# Lösungshinweise zur Nachklausur Mathematik für Informatiker 11

## SS 99

### Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n = \frac{(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n)(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} \\ &= \frac{n^2+\sqrt{n}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}+1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}+1} \end{aligned}$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion und den Rechenregeln 2.1.12 folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}+1} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\sqrt{(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})^3}}+1} \\ &= \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+1} = 0. \end{aligned}$$

(b) Die Folge $a_n$ hat die Teilfolgen

$$b_n = a_{2n} = |\sin(n\pi)| = 0, \quad c_n = a_{2n+1} = |\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})| = 1.$$

Diese Teilfolgen konvergieren. Da aber

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

ist die Folge $a_n$ divergent.

### Aufgabe 2

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+1$, also $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{n+1}$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert (harmonische Reihe) ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ divergent.

**(b)** Es gilt

$$\frac{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n!}{n^n}\right)} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)n^n}{n!(n+1)(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also konvergent.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + \log(n+1) \geq 1 + \log n \geq 1 > 0$, also $\frac{1}{1+\log(n+1)} < \frac{1}{1+\log n}$.

Die Folge $\left(\frac{1}{1+\log n}\right)$ ist also monoton fallend.
Da diese Folge außerdem eine Nullfolge ist ($(\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $\log(]0,\infty[) = \mathbb{R}$), ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

## Aufgabe 3

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $f$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Die Folge $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}^2$ gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = n.$$

Insbesondere konvergiert $\left(f\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(0,0) = 0$. Also ist $f$ an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht stetig.

## Aufgabe 4

(a) $f'(x) = \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x+1}$ (Kettenregel).

(b) $g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2}$

$= \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ (Quotientenregel).

(c) $h'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$ (Produktregel).

## Aufgabe 5

(a) Als Polynom ist $f$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Hat $f$ in $a \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum, so muß nach 4.3.13

$$0 = f'(u) = 3a^2 - 18a - 21$$

gelten, also

$$0 = a^2 - 6a - 7 = (a+1)(a-7),$$

d.h. $a$ = -1 oder $a$ = 7.
Wegen $f''(a)$ = $6a$ − 18, ist $f''(-1)$ = -6 − 18 = -24 < 0, also hat $f$ in -1 ein lokales Maximum mit $f(-1)$ = -1 − 9 + 21 + 5 = 16, vgl. 4.3.14.
Wegen f"(7) = 42 − 18 = 24 > 0, hat $f$ in 7 ein lokales Minimum mit f(7) = 343 − 441 − 147 + 5 = -240.

(b) Da $[-1,7]$ kompakt ist, nimmt $f$ auf $[-1,7]$ nach dem Satz von Weierstraß (3.5.3) Maximum und Minimum an. Dies kann nicht in einem Punkt aus dem Innern von [ -1,. 7], d.h. aus $]-1,7[$ geschehen, da dann $f$ in einem Punkt von $]-1,7[$ ein lokales Extremum hätte, was nach (a) nicht der Fall ist. Folglich nimmt $f$ auf $[-1,7]$ das Maximum in -1 und das Minimum in 7 an und es gilt

$$\max f[-1,7] = f(-1) = 16,$$
$$\min f[-1,7] = f(7) = -240.$$

Aufgabe 6

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{e^0-1}{e^0+1} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0.$
(Wegen $e^0 + 1 \neq 0$ ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar.)

(b) Wir setzen $f$, g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) := arctanx, g(x) := $x^3$ − x. Dann sind $f$ und g differenzierbar mit j'(x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$, g'(x) = $3x^2$ − 1 für alle x ∈ $\mathbb{R}$, f(0) = 0 = g(0).

Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in ]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{(\frac{1}{1+0^2})}{3\cdot 0^2-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$ folgt nach der Regel -von de l'Hospital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan\ x}{x^3-x} = -1.$

(c) Wir setzen $f$, g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit f(x) := $x^2$ + 2 cos x − 2, g(x) := x − sin x für alle x ∈ $\mathbb{R}$. Dann sind $f$ und g auf $\mathbb{R}$ 3-mal differenzierbar mit

$$\begin{array}{ll}
f(0) = 0, & g(0) = 0 \\
f'(x) = 2x - 2\sin x, & g'(x) = 1 - \cos x \\
f'(0) = 0, & g'(0) = 0 \\
f''(x) = 2 - 2\cos x, & g''(x) = \sin\ x \\
f''(0) = 0, & g''(0) = 0 \\
f'''(x) = 2\sin x, & g'''(x) = \cos x \\
f'''(0) = 0, & g'''(0) = 1 \neq 0.
\end{array}$$

Wegen g(")(x) ≠ 0 für alle x ∈ $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ folgt durch dreimaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x-2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

## Aufgabe 7

(a). Für jedes x $\in$ [-1, 1] ist $0 \leq \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, und nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe.

