Formelsammlung

$f: I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) :=$	Definitionsintervall(e) I	Stammfunktion $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) :=$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
x^{-1}	$]0, \infty[$	$\log x\ (= \log\lvert x\rvert)$
x^{-1}	$]-\infty, 0[$	$\log(-x)\ (= \log\lvert x\rvert)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$]0, \infty[$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x$
$e^x\ (= \exp x)$	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x\ (= e^{x \log a})$ mit $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\ (= 1 + \tan^2 x)$	$](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\ (= 1 + \cot^2 x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\cot x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$

Mathematik II / Mathematik für Informatiker II, SS 97
Klausur vom 23.08.97:
Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

Seien $x, y \in]-1, \infty[$. Aus $x \leq y$ folgt $x + xy \leq y + xy$, d. h. $x(1+y) \leq y(1+x)$. Wegen $x, y > -1$ sind $1 + x, 1 + y > 0$, also folgt $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$.

Aufgabe 2

a) Siehe 2.2.4.

b) Siehe 2.1.10.

c) Die Umkehrung der Aussage in b) gilt nicht. Z. B. ist die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ wegen $|a_n| = 1$ beschränkt, aber (a_n) ist nicht konvergent (vgl. 2.1.9(iv)).

Aufgabe 3

a) Siehe 2.4.1(i).

b) (i) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n^2+n}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n},$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3+1}$ nach dem Minorantenkriterium (s. 2.4.1(ii)) wegen der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (s. 2.2.11) divergiert.

(ii) Wegen

$$\left| \frac{\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-3)^n}{n!}} \right| = \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)!\, 3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ nach dem Quotientenkriterium (s. 2.4.3) konvergent.

Aufgabe 4

a) Siehe 3.2.4.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Sei also $\varepsilon > 0$, dann setzen wir $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt nun:

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a| < K\delta = \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ haben wir also ein $\delta > 0$ (nämlich $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$) gefunden, so daß die Implikation $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr ist.

© 1997 Fernuniversität - Gesamthochschule - in Hagen

Aufgabe 5

a) Siehe 3.4.1.

b) Sei $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := n\cos x + x$. Dann ist f_n stetig, da Summe zweier stetiger Funktionen, nämlich $n\cos$ und id. Nun gilt $f_n(0) = n$, da $\cos 0 = 1$. Auch gilt $f_n(\pi) = -n + \pi$, für $n \geq 4$ gilt nun $f_n(\pi) < 0$. Erreicht haben wir:

$$f_n(\pi) < 0 < f_n(0).$$

Der Zwischenwertsatz garantiert nun die Existenz eines $y \in]0,\pi[$ mit $f_n(y) = 0$; dieses y nennen wir $x_n := y$.

Aufgabe 6

a) In einem Häufungspunkt a des Definitionsbereiches D einer reellwertigen Funktion f heißt diese Funktion *differenzierbar*, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, für welche die sogenannte Restfunktion $r : D \to \mathbb{R}$ (bestimmt gemäß $f(x) = f(a) + b(x-a) + r(x)$ für alle $x \in D$) der Bedingung $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ genügt (Def. 4.1.1).

Äquivalent dazu ist (nach 4.1.4), daß der Grenzwert $g = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Dann gilt $b = g = f'(a)$.

b) Wegen $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x \leq 0$ gilt $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -x^2$ für $x \leq 0$. Daher hat für alle $a > 0$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = x + a \quad (\text{für } x > 0)$$

beim Grenzübergang $x \to a$ den Grenzwert $2a$.

Für alle $a < 0$ ergibt sich entsprechend

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(-x^2)-(-a^2)}{x-a} = -(x+a) \quad (\text{für } x < 0)$$

mit Grenzwert $-2a$ bei $x \to a$.

Im Falle $a = 0$ finden wir wegen $f(0) = 0$ und $|f(x)| = |x|^2$

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = |x| \to 0 \text{ bei } x \to 0,$$

also $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ für $a = 0$.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß f für jede reelle Zahl a differenzierbar ist mit Ableitung $f'(a) = 2a$, falls $a \geq 0$, und $f'(a) = -2a$, falls $a \leq 0$.

Aufgabe 7

Weil eine Verschiebung Flächeninhalte unverändert läßt, genügt es, Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung zu betrachten. Da auch eine Drehung Flächeninhalte unverändert läßt, dürfen wir annehmen, daß die Seiten des im Kreis enthaltenen Rechteckes parallel zu den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems sind. Wenn nicht alle vier Eckpunkte auf dem Kreisumfang lägen, ließe sich der Flächeninhalt des Rechteckes vergrößern. Betrachten wir daher ein Rechteck mit Eckpunkten (x,y), $(-x,y)$, $(-x,-y)$ und $(x,-y)$ auf dem Rand des Kreises ($x > 0, y > 0$). Der Satz von Pythagoras liefert dann die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so daß $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Das Rechteck hat die Seitenlängen $a = 2x$ und $b = 2y$, also den Flächeninhalt $a \cdot b = 4xy$. Demnach wird der Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von der Größe x beschrieben durch die Funktion $f :]0,r[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$. Wir bestimmen das absolute Maximum dieser Funktion:

Da r eine fest vorgegebene Konstante ist, gilt $f'(x) = 4\sqrt{r^2-x^2} + 4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} \cdot (-2x)$ (Produktregel 4.1.7 (iii) und Ketttenregel 4.1.7 (v)).

