

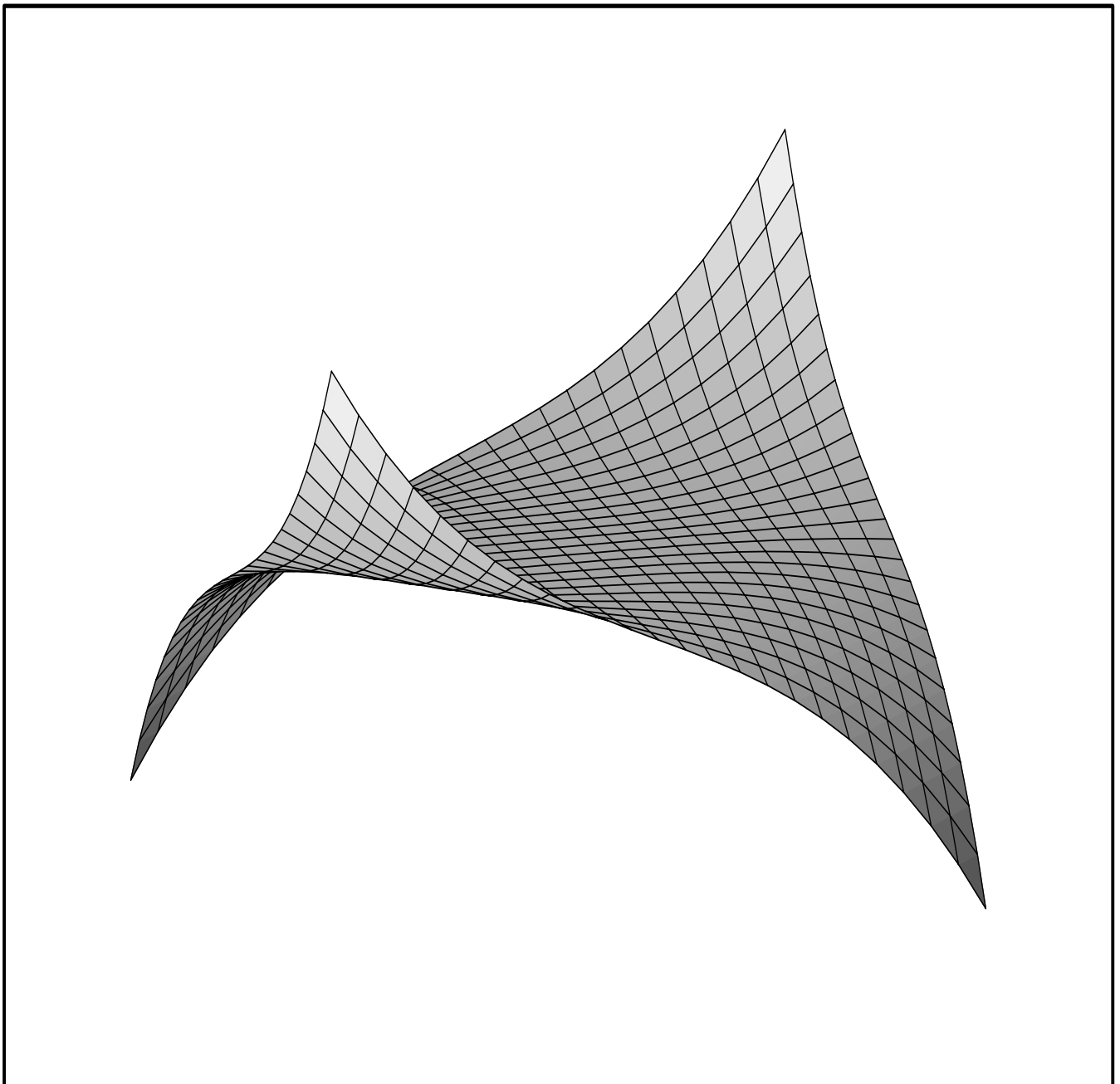
# Studientage

zu den Kursen

01172 Mathematik II (Autor: W. Beekmann)

01182 Mathematik für Informatiker II (Autor: W. Beekmann)

Autoren: K.H. Kamps, Th. Müller



## A. Reelle Zahlen, Folgen, Reihen

### A.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  tragen zunächst die Struktur eines Körpers und die Struktur einer linear geordneten Menge, d.h.

- I**  $\mathbb{R}$  ist versehen mit einer Addition  $+$  sowie einer Multiplikation  $\cdot$ , so daß  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ein **Körper** ist (vgl. Teil I \*, 1.3.1).
- II**  $\mathbb{R}$  ist versehen mit einer Relation  $\leq$  (kleiner-gleich), so daß  $(\mathbb{R}, \leq)$  eine **linear geordnete Menge** ist. Das bedeutet, für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt

- (a)  $x \leq x$  (*Reflexivität*)
- (b)  $x \leq y$  und  $y \leq x \implies x = y$  (*Antisymmetrie*)
- (c)  $x \leq y$  und  $y \leq z \implies x \leq z$  (*Transitivität*)
- (d)  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  (*Linearität*)

Man fordert, daß die lineare Ordnung mit der Körperstruktur verträglich ist. Das bedeutet

- (i) (*Verträglichkeit von  $\leq$  und  $+$* )

Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z.$$

- (ii) (*Verträglichkeit von  $\leq$  und  $\cdot$* )

Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt

$$x \leq y \text{ und } 0 \leq z \implies xz \leq yz.$$

Damit wird  $\mathbb{R}$  zu einem **linear geordneten Körper**.

Entscheidend ist jetzt die Hinzunahme einer weiteren Forderung, die der Vollständigkeit.

### III Vollständigkeit

Zu je zwei nichtleeren Teilmengen  $A, B$  von  $\mathbb{R}$  mit  $A \leq B$  (d.h.  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ ) existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$A \leq c \leq B$$

---

\*Teil I bezieht sich auf Mathematik für Informatiker I (01181) / Mathematik I (01171)

(d.h.  $a \leq c \leq b$  für alle  $a \in A$ ,  $b \in B$ ).

**Bemerkung.** Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  tragen ebenfalls die Struktur eines linear geordneten Körpers. Dieser ist jedoch im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  nicht vollständig. Man kann das unter Ausnutzung der Tatsache beweisen, daß es in  $\mathbb{Q}$  kein Element  $x$  mit  $x^2 = 2$  gibt („ $\sqrt{2}$  ist nicht rational.“) (vgl. auch A.2.6).

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen zieht die Existenz des Supremums bzw. Infimums nichtleerer, nach oben bzw. nach unten beschränkter Mengen reeller Zahlen nach sich.

### 1.2.6\* Satz (Existenz des Supremums/Infimums)

**1.2.3** Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein **Supremum**

**1.2.4** (oder **obere Grenze** oder **kleinste obere Schranke**).

Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein **Infimum** (oder **untere Grenze** oder **größte untere Schranke**).

Aus dem Satz von der Existenz des Supremums folgt der

### 1.2.7 Satz von Archimedes

Zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a < n$ .

Aus dem Satz von Archimedes wiederum ergibt sich die folgende

### 1.2.8(iii) Klassische Schlußweise der Analysis

Gilt  $0 \leq x < \varepsilon$  für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$ , so ist  $x = 0$ .

*Beweis:*

Wir schließen indirekt und nehmen an  $x > 0$ . Dann gilt  $\frac{1}{x} > 0$ . Nach dem Satz von Archimedes existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{x} < n$ . Es folgt  $x > \frac{1}{n}$  und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

## A.2 Folgen

### 1. Reelle Folgen

#### 2.1.1 Eine reelle Folge ist nichts anderes als eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto f(n).$$

Der neue Name für einen bekannten Begriff ist Programm :

Die natürliche Anordnung der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  induziert eine Anordnung

---

\*Die Ziffern beziehen sich (hier und in Zukunft) auf den Kurs 01172 bzw. 01182.

(Reihenfolge) der  $f(n)$ , der **Glieder der Folge**. Dies wird als wesentliches Merkmal einer Folge betrachtet und findet in der gebräuchlichen Schreibweise

$$f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

ihren Ausdruck, wobei  $a_n := f(n)$ .

**Beispiele**

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right),$$

$$\left((-1)^n\right) = (-1, 1, -1, 1, \dots),$$

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{1}{1 + a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}, \text{ also } (a_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots\right).$$

Zentrales Ziel ist dann die Charakterisierung des Verlaufs der Folge für wachsende  $n$ , insbesondere die Untersuchung auf

**2. Konvergenz bzw. Divergenz**

Sei  $f = (a_n)$  eine reelle Folge,  $a \in \mathbb{R}$ .

**2.1.7**  $f$  heißt **konvergent gegen**  $a$ , wenn in jeder Umgebung von  $a$  alle Glieder der Folge mit höchstens endlich vielen Ausnahmen liegen.

