Lösungshinweise zur Klausur Mathematik für Informatiker 11
SS 99

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$a_n = \frac{125n^9 - 9n^5}{(25n+1)(5n^4+1)^2} = \frac{125 - \frac{9}{n^4}}{(25 + \frac{1}{n})(5 + \frac{1}{n^4})^2} = \frac{b_n}{c_n},$$

wobei

$$b_n = 125 - \frac{9}{n^4}, c_n = (25 + \frac{1}{n})(5 + \frac{1}{n^4})^2$$

für n $\in \mathbb{N}$. Es gilt $c_n \neq 0$ für alle n $\in \mathbb{N}$. Da $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n^4})$ Nullfolgen sind, konvergieren nach den Rechenregeln 2.1.12 (b_n) gegen 125 und (c_n) gegen $25 \cdot 5^2 \neq 0$, also $(a_n) = (\frac{b_n}{c_n})$ gegen $\frac{125}{25 \cdot 5^2} = \frac{1}{5}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 - n} - n = \frac{(\sqrt{n^2-n} - n)(\sqrt{n^2-n} + n)}{\sqrt{n^2-n} + n} \\ &= \frac{n^2 - n - n^2}{\sqrt{n^2-n} + n} = \frac{-n}{\sqrt{n^2-n} + n} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})} = \sqrt{1} = 1$, also nach den Rechenregeln 2.1.12

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

Aufgabe 2

(a) Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle n $\in \mathbb{N}$ ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Nach dem Minorantenkriterium (2.4.1(ii)) ist die Reihe daher divergent.

(b) Die Wurzelfunktion $\sqrt{\ } :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und monoton wachsend (vgl. 3.4.4). Daher ist $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0$, vgl. 3.2.5. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert somit die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(c) Sei $a_n := \frac{(8n^2+5)^n}{(3n+1)^{2n}}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\frac{8n^2+5}{(3n+1)^2})^n} = \frac{8n^2+5}{9n^2+6n+1} = \frac{8+\frac{5}{n^2}}{9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}$,
also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{9} < 1$.
Nach dem Wurzelkriterium (2.4.2) ist daher die Reihe konvergent.

Aufgabe 3

An jeder Stelle $\begin{matrix} x \\ 0\,y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist f als Verkettung stetiger Funktionen stetig (vgl. 7.2.6). Um die Stetigkeit in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nachzuprüfen, verwenden wir das E-S-Kriterium (7.2.4(ii)). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein $\delta > 0$, nämlich $\delta := \varepsilon$, so daß für alle $\begin{matrix} x \\ 0\,y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2$ aus $|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| < \delta$ folgt: $|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| < \varepsilon$.
Wir prüfen dies nach:
Für x, $y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|$ und entsprechend $|y| \leq |\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|$.
Wegen $|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| < \delta = \varepsilon$ folgt daraus aber

$$|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| = |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|x|\cdot|y|}{|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|} \leq \frac{|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|^2}{|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|} = |\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}| < \varepsilon.$$

Aufgabe 4

(a) Wir verwenden die Produktregel (4.1.7(iii)) und erhalten

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x.$$

(b) Wir verwenden die Kettenregel (4.1.7(v)) und erhalten

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

(c) Wir verwenden zuerst die Quotientenregel (4.1.7(iv)) und dann mehrfach die Kettenregel (4.1.7(v)) und erhalten

$$h'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^6}} \cdot 6x^5}{(\sqrt{1+x^6})^2} = -\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}(1+x^6)} = -\frac{3x^5}{\sqrt{(1+x^6)^3}}.$$

Aufgabe 5

(a) f ist differenzierbar auf seinem Definitionsbereich, dem offenen Intervall $]0,\infty[$. Hat f in $a \in]0,\infty[$ ein lokales Extremum, so muß gelten 0 = $f'(a)$ = 2a $-\frac{16}{a^2}$, also $2a^3$ = 16 und somit a = 2.
Für die zweite Ableitung von f gilt f"(x) = $2+\frac{32}{x^3}$ für x $\in]0,\infty[$, also f"(2) = $2+\frac{32}{8} = 6 > 0$.
Folglich hat f in 2 ein lokales Minimum.

(b) Da D := $[4,8]$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß b, c $\in D$ mit f(b) = max *f(D)* und f(c) = min *f(D)*. Weder b noch c können im Innern von *D*, d.h. in $]4,8[$ liegen, da in diesem Fall f in einem Punkt von $]4,8[$ ein lokales Extremum hätte, was nach (a) ausgeschlossen ist (Das einzige lokale Extremum hat f in a = 2 $\notin]4,8[$.). Es folgt b, $c \in \{4,8\}$. Wir berechnen die Funktionswerte.