Für jedes lokale Maximum a von f muß notwendigerweise $f'(a) = 0$ gelten (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum 4.3.13). Das führt nach Multiplikation mit $\sqrt{r^2 - x^2} \neq 0$ zu

$$(*) \qquad 4(r^2 - x^2) - 4x^2 = 0 \iff r^2 = 2x^2 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} r.$$

Einziger Kandidat für maximalen Flächeninhalt ist also das Rechteck mit den Seitenlängen $a_0 = 2\frac{1}{\sqrt{2}} r = \sqrt{2} r$ und $b_0 = 2\sqrt{r^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2} r$, ein Quadrat!

Daß es sich dabei tatsächlich um das absolute Maximum der Fläche handelt, ergibt sich wegen $f'(x) \leq 0 \iff x \geq x_0$ und $f'(x) \geq 0 \iff x \leq x_0$ (mit $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} r$ und gleicher Rechnung wie bei (*)). Die Charakterisierung 4.2.4 für monotone Funktionen zeigt nämlich dann, daß f auf $]0, x_0]$ monoton wachsend und auf $[x_0, r[$ monoton fallend ist, also $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \leq x_0$ und $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \geq x_0$. Der gesuchte maximale Flächeninhalt ist somit $a_0 \cdot b_0 = 2r^2$.

Aufgabe 8

a) Siehe 4.2.2.

b) Wir beweisen $\exp x > 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

1. Fall: $x > 0$. Es ist $\exp|_{[0,x]}$ differenzierbar mit $(\exp \xi)' = \exp \xi$ für $\xi \in [0,x]$. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]0,x[$ mit

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = (\exp \xi)' = \exp \xi > \exp 0 = 1,$$

da $\xi > 0$ und exp streng monoton wachsend ist. Durch Multiplikation mit $x > 0$ folgt $\exp x - 1 > x$, also $\exp x > 1 + x$.

2. Fall: $x < 0$. Nach dem 1. Mittelwertsatz (angewandt auf $\exp|_{[x,0]}$) gibt es ein

$\xi \in]x, 0[$ mit

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = (\exp \xi)' = \exp \xi < \exp 0 = 1,$$

da $\xi < 0$ und exp streng monoton wachsend ist. Durch Multiplikation mit $x < 0$ folgt $\exp x - 1 > x$, also $\exp x > 1 + x$.

Aufgabe 9

a) Siehe 3.5.4.

b) Siehe 5.1.6(ii).

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := f(x + \frac{1}{n}).$$

Wir zeigen mit dem ε-n_0-Kriterium, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Es gibt (nach 1.2.8(i)) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \delta$. Für jedes $n \geq n_0$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ ist dann $|(x + \frac{1}{n}) - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$, also gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nach dem ε-n_0-Kriterium (5.1.6(ii)) konvergiert (f_n) damit gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 10

a) Siehe 5.3.2.

b) (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt -1 und Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n^2}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \;\to\; 1 \quad \text{für } n \to \infty,$$

nach Ü 5.3.1 hat die Potenzreihe also den Konvergenzradius $r = 1$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und den Koeffizienten $a_n = \frac{3^n}{n}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \;\to\; \frac{1}{3} \quad \text{für } n \to \infty,$$

nach Ü 5.3.1 hat die Potenzreihe also den Konvergenzradius $r = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 11

a) Siehe 6.2.9.

b) (i) Als Treppenfunktion ist f Riemann-integrierbar (siehe A 6.1.9). Es gilt ersichtlich $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

(ii) Wir nehmen an, $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von f. Dann ist F differenzierbar (6.2.7), und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (6.2.9) gilt

$$0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(-1) - F(1).$$

Wir erinnern uns an den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (4.2.2): F stetig auf $[-1, 1]$, differenzierbar auf $]-1, 1[\;\Rightarrow\; \exists \xi \in]-1, 1[$ mit

$$0 = \frac{F(1) - F(-1)}{1 - (-1)} = F'(\xi) = f(\xi).$$

D. h. es gibt ein $\xi \in]-1, 1[$ mit $f(\xi) = 0$, Widerspruch! Denn $f(\xi) = 1$ oder $f(\xi) = -1$ je nachdem, ob $\xi \geq 0$ oder $\xi < 0$.

Aufgabe 12

(i) Die Substitutionsregel (6.2.11) besagt (mit stetig differenzierbarem φ)

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Wir setzen $f(x) := \sin\sqrt{x}$ und $\varphi(t) := t^2$, dann ist φ stetig differenzierbar mit $\varphi'(t) = 2t$. Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)t\,dt.$$

Dieses Integral bearbeiten wir nun vermöge partieller Integration (6.2.10) mit $g'(t) = \sin t$, $g(t) = -\cos t$, $h(t) = t$ und $h'(t) = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = -t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Also gilt

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = 2.$$

(ii) Mit $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $\varphi(x) = \sin x$, $\varphi'(x) = \cos x$ liefert uns die Substitutionsregel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{1}{1+z}\,dz$$
$$= \log(1+z)\Big|_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$