Da jede Umgebung von  $a$  nach Definition eine  $\varepsilon$ -Umgebung

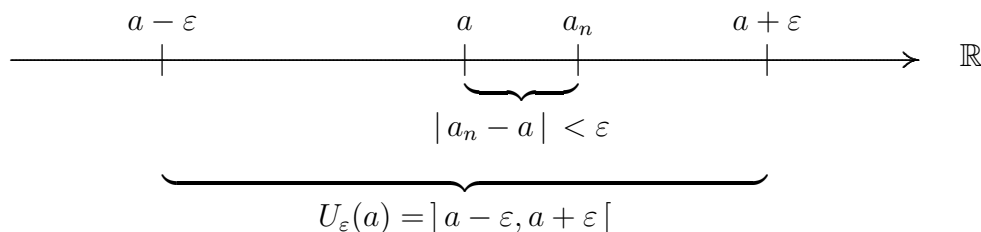
**1.4.1** 
$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ , \quad \varepsilon > 0$$

enthält, läßt sich die Konvergenz-Definition umformen in das zugänglichere

**2.2.4  $\varepsilon$ - $n_0$ -Kriterium**

$f$  ist konvergent gegen  $a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$



**Beispiel:**  $\frac{1}{n}$  ist konvergent gegen 0.

Für  $\varepsilon > 0$  wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- 2.1.7** Ist  $f$  konvergent gegen ein  $a \in \mathbb{R}$ , so nennt man  $f$  **konvergent** und  $a$  **Grenzwert** von  $f$ ; im Falle  $a = 0$  nennt man  $f$  eine **Nullfolge**.

*Schreibweise:*  $\lim f := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$  bzw.  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  Grenzwerte der reellen Folge  $f = (a_n)$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$   $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt, also  $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , woraus  $a = b$  folgt, d.h.

- 2.1.8** Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

- 2.1.7** Folgen, die nicht konvergent sind, nennt man **divergent**.

- 2.2.1** Abändern, Weglassen oder Hinzufügen von endlich vielen Folgengliedern ändert nichts an Konvergenz oder Divergenz, auch nichts am Grenzwert.

### 3. Teilfolgen

Sei  $f = (a_n)$  eine reelle Folge.

Durch Weglassen von endlich oder unendlich vielen Folgengliedern von  $f$  entsteht eine neue Folge  $\tilde{f} = (\tilde{a}_k)$ , eine Teilfolge von  $f$ . Genauer:

- 2.2.2**  $\tilde{f} = (\tilde{a}_k)$  ist eine **Teilfolge** von  $f = (a_n)$ , falls eine streng monotone Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $\tilde{f} = f \circ \alpha$ .

Setzt man für jedes  $k \in \mathbb{N}$   $n_k := \alpha(k)$ , so bedeutet

- die strenge Monotonie von  $\alpha$   $n_k < n_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$
- $\tilde{f} = f \circ \alpha$  gerade  $\tilde{a}_k = a_{n_k}$ .

$\alpha$  pickt also unter Beibehaltung der Anordnung unendlich viele Folgenglieder von  $f$  heraus.

### Konvergenz-/Divergenzkriterium bzgl. Teilfolgen

- 2.2.2** (a) Jede Teilfolge  $\tilde{f}$  einer konvergenten Folge  $f$  ist konvergent mit  $\lim \tilde{f} = \lim f$ .
- 2.2.3** (b) Besitzt eine Folge  $f$  eine divergente Teilfolge oder zwei konvergente Teilfolgen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{\tilde{f}}$  mit  $\lim \tilde{f} \neq \lim \tilde{\tilde{f}}$ , so ist  $f$  divergent.

### Beispiele

- (a)  $(\frac{1}{n^2})$  ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ .

Dies folgt aus der Konvergenz von  $\left(\frac{1}{n}\right)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  und der strengen Monotonie der Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n^2$ , wegen  $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{\alpha(k)}$ .

(b)  $((-1)^n)$  ist divergent.

Die Abbildungen  $\alpha, \beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\alpha(n) := 2n$ ,  $\beta(n) := 2n - 1$ , sind streng monoton,  $((-1)^{\alpha(n)}) = ((-1)^{2n}) = \hat{1}$  konvergent gegen 1, aber  $((-1)^{\beta(n)}) = ((-1)^{2n-1}) = -\hat{1}$  konvergent gegen  $-1 \neq 1$ .

#### 4. Beschränkte Folgen

**2.1.3** Eine reelle Folge  $f = (a_n)$  heißt **beschränkt**, falls  $f(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist, d.h.

$$\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

**2.1.10** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

In umgekehrter Richtung gilt das

#### 2.2.5 Monotoniekriterium

Ist eine beschränkte Folge  $f = (a_n)$  entweder  
 monoton wachsend, d.h.  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 oder  
 monoton fallend, d.h.  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 dann ist  $f$  konvergent.

und, da jede reelle Folge eine monotone Teilfolge besitzt (2.2.7), der

#### Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Eine beschränkte Folge kann durchaus mehrere (ja sogar unendlich viele) konvergente Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten besitzen. Es bezeichne daher  $V_f$  die Menge der Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge  $f$ , d.h.

$$V_f := \{\lim \tilde{f} \mid \tilde{f} \text{ konvergente Teilfolge von } f\}.$$

**Ü 2.2.1** Die Elemente von  $V_f$  nennt man **Verdichtungspunkte** von  $f$ .

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gilt  $V_f \neq \emptyset$  und man kann zeigen, daß  $V_f$  sowohl ein Maximum als auch ein Minimum besitzt. Man definiert daher

$$\limsup f := \max V_f, \text{ den } \mathbf{Limes superior} \text{ von } f,$$

$\liminf f := \min V_f$ , den **Limes inferior** von  $f$

und es gilt für jede beschränkte Folge  $f$

$$f \text{ ist konvergent} \iff \limsup f = \liminf f;$$

ist dies der Fall so gilt

$$\lim f = \limsup f = \liminf f.$$

## 5. Cauchy-Folgen

In vielen Fällen taugen die bisherigen Ergebnisse nicht zur Beantwortung der Frage nach der Konvergenz einer Folge. Dies gilt insbesondere dann, wenn man den Grenzwert nicht erraten kann und auch das Monotoniekriterium versagt.

Ein solches Beispiel ist die Folge  $f = (a_n)$  mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{1}{1 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

also  $f = (1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots)$ .

Es ist  $a_1 \in [1, \frac{3}{2}]$ , und falls  $a_n \in [1, \frac{3}{2}]$  gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt

$$1 \leq 1 + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{3}{2}, \quad \text{also } a_{n+1} \in [1, \frac{3}{2}].$$

Daraus lesen wir ab:  $(a_n)$  ist wohldefiniert und es gilt  $f(\mathbb{N}) \subset [1, \frac{3}{2}]$ , d.h.  $f$  ist beschränkt.

Wegen  $1 < \frac{3}{2} > \frac{7}{5} < \frac{17}{12} \dots$  liegt keine Monotonie vor.

Wäre  $f$  konvergent, sagen wir gegen  $a \in \mathbb{R}$ , so gäbe es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  gilt  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , also insbesondere

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{d.h.}$$

$(a_{n+1} - a_n)$  wäre notwendigerweise eine Nullfolge.

Wir überprüfen dies:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{1}{1 + a_n} - \left(1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}\right) = \frac{1}{1 + a_n} - \frac{1}{1 + a_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n-1} - a_n}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})}, \quad \text{also wegen } a_n, a_{n-1} \geq 1: \end{aligned}$$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4} |a_n - a_{n-1}| \leq \dots \leq \frac{1}{4^{n-1}} |a_2 - a_1| = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2^n}.$$

Daraus läßt sich nun leicht ablesen: Ja,  $(a_{n+1} - a_n)$  ist eine Nullfolge.

Leider ist dies keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von  $f$ , denn z.B. ist die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , d.h. die Teilsummenfolge  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$ , divergent (wie wir noch sehen werden), obwohl

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es genügt hier also nicht, die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder zu untersuchen. Aber :

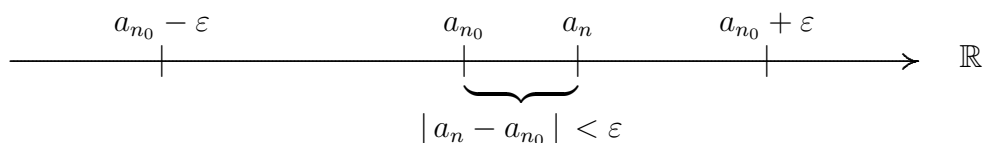
Wie verhält sich  $|a_n - a_m|$  für wachsende  $n, m \in \mathbb{N}$ ?

Wir nehmen  $n > m$  an und schätzen ab :

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=1}^{n-m} (a_{m+k} - a_{m+k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-m} |a_{m+k} - a_{m+k-1}| \\ &< \sum_{k=1}^{n-m} \frac{1}{2^{m+k-1}} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-m}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) \leq \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Da  $(\frac{1}{m})$  eine Nullfolge ist, können wir durch Erhöhung der Indexschränke  $m$   $|a_n - a_m|$  beliebig klein machen, d.h.  $f$  ist eine

**2.2.8 Cauchy-Folge:**  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon)$ .



Die Definition besagt nicht, daß sich die Folge bei  $a_{n_0}$  „häuft“. Vielmehr ist  $n_0$  bei kleiner gewähltem  $\varepsilon$  möglicherweise größer zu wählen, so daß sich  $a_{n_0}$  ändert.