(b) Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe ist $a$ = 0. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ = 1, folgt für den Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe nach Hadamard mit $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1.$$

Da $|-2-a| = |-2-0| = 2 > 1 = r$, divergiert die Potenzreihe für x = -2.

Andere Lösungsmöglichkeit: Da $2^n \geq n^2$ für alle n $\in \mathbb{N}$ mit n $\geq$ 4 gilt, ist wegen $|\frac{(-2)^n}{n^2}| = \frac{2^n}{n^2} \geq 1$ die Folge der Reihenglieder $\frac{(-2)^n}{n^2}$ keine Nullfolge, d.h. die Potenzreihe divergiert für x = -2.

(c) Da jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzintervalls gegen eine beliebig oft differenzierbare Funktion konvergiert, ist $f$ auf $]-1,1[$ beliebig oft differenzierbar. Da Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen, erhalten wir $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ für alle x $\in ]-1,1[$.

## Aufgabe 8

(a) Der Nenner des Integranden, $x^2 - x - 2$, hat zwei reelle Nullstellen, nämlich $-1$ und 2. Es gilt also $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ und die Partialbruchzerlegung des Integranden lautet

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ausmultiplizieren liefert Bestimmungsgleichungen für (die eindeutig bestimmten reellen Konstanten) $A$ und $B$ :

$$x - 5 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x + (B-2A),$$

also

$$A + B = 1 \text{ und } B - 2A = -5.$$

Daraus folgt $A$ = 2, $B$ = -1. Daher gilt:

$$\int_0^1 \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-2}\right) dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= 2\log(x+1)\Big|_0^1 - \log|x-2|\Big|_0^1$$

$$= 2(\log 2 - \log 1) - (\log 1 - \log 2) = 3\log 2.$$

(b) Wir verwenden partielle Integration mit $f$, g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, g(x) = arctanx. $f$ und g sind stetig differenzierbar mit $f'(x) = 1$, g'(x) = $\frac{1}{1+x^2}$. Es gilt dann

$$\int_{-1}^{1} \arctan x \, dx = x \arctan x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} = \arctan 1 + \arctan(-1) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = 0.$$

(c) Wir wenden die Substitutionsregel an, denn $\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^e \varphi(t)\varphi'(t)\, dt$,

wobei $\varphi$ : [1, e] $\longrightarrow$ IR, $\varphi(t)$ := logt stetig differenzierbar ist mit $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$. Für die identische Abbildung $f$ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^e f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_0^1 x dx = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

## Aufgabe 9

(a) Wir bezeichnen mit $f_1$, $f_2$ : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x^2 + y^2$, $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := e^{xy}$, die Komponentenfunktionen von $f$.

Die partiellen Ableitungen von $f_1$ und $f_2$

$$D_1 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x, \; D_2 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y, \; D_1 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ye^{xy}, \; D_2 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe^{xy}$$

sind stetig. Folglich ist $f$ stetig differenzierbar und es gilt

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & D_2 f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ D_1 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & D_2 f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

(b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\det f'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$.

Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit (8.3.2) gibt es eine offene Umgebung $U$ von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und eine offene Umgebung $V$ von $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so daß $f|_U : U \longrightarrow V$ bijektiv und die Umkehrabbildung g : $V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zu $f|_U$ auf $V$ stetig differenzierbar ist.

(d) Nach (c) gilt

$$g'\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(f'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 10**

Da $f$ stetig und $D$ ein kompakter Quader, ist der Satz von Fubini anwendbar. Nach dem Satz von Fubini gilt einerseits

$$\int_D f\,d\lambda_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$$

und andererseits

$$\int_D f\,d\lambda_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(y,x)\,dy\,dx.$$

Wegen $f(y, x) = -f(x, y)$ für alle $\begin{matrix} x \\ 0\,y \end{matrix} \in D$ folgt

$$\int_D f\,d\lambda_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = -\int_D f\,d\lambda_2,$$

also $\int_D f\,d\lambda_2 = 0.$