Aufgabe 1

2 Punkte a) Sei (a_n) eine reelle Folge, und sei $a \in \mathbf{R}$. Wann heißt (a_n) konvergent gegen a? (Geben Sie die Definition oder eine äquivalente Formulierung an.)

4 Punkte b) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $0 \le a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Sei ferner (b_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Zeigen Sie: (a_n) ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 2

8 Punkte Die reelle Folge (a_n) sei definiert durch die Rekursionsformel

$$a_1 := 1,\ a_{n+1} := \sqrt{3a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Zeigen Sie, daß (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $1 \le a_n \le 3$ für alle $n \in \mathbf{N}$, und prüfen Sie das Monotonieverhalten von (a_n).)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

4 Punkte a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1}$,

4 Punkte b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+n+1}$.

Aufgabe 4

2 Punkte a) Seien $a \in D \subset \mathbf{R}$ und $f : D \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Formulieren Sie das ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit von f in a.

4 Punkte b) Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $a \in \mathbf{R}$ fest gewählt. Sei ferner die Funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$g(x) := (x-a)f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}.$$

Zeigen Sie: g ist stetig in a.

Aufgabe 5

2 Punkte a) Sei $D \subset \mathbf{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ differenzierbar in a?

b) Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{für alle } x \le 1 \\ x^2 + x & \text{für alle } x > 1 \end{cases}$.

2 Punkte (i) Zeigen Sie, daß f in $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ differenzierbar ist.

4 Punkte (ii) Zeigen Sie, daß f in 1 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(1)$.

4 Punkte (iii) Untersuchen Sie, ob f' in 1 differenzierbar ist.

Aufgab(

2 Punkte a) Formulieren Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

8 Punkte b) Sei I ein Intervall mit mehr als einem Punkt, und sei $f : I \to \mathbf{R}$ differenzierbar. Beweisen Sie folgenden Satz des Kurses: f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

4 Punkte a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x^2 - 1}$ für ein festes $n \in \mathbf{N}$,

4 Punkte b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)$.

Vergessen Sie nicht, vor der Anwendung von Sätzen die Voraussetzungen zu überprüfen.

Aufgabe 8

Sei $D \subset \mathbf{R}$, $D \ne \emptyset$, sei (f_n) eine Folge in $\mathrm{Abb}(D, \mathbf{R})$, und sei $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbf{R})$.

2 Punkte a) Formulieren Sie das ε-n_0-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz (Konvergenz im Sinne der Norm) von (f_n) gegen f.

4 Punkte b) Sei (a_n) eine Nullfolge in $\mathbf{R}$, und gelte $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $x \in D$. Beweisen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 9

2 Punkte a) Definieren Sie den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ $(a_n, a \in \mathbf{R})$.

6 Punkte b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe, und geben Sie alle Punkte $x \in \mathbf{R}$ an, in denen sie konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\alpha^n}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha > 0 \text{ beliebig, aber fest gewählt ist.}$$

Aufgabe 10

2 Punkte a) Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

6 Punkte b) Seien $a < b$ reelle Zahlen, und sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig mit $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Beweisen Sie: Es gibt ein $y \in]a,b[$ mit $f(y) = 0$.

Aufgabe 11

Berechnen Sie die folgenden Integrale für $x > 1$:

4 + 8 Punkte a) $\displaystyle\int_0^x t \sinh t\,dt$, b) $\displaystyle\int_1^x \frac{t - \sqrt{t}}{t + \sqrt{t}}\,dt$.

Formelsammlung

$f: I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) :=$	Definitionsintervall(e) I	Stammfunktion $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) :=$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
x^{-1}	$]0, \infty[$	$\log x\ (= \log\lvert x\rvert)$
x^{-1}	$]-\infty, 0[$	$\log(-x)\ (= \log\lvert x\rvert)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$]0, \infty[$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x$
$e^x\ (= \exp x)$	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x\ (= e^{x \log a})$ mit $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\ (= 1 + \tan^2 x)$	$](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\ (= 1 + \cot^2 x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\cot x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$