**1.1.9(i)** Offensichtlich ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.

Für *reelle* Folgen gilt aufgrund der Vollständigkeit der reellen Zahlen sogar das

**2.2.10 Cauchy-Kriterium**

*Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Damit ist unser Beispiel  $f$  eine konvergente Folge.

Hingegen ist die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  keine Cauchy-Folge.

Wählt man  $\varepsilon := \frac{1}{4}$ , so gibt es zu jedem  $n_0 \in \mathbb{N}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  und

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon = \frac{1}{4}, \text{ nämlich z.B. } n := 2n_0 :$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2n_0} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

Folglich ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent.

Bleibt noch zu klären: Wie lautet der Grenzwert unserer Folge  $f$ ?

Dazu benötigen wir einige der

## 6. Rechenregeln für konvergente Folgen und Grenzwerte

Seien  $f = (a_n)$ ,  $g = (b_n)$  konvergente Folgen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(1)  $f + g = (a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$ .

(2)  $\alpha f = (\alpha a_n)$  ist konvergent und  $\lim(\alpha f) = \alpha \lim f$ .

(3)  $fg = (a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim(fg) = \lim f \cdot \lim g$ .

(4) Falls  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim g \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent und

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

(5) Falls  $a_n \leq b_n$  für fast alle (d.h. alle bis auf höchstens endlich viele)  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\lim f \leq \lim g$ .

(6) Falls  $\lim f = \lim g$  und  $h = (c_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $h$  konvergent und  $\lim h = \lim f = \lim g$ .

(7)  $|f| = (|a_n|)$  ist konvergent und  $\lim |f| = |\lim f|$ .

Wir wollen nun den Grenzwert  $a$  der Folge  $f = (a_n)$  mit

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

bestimmen.

Nach dem Konvergenzkriterium für Teilfolgen ist  $(a_{n+1})$  als Teilfolge von  $f = (a_n)$  konvergent mit demselben Grenzwert  $a$ .

Bezeichnet  $\hat{1}$  die Folge  $(b_n)$  mit  $b_n := 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so liefern die Rechenregeln

(1) und (4)

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 + a_n}\right) = \lim \left(\hat{1} + \frac{\hat{1}}{\hat{1} + f}\right) \\ &= \lim \hat{1} + \frac{\lim \hat{1}}{\lim \hat{1} + \lim f} = 1 + \frac{1}{1 + a}, \end{aligned}$$

woraus  $1 = (1 + a)(a - 1) = a^2 - 1$ , also  $a^2 = 2$  folgt.

Es gilt also  $a = \sqrt{2}$  oder  $a = -\sqrt{2}$ .

Da aber  $a_n \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt nach (5)  $a = \lim f \geq 1$ , also  $a = \sqrt{2}$ .

**Anmerkung.** Wegen  $a_n \in \mathbb{Q}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  kann man  $f$  auch als *rationale* Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  auffassen. Als solche bleibt  $f$  weiterhin eine Cauchy-Folge, ist jetzt aber nicht mehr konvergent, da  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,  $f$  also keinen Grenzwert in  $\mathbb{Q}$  besitzt. Konsequenz:

Ersetzt man in der Theorie  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{Q}$ , so gilt das Cauchy-Kriterium nicht mehr.  $\mathbb{Q}$  ist – im Gegensatz zu  $\mathbb{R}$  – nicht vollständig.

## A.3 Reihen

### 1. Reihen

**2.3.1** Sei  $f = (a_n)$  eine reelle Folge.

Dann ist  $\sum f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere reelle Folge.

Folgen dieser Bauart nennt man **Reihen**.

Die  $a_n$  heißen **Glieder der Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , während man die Folgenglieder der

Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, \sum_{k=1}^n a_k, \dots,$$

**Teilsummen** oder **Partialsommen** von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nennt.

Falls  $m \in \mathbb{Z}$  und  $a_n \in \mathbb{R}$  für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \geq m$  gilt, setzt man

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{m-1+n}.$$

Übrigens ist nicht nur jede Reihe eine Folge, sondern auch jede Folge  $g = (b_n)$  eine Reihe  $\sum f$  :  
Definiere

$$a_1 := b_1, a_{n+1} := b_{n+1} - b_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für  $f := (a_n)$   $\sum f = g$ .

Das Thema „Reihen“ ist also nur eine Variation des Themas „Folgen“, alle Definitionen und Sätze von Folgen übertragen sich somit auf Reihen und umgekehrt. Allerdings gibt es einige Konvergenzkriterien, die der speziellen Bauart der Reihen angepaßt sind, für Folgen jedoch recht unhandlich wären. Dies rechtfertigt u.a. eine besondere Untersuchung von Reihen.

## 2. Konvergenz bzw. Divergenz

**2.3.2** Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt also **konvergent** (gegen  $s$ ), wenn die Folge  $(s_n)$  der Teilsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  konvergent (gegen  $s$ ) ist.  
 $s$  heißt dann **Reihenwert**.

Ist dies der Fall, so hat sich unglücklicherweise die Schreibweise

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := s$$

eingebürgert, so daß das Symbol  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in zweifacher Bedeutung auftritt: als Reihe (= Teilsummenfolge)  $\sum f = (s_n)$  oder – im Falle der Konvergenz – als Reihenwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  von  $\sum f = (s_n)$ .

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **divergent**, wenn die Folge  $(s_n)$  der Teilsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  divergent ist.

**Beispiele** (die man parat haben sollte)

(i) Die **harmonische Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent (mit Reihenwert  $\frac{\pi^2}{6}$ ).

(iii) Die **geometrische Reihe**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist konvergent mit Reihenwert  $\frac{1}{1-q}$ , falls

$|q| < 1$ , aber divergent, falls  $|q| \geq 1$ .

Für die Teilsummen von  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} n & \text{falls } q = 1, \\ \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{falls } q \neq 1. \end{cases}$$

(iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  ist konvergent. Der Reihenwert  $e$  heißt **Eulersche Zahl**.

### 3. Konvergenzbedingungen

Für einen Test auf Divergenz einer Reihe eignet sich häufig folgende

#### 2.3.5 Notwendige Konvergenzbedingung

Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

Die Umkehrung hiervon gilt i.a. nicht, vgl. z.B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Es gilt immerhin das

#### 2.3.8 Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergent.

#### 2.3.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n_0+1}^n a_k \right| < \varepsilon)$$

Eine Reihe, deren Reihenglieder alle nicht negativ sind, ist als Teilsummenfolge monoton wachsend. Nach dem Monotoniekriterium genügt daher zum Nachweis der Konvergenz der Reihe der Nachweis einer oberen Schranke (Beschränktheit) der Teilsummenfolge. Dies legt den Begriff der absoluten Konvergenz nahe und führt zu einer Reihe von Konvergenzkriterien.

**2.3.7**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent**:  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ist konvergent.

Wegen  $\left| \sum_{k=n_0+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^n |a_k|$  (Dreiecksungleichung) folgt nach dem Cauchy-Kriterium aus der absoluten Konvergenz einer Reihe stets die Konvergenz.

Die Umkehrung hiervon gilt i.a. nicht, vgl. z.B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ .

### 2.4.1 Majoranten-/Minorantenkriterium

Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $|a_n| \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

(i) Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

(ii) Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent, dann ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent.

### 2.4.2 Wurzelkriterium

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe. Dann gilt:

(i) Existieren  $C \in \mathbb{R}$  und  $q \in [0, 1[$  mit  $|a_n| \leq Cq^n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

(ii) Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , so ist (i) erfüllt, also  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

### 2.4.3 Quotientenkriterium

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe mit  $a_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

(i) Existiert  $q \in ]0, 1[$  mit  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

(ii) Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , so ist (i) erfüllt, also  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

#### 4. Rechnen mit konvergenten Reihen und Reihenwerten (Auswahl)

**2.3.4** Seien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergente Reihen,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  ist konvergent und es gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (aa_n)$  ist konvergent und es gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} (aa_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(iii) Gilt  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

#### 5. Potenzreihen

Reihen dienen nicht zuletzt dazu, mittels Grenzwertbildung aus einfachsten Bausteinen, nämlich Potenzen  $x^n$  bzw.  $(x - a)^n$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) und Koeffizienten  $a_n \in \mathbb{R}$  neue reelle Funktionen mit ‚guten‘ Eigenschaften aufzubauen. Dies führt zum Begriff einer Potenzreihe.

##### 5.3.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^0}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

**Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $a$  und Koeffizienten  $a_n$ .**

##### Beispiele

(i) *Geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(ii) *Exponentialfunktion*

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Die geometrische Reihe ist konvergent für  $x \in ]-1, 1[$ . Die Reihe, die die Exponentialfunktion beschreibt, konvergiert für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Dies ist klar für  $x = 0$  und folgt für  $x \neq 0$  nach dem Quotientenkriterium:

$$\frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen wird durch den folgenden Satz beschrieben.