$$f(4) = 16 + \frac{16}{4} = 20,\ f(8) = 64 + \frac{16}{8} = 66.$$

Es folgt b = 8, c = 4 und

$$\max f(D) = f(8) = 66,\ \min f(D) = f(4) = 20.$$

Aufgabe 6

(a) Wir setzen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1 - \cos x$, g(x) := $e^x - 1$. f und g sind differenzierbar mit f(0) = 0 = g(0) und den Ableitungen f', g' $:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f'(x) := \sin x$, g'(x) $= e^x$. Wegen g'(x) = $e^x \neq 0$ für alle x $\in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\sin 0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

folgt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1} = 0.$$

(b) Wir setzen $I :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \tan x - x$, $g(x) := x^3$.
f und g sind 3-mal differenzierbar mit f(0) = 0 = g(O),
$f', g' : I \longrightarrow \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$, g'(x) = $3x^2$, f'(0) = 0 = g'(O),
$f'', g'' : I \longrightarrow \mathbb{R}, f''(x) =$ 2 tan x(**1** + $\tan^2$ x) = 2 tan x + 2 $\tan^3$ x, g"(x) = $6x$,
$f''(0) = 0 =$ g"(0) und schließlich
$f''', g''' : I \longrightarrow \mathbb{R}, f'''(x) = 2(1+\tan^2 x) + 6\tan^2 x(1+\tan^2 x) = 2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x)$,
g"'(x) = 6.
Wegen $g^{(k)}(x) \neq 0$ für alle x $\in I \backslash \{0\}, k \in \{1,2,3\}$, folgt nach dreimaligem Anwenden der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1+\sin 0}{1+\cos 0} = \dfrac{1}{2}.$

(Achtung ! Die Regel von de l'Hospital kann hier nicht eingesetzt werden, da $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x) \neq 0$.)

Aufgabe 7

(a) Wegen $0 \leq \left|\dfrac{x^n}{(n!)^2}\right| \leq \dfrac{|x|^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$ $(= e^{|x|})$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium (2.4.1(i)) konvergiert daher die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) f ist als Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls (hier: $\mathbb{R}$) beliebig oft differenzierbar (vgl. 5.3.8). Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}, \quad xf''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}$$

(vgl. 5.3.8 „gliedweises Differenzieren“). Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) + xf''(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{(n!)^2} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{((n-1)!)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = f(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 8

(a) Wir wollen die Methode der partiellen Integration verwenden und setzen $f, g : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) := $-e^{-x}$, g(x) := x. f und g sind stetig differenzierbar mit f'(x) = e^{-x}, g'(x) = 1.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx &= \int_{-1}^{0} e^{-x}x\,dx = \int_{-1}^{0} f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} f(x)g'(x)\,dx \\ &= -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx \\ &= -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} + (-e^{-x})\Big|_{-1}^{0} = -(x+1)e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = -e^0 + 0 = -1. \end{aligned}$$

(b) Wir wollen die Substitutionsregel anwenden, denn

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 (-2t)e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^2 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

wobei $\varphi : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) := -t^2$ stetig differenzierbar mit der Ableitung $\varphi'(t)$ = -2t und j : [-4, 0] $\longrightarrow \mathbb{R}$, j(x) $:= e^x$ stetig sowie $\varphi([0,2]) = [-4,0]$ wegen $\varphi(0)$ = 0, $\varphi(2)$ = -4 und φ monoton fallend ($\varphi'(t)$ = -2t $\leq$ 0 für $t \in [0,2]$).
Aus der Substitutionsregel folgt nun

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{-4} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^0 e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x\Big|_{-4}^0$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}.$$

(c) Der Nenner des Integranden, $x^2 - x - 2$, hat zwei reelle Nullstellen, nämlich -1 und 2. Es gilt also $x^2 - x - 2$ = (x + 1) (x − 2) und die Partialbruchzerlegung des Integranden lautet

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ausmultiplizieren liefert Bestimmungsgleichungen für (die eindeutig bestimmten reellen Konstanten) A und B :

$$x - 5 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x + (B-2A),$$

also

$$A + B = 1 \text{ und } B - 2A = -5.$$

Daraus folgt A = 2, B = -1. Daher gilt:

$$\int_0^1 \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-2}\right)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= 2\log(x+1)\Big|_0^1 - \log|x-2|\Big|_0^1$$

$$= 2(\log 2 - \log 1) - (\log 1 - \log 2) = 3\log 2.$$

Aufgabe 9

(a) Wir bezeichnen mit $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y^2$, $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + y^3$ die Komponentenfunktionen von j. Die partiellen Ableitungen von f_1 und f_2

$$D_1 f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1,\ D_2 f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y,\ D_1 f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 2y,\ D_2 f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 3y^2$$

sind für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vorhanden und offensichtlich stetig. Folglich ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & D_2 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ D_1 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & D_2 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x+2y & 2x+3y^2 \end{pmatrix}.$$

(b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1^2 \\ 1^2+2\cdot 1\cdot 1+1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

(c) det f' $\begin{matrix} 1 \\ 0\,1 \end{matrix} = 1\cdot 5 - 4\cdot 2 = -3 \neq 0.$

Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit (8.3.2) gibt es eine offene Umgebung U von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine offene Umgebung $\boldsymbol{V}$ von $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, so daß $f|_U : U \longrightarrow V$ bijektiv und die Umkehrabbildung g $: \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ***zu*** $f|_U$ auf $\boldsymbol{V}$ stetig differenzierbar ist.

(d) Nach (c) gilt

$$g'\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(f'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det f'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -435 & -3\,1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 10

f ist stetig und D ein kompakter Quader. Folglich ist $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und für das Integral $\int\limits_D f\, d\lambda_2$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int\limits_D f\, d\lambda_2 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x e^{xy} dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left(e^{xy}\Big|_0^1\right) dx = \int\limits_0^1 (e^x - 1)\, dx$$

$$= (e^x - x)\Big|_0^1 = (e-1) - (1-0) = e - 2.$$