x-3 \geq 0 \text{ und } x-7 \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (x \leq 3 \text{ und } x \geq 7) \\ &\quad\ \text{oder} \\ &\quad\ (x \geq 3 \text{ und } x \leq 7) \\ &\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7. \end{aligned}$$

Also ist M beschränkt nach 1.2.11 (i).
Alternative:

$$\begin{aligned} (x-5)^2 \leq 4 &\Leftrightarrow |x-5|^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow |x-5| \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 5-2 \leq x \leq 5+2 \quad (1.3.3 \text{ (ii), (iii)}) \\ &\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Quotientenkriterium (vgl. 2.4.3):
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \text{für fast alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist, dann ist die Reihe absolut konvergent (und daher auch konvergent).
Die Bedingung ist z.B. dann erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

ist.

(b) **(i)** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^3-(n+1)^3}{n(n+1)} = \frac{-3n^2-3n-1}{n^2+n} \\ &= \frac{-3-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{c_n}{d_n}, \end{aligned}$$

wobei

$$c_n = -3 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}, \; d_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Es gilt $d_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bekanntlich ist $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge (vgl. 2.1.9 (ii)). Daraus folgt mit 2.1.12, dass (c_n) konvergent ist mit Grenzwert -3 und (d_n) konvergent ist mit Grenzwert 1, also (a_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{-3}{1} = -3$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1 + (-\frac{1}{2})^n}{2 - (-\frac{1}{2})^n} = \frac{c_n}{d_n},$$

wobei

$$c_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n, \; d_n = 2 - (-\frac{1}{2})^n.$$

Es gilt $d_n = 2 - (-\frac{1}{2})^n \geq 2 - 1 = 1 > 0$, also $d_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bekanntlich ist (q^n) eine Nullfolge für $-1 < q < 1$ (vgl. 2.1.9 (iii)). Daraus folgt mit 2.1.12, dass (c_n) konvergent ist mit Grenzwert 1 und (d_n) konvergent ist mit Grenzwert 2, also (a_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.

(c) **(i)** Nach 5.4.2 (5) ist log streng monoton wachsend. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

$$\log \frac{1}{n} \leq \log \frac{1}{2} < \log 1 = 0,$$

d.h. $(\log \frac{1}{n})$ ist keine Nullfolge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{n}$ erfüllt somit die notwendige Konvergenzbedingung 2.3.5 nicht. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{n}$ ist also divergent.

(ii) Nach 5.4.6 (4) (v) gilt $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(2\pi n^2)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(2\pi n^2)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Nach 2.2.6 (i)/2.3.3 (i) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, so dass nach dem Majorantenkriterium 2.4.1 (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^2)}{n^2}$ absolut konvergent und daher konvergent ist.

Aufgabe 3

(a) Nach Definition 3.5.4 heißt f gleichmäßig stetig auf D, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in D : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(b) Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist (Satz 3.2.3), ist f für jedes $c \in \mathbb{R}$ auf den offenen Intervallen $]-\infty, 2[$ und $]2, \infty[$ stetig, da f dort jeweils Einschränkung eines Polynoms ist.
Zu untersuchen bleibt die Stetigkeit im Punkt $a = 2$. Es gilt

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist stetig in} \quad a \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ besitzt in } a \text{ den Grenzwert } f(a), \text{ d.h. } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Also gilt
f ist stetig in $a = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4 + 2c - 1 = 3 + 2c$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lim_{x \to 2}(5x + 1) = 3 + 2c \\
&\Leftrightarrow 11 = 3 + 2c \\
&\Leftrightarrow 8 = 2c \\
&\Leftrightarrow c = 4.
\end{aligned}$$

Für $c = 4$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(c) Für $x \neq 1$ gilt

$$f(x) = g(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+7)(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+7)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2+7}.$$

Für $x = 1$ gilt

$$\frac{x+1}{x^2+7} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Also kann g generell durch die Formel

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+7}$$

beschrieben werden.
Als rationale Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist g nach 3.2.8 stetig, also auch stetig in $a = 1$.
Die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion $g|_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ in $a = 1$.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Fortsetzung der Funktion

$$f|_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} = g|_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}.$$

Da $f(1) \neq g(1)$, kann f wegen der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung 3.3.2 in $a = 1$ nicht stetig sein.

Alternative:
Für die Folge $(1 + \frac{1}{n})$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$, aber

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(1+\tfrac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})+1}{(1+\frac{1}{n})^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{8+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq f(1).
\end{aligned}$$

Also ist f nach dem Folgenkriterium 3.2.5 nicht stetig in $a = 1$.

Aufgabe 4

(a) Kettenregel (vgl. 4.1.7 (v)):
Seien $a \in D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a und $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$ differenzierbar in $f(a)$. Dann ist auch $h \circ f$ differenzierbar in a mit

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a))f'(a).$$

(b) **(i)** Es gilt $f = (f_1 \circ f_2) + f_3$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := -2\log x, \\ f_2 &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := e^x - 1, \\ f_3 &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) := x. \end{aligned}$$

f_1, f_2, f_3 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} f_1' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{(vgl. 5.4.2 (2))}, \\ f_2' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_2'(x) = e^x \quad \text{(vgl. 5.4.1 (1))}, \\ f_3' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_3'(x) = 1 \quad \text{(vgl. 4.1.3 (ii))}. \end{aligned}$$

Nach 4.1.7 (1) und der Kettenregel 4.1.7 (v) ist dann auch $f = (f_1 \circ f_2) + f_3$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 \circ f_2)'(x) + f_3'(x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) + f_3'(x) \\ &= -\frac{2}{e^x - 1}e^x + 1 = \frac{-2e^x + e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $g = g_1 g_2$ mit