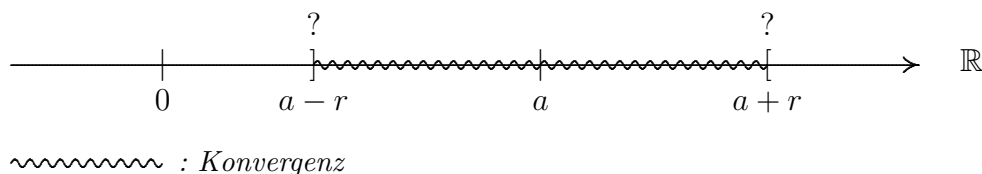
**5.3.2 Satz (Konvergenzradius)**

Zu (\*) gibt es genau ein  $r \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ , mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < r \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n \text{ absolut konvergent}$$

$$(2) \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| > r \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n \text{ divergent}$$

Dieses  $r$  heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe (\*).



Der Konvergenzradius einer Potenzreihe (\*) lässt sich wie folgt berechnen.

**5.3.3 Satz (Hadamard)**

(1) Falls  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  unbeschränkt ist, so gilt  $r = 0$ .

(2) Falls  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  gegen 0 konvergiert, so ist  $r = \infty$ .

(3) Falls  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  beschränkt und keine Nullfolge ist, so ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Der Konvergenzradius lässt sich vielfach auch durch folgendes Verfahren bestimmen.

**Ü 5.3.1** Falls  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}^0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  existiert, so gilt

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ , so gilt  $r = \infty$ .

Wir wenden dies auf unsere beiden Beispiele an.

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n : a = 0, a_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}^0$ .

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} : a = 0, \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0,$$

also  $r = \infty$ .

**Bemerkung.** Über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe in den Endpunkten  $a+r$  bzw.  $a-r$  des Konvergenzintervalls  $]a-r, a+r[$  (im Fall  $r < \infty$ ) kann man keine allgemeine Aussage machen.

### Ü 5.3.2 Beispiele

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Es gilt  $r = 1$  (s.o.). Für  $x = 1$ ,  $x = -1$  ist die Reihe divergent, da in diesen Fällen die Reihenglieder keine Nullfolgen bilden.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Es gilt  $r = 1$ , denn

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(5.3.4(i))} 1^2 = 1.$$

Die Reihe konvergiert auch für  $x = 1$  und  $x = -1$  (vgl. 2.2.6(i)).

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Es gilt  $r = 1$ , denn

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Für  $x = 1$  ist die Reihe divergent (harmonische Reihe) (vgl. 2.2.11(i)), für  $x = -1$  ist die Reihe konvergent (vgl. 2.2.11(ii)).

## B. Differentialrechnung

### B.1 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Begriff der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion.

Dazu sollten Sie aus Kurseinheit 3 die Abschnitte 3.2 (Stetigkeit) und 3.3 (Stetige Fortsetzung, Grenzwerte von Funktionen) sicher beherrschen.

#### 1. Begriff der Differenzierbarkeit

##### Differenzierbarkeit

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , eine Funktion. Sei  $a \in D$  Häufungspunkt\* von  $D$ . Differenzierbarkeit der Funktion  $f$  in  $a$  bedeutet ‚gute‘ Approximierbarkeit von  $f$  in  $a$  durch eine Gerade (‚Tangente‘).

$$4.1.4 \quad f \text{ in } a \text{ differenzierbar} \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert}$$

$$\iff \exists b \in \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$$

$$\stackrel{3.3.5}{\iff} \exists b \in \mathbb{R}, \text{ so daß für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{a\}$$

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = b$$

$b$  ist dann eindeutig bestimmt und heißt **Ableitung (Differentialquotient)** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

**Bezeichnung.**  $b = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$

Wir haben dann die folgende Approximationseigenschaft.

$$4.1.1 \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x), \quad x \in D,$$

mit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = 0,$

d.h.  $r(x)$  geht für  $x$  gegen  $a$  schneller gegen 0 als  $x - a$ .

---

\*Wichtige Beispiele von Definitionsbereichen  $D$ , für die jedes  $a \in D$  Häufungspunkt von  $D$  ist:

Intervalle:  $\mathbb{R}, ]c, \infty[, [c, \infty[, ] - \infty, c[, ] - \infty, c]$

$]c, d[, [c, d[, ]c, d], [c, d]$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$  und  $c < d$

punktierte reelle Achse:  $\mathbb{R} \setminus \{c\}$  mit  $c \in \mathbb{R}$

**4.1.2 Definition (Ableitung)**

$f$  heißt (auf  $D$ ) **differenzierbar**, wenn  $f$  für alle  $a \in D$  differenzierbar ist.

Die Funktion

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f'(x),$$

heißt dann **Ableitung** von  $f$ .

Wiederholung des Prozesses führt dann gegebenenfalls, d.h. wenn  $f'$  usw. ebenfalls differenzierbar ist, zu **höheren Ableitungen**  $f'', f''', \dots, f^{(n)}$ .

$n$ -malige Differenzierbarkeit in einem Punkt bedeutet dann ‚gute‘ Approximierbarkeit durch ein Polynom  $n$ -ten Grades, das sogenannte Taylor-Polynom.

**4.3.7 Definition (Taylor-Polynom)**

Sei  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $a \in D$  ( $n \geq 1$ ). Dann heißt  $T_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das  $n$ -te **Taylor-Polynom** von  $f$  mit **Entwicklungspunkt**  $a$ .

Dabei setzen wir  $f^{(0)}(a) := f(a)$ .

**4.3.8 Satz (Taylor)**

Sei  $I$  ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Sei  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar auf  $I$  ( $n \geq 1$ ). Die  $n$ -te Restfunktion  $R_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x), \quad x \in I.$$

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

**Beispiele**

(1)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^2$ , ist differenzierbar und  $f'(a) = 2a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

*Beweis:*

Sei  $x \neq a$ . Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x+a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a. \quad \square$$

(2)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := |x|$ , ist nicht differenzierbar in  $a = 0$ .

*Beweis:*

Sei  $x \neq 0$ . Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  existiert nicht, denn für die Folge  $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = 1$ , aber für die Folge  $y_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n} = -1$ .  $\square$

## 2. Techniken des Differenzierens

### 4.1.7 Rechenregeln

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in D$ . Dann gilt:

(i)  $f + g$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$\boxed{(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

(ii)  $\alpha f$  ist differenzierbar in  $a$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\boxed{(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)}$$

(iii) **Produktregel**

$fg$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}$$

(iv) **Quotientenregel**

$\frac{f}{g}$  ist differenzierbar in  $a$  falls  $g(x) \neq 0$  für jedes  $x \in D$ , mit

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}}$$

**Spezialfall.**  $f = \hat{1}$ , d.h.  $f(x) = 1$  für jedes  $x \in D$ .

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}}$$

(v) **Kettenregel**

Sei  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$  differenzierbar in  $f(a)$ , dann ist  $h \circ f$  differenzierbar in  $a$  mit

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a))f'(a)$$

### Beispiele

(1) *Produktregel.* Wir differenzieren  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2$ , nach der Produktregel.

$$h = fg \text{ mit } f = g = id, \text{ d.h. } f(x) = g(x) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir benutzen  $f' = \hat{1}$ , d.h.  $f'(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(a) &= (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = 1 \cdot g(a) + f(a) \cdot 1 \\ &= a + a = 2a. \end{aligned}$$

(2) *Quotientenregel.* Sei  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = x^2$ . Dann gilt  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{2a}{(a^2)^2} = -\frac{2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3},$$

d.h.  $(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3}$ ,  $x \neq 0$ .

(3) *Kettenregel.* Seien  $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = h(x) = x^2$ . Dann gilt

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = (x^2)^2 = x^4.$$

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a) = 2f(a) \cdot 2a = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3.$$

(4) *Potenzen.* Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_n(x) = x^n$  haben wir

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Die Rechenregeln erlauben dann die Differentiation von Polynomfunktionen (4.1.8) und rationalen Funktionen (4.1.9). Nimmt man die elementaren Funktionen wie  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$  usw. hinzu (vgl. KE 5), erhält man ein gut gefülltes Beispielreservoir.

## Differentiation der Umkehrfunktion

### 4.1.10 Satz.

Sei  $I$  ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv und stetig auf  $I$ .

Ferner sei  $f$  differenzierbar in  $a \in I$ . Dann ist die Umkehrfunktion \*

$$f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

---

\*Zur Erinnerung: die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist definiert durch  $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

genau dann differenzierbar in  $b := f(a)$ , wenn  $f'(a) \neq 0$  gilt.

Im Fall der Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  im Punkt  $b = f(a)$  gilt

$$\boxed{(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}} \quad (a \in I)$$

bzw. mit  $b = f(a)$ ,  $a = f^{-1}(b)$

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}} \quad (b \in f(I))$$

### Beispiel

Sei  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ;  $f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ . Es gilt  $f'(x) = 2x$ . Daher ist  $f^{-1}$  genau dann in  $x \geq 0$  differenzierbar, falls  $x > 0$ , und es gilt für  $x > 0$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

d.h.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

## 3. Theorie der Differenzierbarkeit

### Mittelwertsätze

*Voraussetzung*

Sei  $I = [a, b]$  mit  $a < b$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I$ , differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I} = ]a, b[$ .

Dann gilt:

#### 4.2.1 Satz von Rolle

Falls  $f(a) = f(b)$ , so existiert mindestens ein  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

#### 4.2.2 Satz (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Es existiert mindestens ein  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**4.2.5 Der 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung** verallgemeinert den 1. Mittelwertsatz. Von  $b - a$  geht man über zu  $g(b) - g(a)$  mit einer Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig auf  $I = [a, b]$ , differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I}$  und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in \overset{\circ}{I}$ .

## 4. Anwendungen

**Vereinbarung.** Im Abschnitt B.1.4 sei  $I$  ein nicht triviales Intervall, d.h. ein Intervall mit mehr als einem Punkt.  $\overset{\circ}{I}$  bezeichne das **Innere** von  $I$ , d.h. das Intervall

$I$  ohne die Endpunkte.

#### 4.2.3 Satz (Charakterisierung konstanter Funktionen)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I$ , differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I}$ . Ist  $f'(x) = 0$  für jedes  $x \in \overset{\circ}{I}$ , so ist  $f$  konstant.

*Beweis:*

Seien  $c, d \in I$ ,  $c < d$ . Betrachte die Einschränkung  $f|_{[c,d]} : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  auf das Intervall  $[c,d]$ . Dann existiert nach dem 1. Mittelwertsatz ein  $\xi \in ]c,d[$  mit

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(\xi) = 0,$$

also  $f(d) = f(c)$ .  $\square$

#### 4.2.4 Satz (Charakterisierung der differenzierbaren monotonen Funktionen)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt:

- (1)  $f$  monoton wachsend  $\iff f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$
- (2)  $f$  monoton fallend  $\iff f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in I$
- (3)  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I \implies f$  streng monoton wachsend
- (4)  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in I \implies f$  streng monoton fallend

**Bemerkung.** In (3) bzw. (4) gilt die Umkehrung  $\Leftarrow$  nicht.

#### Beispiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , ist streng monoton wachsend, aber wegen  $f'(x) = 3x^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f'(0) = 0$ .

*Beweis von (3):*

Seien  $x, y \in I$  mit  $x < y$ . Betrachte die Einschränkung  $f|_{[x,y]} : [x,y] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann existiert nach dem 1. Mittelwertsatz ein  $\xi \in ]x,y[$  mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0.$$

Da  $y - x > 0$ , folgt  $f(y) - f(x) > 0$ , d.h.  $f(y) > f(x)$ .  $\square$

Aus dem 2. Mittelwertsatz gewinnt man die

**Regel von de l'Hospital zur Bestimmung von Grenzwerten der Form  $\frac{0}{0}$**

#### 4.2.6 Satz

Sei  $a$  Häufungspunkt von  $I$ , seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $I \setminus \{a\}$  mit

$g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I \setminus \{a\}$ . Falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad *$$

und

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c,$$

dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

### Beispiel

Wir betrachten  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$  für  $x \neq 1, -1$  und wollen den Grenzwert für  $x \rightarrow -1$

berechnen. Wir definieren  $I := ] - \infty, 0[$ ,

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = x^2 - 1; a := -1.$$

$f$  und  $g$  sind stetig und es gilt

$$f(a) = f(-1) = 0, g(a) = g(-1) = 0; f'(x) = 2x + 2, g'(x) = 2x.$$

Es gilt  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Nach de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{2x} = \frac{0}{-2} = 0 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

*Bemerkung.* Man kann diese einfache Aufgabe natürlich auch direkt lösen.

Für  $x \neq 1, -1$  gilt:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{0}{-2} = 0.$$

## Lokale Extrema

### 4.3.12 Definition

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D \subset \mathbb{R}$ .

$f$  hat in  $a$  ein **lokales Minimum** (bzw. **lokales Maximum**), wenn es eine Umgebung  $U$  von  $a$  gibt mit

$$f(a) = \min f(U \cap D) \quad (\text{bzw. } f(a) = \max f(U \cap D)),$$

d.h.  $f(x) \geq f(a)$  für alle  $x \in U \cap D$

(bzw.  $f(x) \leq f(a)$  für alle  $x \in U \cap D$ ).

---

\*Achtung! Bei der Anwendung der Regel von de l'Hospital darf man nicht vergessen, diese Bedingungen nachzuprüfen.

**4.3.13 Notwendige Bedingung**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ein Intervall,  $f$  differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I}$ . Hat  $f$  in  $a \in \overset{\circ}{I}$  ein lokales Extremum, dann gilt

$$f'(a) = 0.$$

**4.3.14 Hinreichende Bedingung**

Falls  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I}$  ist und  $f'(a) = 0$  für  $a \in \overset{\circ}{I}$ , dann gilt:

$$f''(a) > 0 \implies f \text{ hat lokales Minimum in } a$$

$$f''(a) < 0 \implies f \text{ hat lokales Maximum in } a.$$

**Anwendung**

Bestimmung von Minimum und Maximum einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

*Aufgabe.* Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^2 - 14x + 48.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$  sowie  $\max f([6, 10])$  und  $\min f([6, 10])$ .

*Lösung.* Wir bestimmen zunächst die lokalen Extrema. Dazu stellen wir fest, daß  $f$  zweimal differenzierbar ist mit

$$f'(x) = 2x - 14, \quad f''(x) = 2.$$

Wir setzen  $f'(x) = 2x - 14 = 0$  und erhalten  $x = 7$ . Da  $f''(7) > 0$ , hat  $f$  in  $x = 7$  ein lokales Minimum. Dies ist das einzige lokale Extremum von  $f$ .

$f$  ist stetig. Also nimmt  $f$  auf  $[6, 10]$  nach dem Satz von Weierstraß (3.5.3) Maximum und Minimum an. Dies kann in einem Punkt aus dem Innern von  $[6, 10]$ , d.h. aus  $]6, 10[$  geschehen oder in einem Randpunkt, d.h. im Punkt 6 oder im Punkt 10. Im ersten Fall handelt es sich zugleich um ein lokales Extremum von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Hierfür kommt also nur der Punkt 7 in Frage. Als Punkte, in denen die Funktion  $f$  auf  $[6, 10]$  ihr Maximum bzw. Minimum annimmt, kommen also höchstens die Punkte 6, 7, 10 in Frage.

Wir berechnen die Funktionswerte.

$$f(6) = 36 - 84 + 48 = 0$$

$$f(7) = 49 - 98 + 48 = -1$$

$$f(10) = 100 - 140 + 48 = 8$$

Wir lesen ab: im Punkt 6 wird weder Maximum noch Minimum angenommen, also bleiben die Punkte 7 und 10 als Punkte, in denen Maximum und Minimum angenommen werden, übrig. Wir lesen an den Funktionswerten ab: in 7 nimmt die Funktion  $f$  auf  $[6, 10]$  ihr Minimum, nämlich  $-1$ , an, in 10 ihr Maximum, nämlich 8.

## 5. Differentiation von Potenzreihen

### 5.3.7 Satz

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ,  $a, a_n \in \mathbb{R}$ , eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ .  
Dann ist

$$f : U_r(a) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

differenzierbar, und die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1} \text{ für alle } x \in U_r(a).$$

Dabei ist  $U_r(a) = ]a-r, a+r[$ , falls  $r < \infty$ , und  $U_r(a) = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ .

### Beispiel

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp' x = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x.$$

Für die höheren Ableitungen einer Potenzreihenfunktion erhält man

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n(x-a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} k! \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n(x-a)^{n-k} \text{ für } x \in U_r(a). \end{aligned}$$

Speziell für  $x = a$  ergibt sich

$$f^{(k)}(a) = k! \binom{k}{k} a_k = k! a_k,$$

also 
$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

(Diese Formel gilt auch für  $k = 0$ .)

## B.2 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

### 1. Begriff der Differenzierbarkeit

#### 8.1.1 Definition (Differenzierbarkeit)

Sei  $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen, sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.

Dann heißt  $f$  **differenzierbar** \* in  $a$ , wenn es eine lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt, so daß für die Restabbildung  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die durch

$$r(x) := f(x) - f(a) - T(x - a) \quad (x \in D)$$

definiert ist, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0.$$

Dabei ist für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \in \mathbb{R} \text{ der Betrag von } x.$$

Die lineare Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist dann eindeutig bestimmt und heißt

#### 8.1.2 Ableitung (Differential) von $f$ an der Stelle $a$ .

**Notation.**  $T =: Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Im Fall der Differenzierbarkeit der Funktion  $f$  in  $a$  hat man also die folgende Approximation von  $f$  mit Hilfe der linearen Abbildung  $T = Df(a)$  :

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + r(x) \quad (x \in D)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0.$$

---

\*Gelegentlich sagt man auch,  $f$  ist *total* differenzierbar in  $a$ .