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x) := x^2 - 2x + 2, \\ g_2 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(x) := e^x. \end{aligned}$$

g_1, g_2 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} g_1' &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_1'(x) = 2x - 2 \quad \text{(vgl. 4.1.8)}, \\ g_2' &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_2'(x) = e^x \quad \text{(vgl. 5.4.1 (1))}. \end{aligned}$$

Nach der Produktregel 4.1.7 (iii) ist dann auch $g = g_1 g_2$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) \\ &= (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $h = h_1 \circ \frac{h_2}{h_3}$ mit

$$\begin{aligned} h_1 &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) := \log x, \\ h_2 &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(x) := x + 1, \\ h_3 &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_3(x) := x - 1. \end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3 sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} h_1' &:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_1'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{(vgl. 5.4.2 (2))}, \\ h_2' &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_2'(x) = 1 \quad \text{(vgl. 4.1.8)}, \\ h_3' &:]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_3'(x) = 1 \quad \text{(vgl. 4.1.8)}. \end{aligned}$$

Nach der Quotientenregel 4.1.7 (iv) und der Kettenregel 4.1.7 (v) ist dann auch $h = h_1 \circ (\frac{h_2}{h_3})$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} h'(x) &= h_1'(\frac{h_2}{h_3}(x))\frac{h_2'(x)h_3(x) - h_2(x)h_3'(x)}{(h_3(x))^2} \\ &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 5.3.10) gilt:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^0$.

(b) Es liegt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ vor mit $a = -8$, $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{n^3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (vgl. 5.3.4 (i)), folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist nach dem Satz von Hadamard 5.3.3 (iii) also 1. Folglich ist die Potenzreihe nach 5.3.2 für $|x+8| < 1$ (d.h. für $-9 < x < -7$) konvergent und für $|x+8| > 1$ (d.h. für $x < -9$ oder $x > -7$) divergent.
Es sind noch die Punkte $x = -9$ und $x = -7$ zu untersuchen.
Für $x = -9$ liegt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(-1)^n$ vor, die nach dem Leibniz-Kriterium 2.3.8 konvergiert.
Für $x = -7$ liegt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ vor, die nach dem Majorantenkriterium 2.4.1 konvergiert, da $\frac{1}{n^2}$ nach 2.3.3 (i) eine konvergente Majorante ist.
Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(x+8)^n$ konvergiert also im Intervall $[-9, -7]$, außerhalb dieses Intervalls divergiert sie.

(c) (1) Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich $]0,\infty[$, einer offenen Menge, differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} \quad \text{für alle } x \in]0,\infty[.$$

Hat f in $a \in]0,\infty[$ ein lokales Extremum, so muss nach 4.3.13 gelten

$$0 = f'(a) = 2a - \frac{2}{a^3},$$

also $2a^4 = 2$, das heißt $a = 1$.
Mit der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} \quad \text{für alle } x \in]0,\infty[$$

gilt $f''(1) = 2 + 6 = 8 > 0$. Gemäß 4.3.14 besitzt f an der Stelle $a = 1$ ein lokales Minimum. Dies ist das einzige lokale Extremum.

(2) Weil das Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ kompakt ist, nimmt die Funktion f auf $[\frac{1}{2}, 2]$ Maximum und Minimum an.
Dies kann in einem der Randpunkte $\frac{1}{2}$ bzw. 2 oder im Inneren $]\frac{1}{2}, 2[$ des Intervalls $[\frac{1}{2}, 2]$ geschehen. Nach (1) kommt im Inneren nur der Punkt 1 in Frage.
Wir berechnen die Werte $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(2)$.

$$\begin{array}{lclcl} f(\frac{1}{2}) & = & \frac{1}{4} + 4 & = & \frac{17}{4} \\ f(1) & = & 1 + 1 & = & 2 \\ f(2) & = & 4 + \frac{1}{4} & = & \frac{17}{4} \end{array}$$

Also nimmt f auf $[\frac{1}{2}, 2]$ im Punkt 1 sein Minimum 2 und in den Punkten $\frac{1}{2}$ und 2 sein Maximum $\frac{17}{4}$ an.

Aufgabe 6

(a) Partielle Integration (vgl. 6.2.10):
Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$, und seien f und g stetig differenzierbar auf I. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

(b) (i) Dieses Integral kann sowohl mit partieller Integration als auch mit der Substitutionsregel berechnet werden. Wir wählen den einfacheren Weg, nämlich die Substitutionsregel 6.2.11. Im Integranden finden wir die Funktion

$$\varphi : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \ \varphi(t) := 1 + t^2$$

und deren Ableitung $\varphi'(t) = 2t$, so dass mit

$$f : [\varphi(0), \varphi(2)] = [1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) := \frac{1}{x}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \log x \Big|_1^5 \\
&= \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 1 = \frac{1}{2} \log 5.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzungen der Substitutionsregel waren erfüllt, da f stetig, φ stetig differenzierbar und $\varphi([0, 2]) = [1, 5]$ gilt (φ ist monoton wachsend).

(ii) Wir wollen die Methode der partiellen Integration 6.2.10 verwenden und setzen

$$f, g : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) := \sin x, \ g(x) := \cos^2 x.$$

f und g sind stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = \cos x, \ g'(x) = -2 \cos x \sin x.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g'(x) dx \\
&= \sin x \cos^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2 \sin^2 x \cos x) dx \\
&= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos x dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx,
\end{aligned}$$

da $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Es folgt

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - 0 = 2,$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3}.$$