## Erinnerung an die Lineare Algebra

Nach Teil I, 6.2.1 hat man einen Vektorraumisomorphismus

$$l : \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$A \longmapsto l(A) = l_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto l_A(x) = Ax$$

zwischen dem Vektorraum der  $m \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$  und dem Vektorraum der Homomorphismen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Die Umkehrabbildung von  $l$  ordnet einer linearen Abbildung  $T$  ihre Matrix  $M_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(T)$  bezüglich der geordneten Standardbasen  $\mathcal{E}^{(n)}$  von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathcal{E}^{(m)}$  von  $\mathbb{R}^m$  zu (vgl. Teil I, 6.1.6).

Ist (wie oben)  $f$  differenzierbar in  $a$  mit Ableitung  $T = Df(a)$ , dann heißt die Matrix von  $Df(a)$  bezüglich der geordneten Standardbasen  $\mathcal{E}^{(n)}$  von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathcal{E}^{(m)}$  von  $\mathbb{R}^m$  die **Funktionalmatrix (Jacobische Matrix)** von  $f$  in  $a$  und wird mit  $f'(a)$  bezeichnet.

$$f'(a) := M_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(Df(a)) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Nach Teil I, 6.2.1 gilt für  $A = f'(a)$

$$l_A = l(A) = lM_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(Df(a)) = Df(a),$$

d.h.  $Df(a)$  ist gegeben durch Multiplikation mit der Matrix  $A = f'(a)$ . Wir haben also die Approximation

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x) \quad (x \in D)$$

mit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0$ , wobei  $f'(a)$  die Funktionalmatrix von  $f$  an der Stelle  $a$  bezeichnet und  $f'(a)(x - a)$  das Matrizenprodukt von  $f'(a) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  und  $(x - a) \in \mathbb{R}^n$  ist.

## Beispiele

(1) *Konstante Funktionen*

Für jedes  $c \in \mathbb{R}^m$  ist die konstante Funktion

$$\hat{c} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \hat{c}(x) = c \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n$  mit

$$D\hat{c}(a) = \hat{0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

da

$$\hat{c}(x) = c = \hat{c}(a) + \hat{0}(x - a) + r(x)$$

mit  $r(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

(2) *Lineare Abbildungen*

Sei  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $T := l_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , d.h.  $T(x) = Ax$ . Dann ist  $T$  in jedem  $a \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar. Da  $T(x - a) = T(x) - T(a)$  wegen der Linearität von  $T$ , gilt

$$T(x) = T(a) + T(x - a) + r(x)$$

mit  $r(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Es folgt

$$DT(a) = T.$$

Für die Funktionalmatrix  $T'(a)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} T'(a) &= M_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(DT(a)) = M_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(T) \\ &= M_{\mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{E}^{(n)}}(l_A) = A \end{aligned}$$

(vgl. Teil I, 6.2.1), folglich

$$T'(a) = A.$$

(3) *Affine Abbildungen* (Verallgemeinerung von (2))

Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **affin**, falls  $f$  die Gestalt hat

$$f(x) = Ax + b$$

mit  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ .

(Anmerkung. Der Spezialfall  $b = 0$  liefert die linearen Abbildungen.)

Eine affine Abbildung ist in jedem  $a \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= Ax + b - (Aa + b) \\ &= Ax + b - Aa - b \\ &= Ax - Aa \\ &= A(x - a), \end{aligned}$$

folglich

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + r(x)$$

mit  $r(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), daher

$$f'(a) = A.$$

Es stellt sich jetzt die Frage:

*Was sind die Einträge in der Funktionalmatrix  $f'(a)$ ?*

Die Beantwortung dieser Frage führt auf den Begriff der partiellen Ableitung.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall  $m = 1$ .

### 8.2.1 Definition (partielle Ableitungen)

Sei  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Sei  $a \in D$ ,  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, daß  $U_\varepsilon(a) \subset D$ . Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Dann heißt  $f$  in  $a$  **nach der  $k$ -ten Koordinate partiell differenzierbar**, wenn die Funktion

$$]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

an der Stelle  $a_k$  differenzierbar ist. Die Ableitung dieser Funktion an der Stelle  $a_k$  heißt dann **partielle Ableitung von  $f$  in  $a$  nach der  $k$ -ten Koordinate** und wird mit

$$D_k f(a), \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \text{ oder } f_{x_k}(a)$$

bezeichnet.

$f$  heißt in  $a$  **partiell differenzierbar**, wenn  $f$  in  $a$  nach jeder Koordinate partiell differenzierbar ist.

**8.2.2** Ist  $f$  differenzierbar in  $a \in D$ , dann ist  $f$  in  $a$  partiell differenzierbar.

Für den Zeilenvektor  $f'(a) \in \text{Mat}_{1,n}(\mathbb{R})$  gilt

$$f'(a) = (D_1 f(a) \ D_2 f(a) \ \cdots \ D_n f(a)).$$

$f'(a) =: \text{grad} f(a)$  heißt **Gradient** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

### 8.2.4 Satz

Sei  $a \in D$ ,  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung,

$$x \rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Dann gilt:

- (i)  $f$  differenzierbar in  $a \iff$   
 alle Komponentenfunktionen  $f_\mu, \mu = 1, \dots, m$ , sind differenzierbar in  $a$
- (ii)  $f$  differenzierbar in  $a \implies$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad} f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

Die Funktionalmatrix ist also gerade die Matrix

$$(D_\nu f_\mu(a))_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=1,\dots,n}}$$

der partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen von  $f$ .

## 2. Techniken des Differenzierens

Wir beschränken uns hier auf die Kettenregel. Der Übersichtlichkeit wegen formulieren wir sie in einer speziellen Situation.

### 8.1.5(iii) Satz (Kettenregel)

Seien  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen. Ist  $f$  differenzierbar in  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $g$  differenzierbar in  $f(a) \in \mathbb{R}^m$ , dann ist auch  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar in  $a$  mit

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Für die Funktionalmatrizen bedeutet dies

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a),$$

wobei die rechte Seite das Matrizenprodukt von  $g'(f(a))$  und  $f'(a)$  ist.

## 3. Liste zentraler Sätze der Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

### Definition

Sei  $a \in D$ ,  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  **stetig differenzierbar** in  $a$ , wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $a$  mit  $U \subset D$  gibt, so daß gilt:

- Für jedes  $k = 1, \dots, n$  und für jedes  $x \in U$  existieren die partiellen Ableitungen  $D_k f(x)$ .
- Für jedes  $k = 1, \dots, n$  ist die Abbildung

$$D_k f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow D_k f(x)$$

in  $a$  stetig.

**8.2.3 Satz (partielle und totale Differenzierbarkeit)**

Ist  $f$  stetig differenzierbar in  $a$ , dann ist  $f$  (total) differenzierbar in  $a$ .

**8.2.5 Iteration des Prozesses der partiellen Differentiation führt zum Begriff der partiellen Ableitung der Ordnung  $k \geq 1$** 

$$D_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} f(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_k} \dots \partial x_{\nu_1}}(a) = f_{x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_k}}(a)$$

und zum Begriff  $k$ -mal stetig differenzierbar in  $a$ .

**8.2.8 Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen)**

Im Fall  $k$ -mal stetiger Differenzierbarkeit ist die Reihenfolge, in der die partiellen Differentiationen  $D_{\nu_1 \dots \nu_k} f(a)$  durchgeführt werden, gleichgültig.

**8.1.8 Satz (notwendige Bedingung für lokale Extrema)**

Sei  $a \in D$ ,  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.

Dann gilt:

$$f \text{ hat in } a \text{ ein lokales Extremum} \implies f'(a) = 0.$$

**8.2.10 Satz**

Sei  $a \in D$ ,  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar mit  $f'(a) = 0$ .

Betrachte

$$\Delta(a) := D_{11}f(a)D_{22}f(a) - (D_{12}f(a))^2,$$

d.h.\*

$$\Delta(a) = \det(D_{ij}f(a))_{i,j=1,2} = \det \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

Falls  $\Delta(a) > 0$ , so hat  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum:

- ein lokales Minimum, falls  $D_{11}f(a) > 0$
- ein lokales Maximum, falls  $D_{11}f(a) < 0$ .

Falls  $\Delta(a) < 0$ , so hat  $f$  in  $a$  kein lokales Extremum.

**Der Fall  $m = n$ .**

Sei  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $a$ . Dann ist  $f'(a)$  eine quadratische Matrix,  $f'(a) \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .

\*Man beachte  $D_{12}f(a) = D_{21}f(a)$  aufgrund des Satzes von Schwarz.

**8.3.2 Satz (lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen)**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit

$$\det f'(a) \neq 0.$$

Dann existiert lokal eine Umkehrabbildung zu  $f$ , d.h. es gibt offene Umgebungen

$$U \text{ von } a, V \text{ von } b := f(a) \text{ mit } V = f(U),$$

so daß die Einschränkung

$$f|_U : U \rightarrow V = f(U)$$

bijektiv ist.

Die Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$  von  $f|_U$  ist stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(f(a)) = g'(b) = (f'(a))^{-1},$$

d.h.  $g'(f(a))$  ist die inverse Matrix zu  $f'(a)$ .

Anwendungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit führen zu folgenden Sätzen.

**8.3.6 Satz über implizit definierte Abbildungen****8.3.7 Satz über Extrema mit Nebenbedingungen  
(Multiplikatoren-Methode von Lagrange)**

## C. Integralrechnung

### C.1 Der Inhaltsbegriff

#### Definition

**8.4.1** Eine Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Quader**, wenn es Intervalle  $I_1, \dots, I_n$  gibt mit  $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ .

In Anlehnung an die Elementargeometrie definiert man den „Inhalt“ *beschränkter* Quader im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 0$ , wie folgt:

**6.1.4**  $n = 1$  : Ein beschränkter Quader im  $\mathbb{R}^1$  ist ein beschränktes Intervall  $I$  (mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ ).

Man setzt dann  $\lambda(I) := \lambda_1(I) := b - a$  und nennt  $\lambda(I) \in \mathbb{R}$  die **Länge des Intervalls**  $I$ .

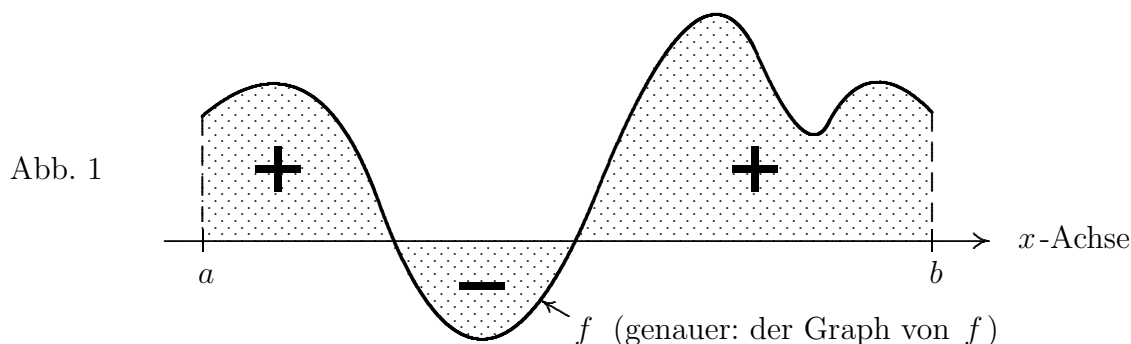
**8.4.1**  $n > 1$  : Ein beschränkter Quader im  $\mathbb{R}^n$  ist ein Quader  $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ , wobei die  $I_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , beschränkte Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind.

Man setzt dann  $\lambda_n(Q) := \lambda(I_1) \cdot \dots \cdot \lambda(I_n) = \prod_{k=1}^n \lambda(I_k) \in \mathbb{R}$  und nennt  $\lambda_n(Q)$  das **Volumen des Quaders**  $Q$  (im Falle  $n = 2$  auch den **Flächeninhalt des Rechtecks**  $Q$ ).

Die Integralrechnung ist entstanden aus dem Bestreben, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen, allgemeiner: den „Inhalt“ (Flächeninhalt im  $\mathbb{R}^2$ , Volumen im  $\mathbb{R}^3$ , ...) einer beliebigen beschränkten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  zu messen. Die Methode der „Inhaltsmessung“, die zum Begriff des *Riemann-Integrals* führt, stellen wir nachfolgend für den Fall reeller Funktionen, die auf einem beschränkten Intervall definiert sind, ausführlich vor. Später werden wir diese Überlegungen weitgehend analog auf reelle Funktionen mit mehreren Veränderlichen ausweiten, uns dabei aber wesentlich kürzer fassen (vgl. Abschnitte C.8 bis C.10).

Die Ausgangssituation präzisieren wir wie folgt:

Sei  $I$  ein Intervall mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ ; sei ferner eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h.  $f \in \mathbf{Abb}(I, \mathbb{R})$ ) gegeben, etwa so:

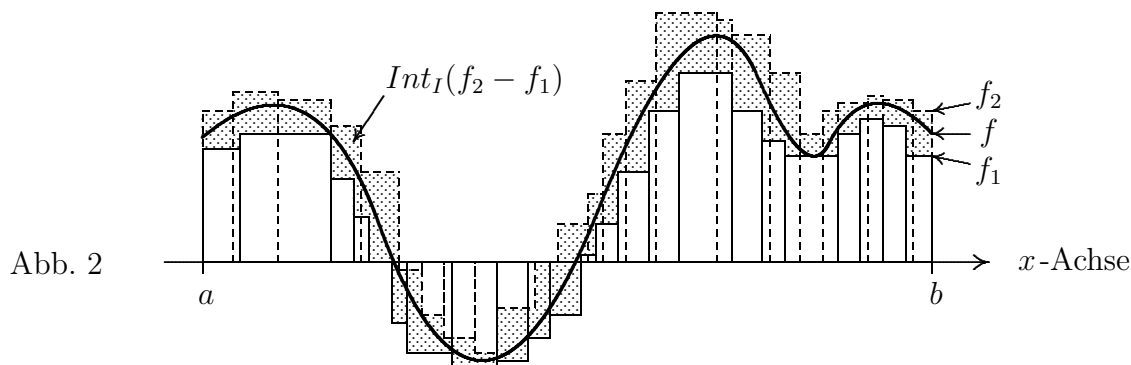


Unser Ziel ist die Bestimmung des Flächeninhalts der schattierten Fläche, wobei der Flächeninhalt unterhalb der  $x$ -Achse ein negatives Vorzeichen erhält (der Ausdruck „Flächeninhalt“ ist also nur bis auf diese Einschränkung zutreffend).

Wir nehmen den Inhalt beschränkter Quader (hier: Rechtecke) – wie oben definiert – zum Ausgangspunkt und versuchen, den zu bestimmenden Flächeninhalt durch

- eine endliche Vereinigung einbeschriebener achsenparalleler Rechtecksflächen von innen
- eine endliche Vereinigung umbeschriebener achsenparalleler Rechtecksflächen von außen

so gut anzunähern, daß die Differenz der Approximation von außen und der Approximation von innen (= Flächeninhalt der schattierten Fläche in Abb. 2; im Unterschied zum eben Gesagten sind hier auch die Inhalte der schattierten Teilflächen unterhalb der  $x$ -Achse positiv zu rechnen!) beliebig klein wird.



Gelingt dies, so nennen wir  $f$  *Riemann-integrierbar*.

Der schöne, weil beschränkte und stetige Funktionsverlauf von  $f$  in unseren Abbildungen täuscht über das Problem hinweg, daß es Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die sich unserer Methode, den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der  $x$ -Achse zu messen, entziehen, also nicht Riemann-integrierbar sind:

### Beispiel 1

(a)  $q_1 : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, q_1(x) := \frac{1}{x};$

(b)  $q_2 : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, q_2(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}.$

$q_1, q_2$  sind nicht Riemann-integrierbar, da beide nicht beschränkt sind und daher weder zu  $q_1$  noch zu  $q_2$  eine endliche Vereinigung umbeschriebener achsenparalleler Rechtecksflächen existiert.

**Beispiel 2** (vgl. Ü 6.1.4)

$$p : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$p$  ist nicht Riemann-integrierbar, da die Differenz einer Approximation von außen und von innen nach der oben beschriebenen Methode nicht beliebig klein wird.

Wir werden bei der Erweiterung des Integralbegriffs in Abschnitt C.7 auf diese Beispiele zurückkommen.

Als nächstes präzisieren wir den angedeuteten Approximationsprozeß:

## C.2 Das Riemann-Integral

Sei  $I$  ein Intervall mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ .

### Definition

**6.1.1** Eine Funktion  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion auf  $I$** , wenn es eine

$$\text{Zerlegung } I = \bigcup_{\rho=1}^r I_\rho$$

in endlich viele disjunkte nichtleere Teilintervalle  $I_\rho$ ,  $\rho \in \{1, \dots, r\}$ , gibt, so daß für jedes  $\rho \in \{1, \dots, r\}$  gilt:

$$f|_{I_\rho} \text{ ist konstant.}$$

**6.1.6** Für jedes  $\rho \in \{1, \dots, r\}$  setzen wir dann  $f(I_\rho) := f(x)$  für ein (und damit jedes)  $x \in I_\rho$  und nennen

$$\text{Int}_I(f) := \sum_{\rho=1}^r f(I_\rho)\lambda(I_\rho)$$

das **Integral der Treppenfunktion  $f$  über  $I$** .

**6.1.5**  $\text{Int}_I(f)$  hängt nur von  $I$  und  $f$ , nicht aber von der Zerlegung ab.

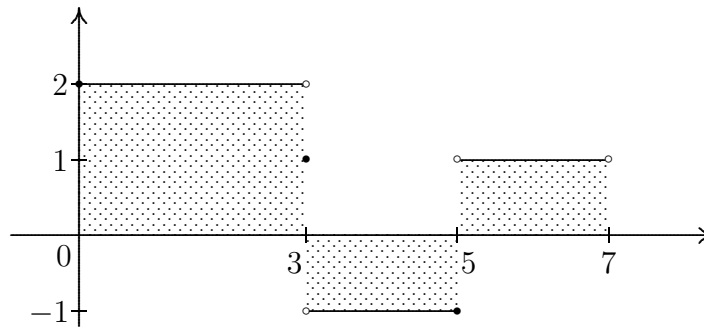
### Beispiel 3

$$\tau : [0, 7[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(x) := \begin{cases} 2, & \text{falls } x \in [0, 3[, \\ 1, & \text{falls } x \in \{3\} \cup ]5, 7[, \\ -1, & \text{falls } x \in ]3, 5]. \end{cases}$$

Die Zerlegung  $[0, 7[ = [0, 3[ \cup \{3\} \cup ]3, 5] \cup ]5, 7[$  z.B. ist zu  $\tau$  passend, d.h. erfüllt für  $\tau$  die Bedingungen in der Definition einer Treppenfunktion, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Int}_I(\tau) &= \tau([0, 3[)\lambda([0, 3[) + \tau(\{3\})\lambda(\{3\}) + \tau(]3, 5])\lambda(]3, 5]) + \tau(]5, 7[)\lambda(]5, 7[) \\ &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Abb. 3



**Definition und Satz**

**6.1.9** Eine beliebige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar über  $I$** , kurz: **R-integrierbar über  $I$** , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  existieren mit

$$f_1 \leq f \leq f_2 \text{ (d.h. } f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \text{ für alle } x \in I)$$

und

$$Int_I(f_2) - Int_I(f_1) = Int_I(f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

**6.1.11** Dies ist genau dann der Fall, wenn  $f$  beschränkt ist und wenn gilt:

$$\begin{aligned} F &:= \sup\{Int_I(f_1) \mid f_1 \text{ Treppenfunktion auf } I \text{ und } f_1 \leq f\} \\ &= \inf\{Int_I(f_2) \mid f_2 \text{ Treppenfunktion auf } I \text{ und } f \leq f_2\}. \end{aligned}$$

**6.1.12**  $F$  hängt nur von  $I$  und  $f$  ab und heißt **Riemann-Integral von  $f$  über  $I$** , kurz: **R-Integral von  $f$  über  $I$** . Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_I f d\lambda := F.$$

Eine Treppenfunktion  $f$  auf  $I$  ist stets R-integrierbar über  $I$  mit

$$Int_I(f) = \int_I f d\lambda.$$

Wir haben unsere geometrischen Überlegungen damit analytisch beschrieben.

**C.3 Rechenregeln für Riemann-Integrale**

**6.1.14** Sei  $I$  ein Intervall mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ .

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrierbare Funktionen,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge R-integrierbarer Funktionen. Dann gilt:

$$(1) \text{ Additivität: } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$(2) \text{ Homogenität: } \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$$

(3) Additivität bzgl. des Intervalls:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{für alle } c \in I;$$

$$(4) \text{ Monotonie: } f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

$$\text{Positivität: } 0 \leq g(x) \text{ für alle } x \in I \implies 0 \leq \int_a^b g(x) dx;$$

(5) Abschätzungen:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \|f\|_I = (b-a) \sup\{|f(x)| \mid x \in I\};$$

**6.1.15** (6) Gliedweise Integration:

Konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  R-integrierbar mit

$$\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx;$$

**6.1.16** konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  gleichmäßig, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  R-integrierbar mit

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Ferner sei bemerkt, daß es für den Wert des Integrals von  $f$  über  $I$  unerheblich ist, ob die Endpunkte  $a, b$  des Intervalls  $I$  in  $I$  selbst enthalten sind oder nicht, es gilt

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b[} f d\lambda = \int_{]a,b]} f d\lambda = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

**6.2.1** Schließlich erweist es sich als zweckmäßig und mit den Rechenregeln verträglich,

für  $\alpha, \beta \in [a, b]$  mit  $\alpha \leq \beta$

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

zu setzen.

## C.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Definition des Riemann-Integrals erfolgte unter dem Gesichtspunkt der Bestimmung von Flächeninhalten. Darüber hinaus bietet sie den Vorteil, daß sie sich ohne große Mühe auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen läßt (siehe Abschnitt C.8). Ein großer Nachteil liegt allerdings darin, daß sie in der Regel zur konkreten Berechnung von Integralen wenig geeignet ist. Für Funktionen mit nur einer Veränderlichen schafft hier ein anderer Aspekt der Integralrechnung Abhilfe: *die Umkehrung der Integration stetiger Funktionen durch die Differentiation.*

Im folgenden sei  $I$  stets ein Intervall mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

### 6.2.7 Definition

Sind  $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und ist  $F$  differenzierbar mit  $F' = f$ , so heißt  $F$  eine **Stammfunktion von  $f$** .

### 6.2.8 Bemerkung

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion, so ist  $G$  genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn es ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  gibt mit  $G = F + \hat{\alpha}|_I$ . Stammfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich also nur um eine konstante Funktion.

### Definition und Satz

Zu einer gegebenen  $\mathbb{R}$ -integrierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und zu einem gegebenen  $c \in I$  betrachten wir die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_c^x f(t) dt.$$

Man nennt die Funktion  $F$  ein **unbestimmtes Integral von  $f$** .

### 6.2.2 Es hat die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $F$  ist (gleichmäßig) stetig auf  $I$ ;
- (ii) ist  $f$  in  $x_0 \in I$  stetig, so ist  $F$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar mit  $F'(x_0) = f(x_0)$ ;
- (iii)  $F(c) = 0$ ;

$$(iv) \quad F(b) - F(a) = \int_c^b f(t) dt - \int_c^a f(t) dt = \int_c^b f(t) dt + \int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Ist die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so folgt aus (ii):  
ein unbestimmtes Integral von  $f$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .

Deswegen ist die Frage der Integrierbarkeit stetiger Funktionen von Interesse:

### 6.2.3 Satz (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Ist  $I$  kompakt (d.h.  $I = [a, b]$ ) **oder**  $f$  beschränkt, so ist  $f$  Riemann-integrierbar.

Wir fassen zusammen:

### 6.2.9 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei  $I = [a, b]$  mit  $a < b$  und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:

- (a)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$   
(denn jedes unbestimmte Integral von  $f$  ist eine solche);  
(b) für jede (weitere) Stammfunktion  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  gilt

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) =: G(x) \Big|_a^b$$

(denn  $G(x) = \alpha + \int_a^x f(t) dt$  für ein geeignetes  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ ).

## C.5 Anwendungen des Hauptsatzes

Das Berechnen von Integralen stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen wird durch den Hauptsatz im wesentlichen ein Suchen nach Stammfunktionen: eine Umkehrung der Differentiation. Jede Differentiationsregel wird dabei auch als Integrationsregel interpretierbar.

### (I) Partielle Integration (Produktregel)

#### 6.2.10 Satz

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf  $I$ . Nach der **Produktregel der Differentiation** gilt  $(fg)' = f'g + fg'$ , d.h.  $fg$  ist eine Stammfunktion von  $f'g + fg'$ .

Da  $f'g, fg' : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind, folgt aus dem Hauptsatz

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Ist  $H$  eine Stammfunktion von  $f'g$  (eine solche existiert nach dem Hauptsatz), so ist  $fg - H$  eine Stammfunktion von  $f'g$ .

Die Anwendung der partiellen Integration bietet sich in den Fällen an, in denen der Integrand (d.i. die Funktion nach dem Integralzeichen) ein Produkt von Funktionen ist und eine Stammfunktion eines Faktors bekannt ist. Man erhält durch diese Regel allerdings keine Stammfunktion für den Integranden sondern ein neues Integral, so daß partielle Integration im allgemeinen erst dann von Nutzen ist, wenn das neue Integral einfacher zu berechnen ist, d.h. wenn eine Stammfunktion von  $f'g'$  leichter zu finden ist als eine Stammfunktion von  $f'g$ . Dabei kann es sich als notwendig erweisen, die Regel der partiellen Integration wiederholt anzuwenden.

#### Beispiel 4

$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) := x^2 \sin x$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ).

Wir kennen die Stammfunktion von  $\sin|_{[a,b]}$ , nämlich

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := -\cos x.$$

Mit  $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := x^2$ , gilt dann  $h = f'g$ .

Da  $f, g$  stetig differenzierbar sind, folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 \sin x \, dx &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= -x^2 \cos x \Big|_a^b + 2 \int_a^b x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Damit ist die Berechnung von  $\int_a^b x^2 \sin x \, dx$  auf die Berechnung von  $\int_a^b x \cos x \, dx$  zurückgeführt.

Der Gewinn dieses Schrittes besteht darin, daß der Grad des als Faktor des Integranden auftretenden Polynoms um 1 vermindert werden konnte.

Mit dem gleichen Ziel wenden wir auf  $\int_a^b x \cos x \, dx$  erneut die Regel der partiellen Integration an und erhalten

$$\int_a^b x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_a^b - \int_a^b \sin x \, dx = x \sin x \Big|_a^b + \cos x \Big|_a^b.$$

Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x \Big|_a^b + 2(x \sin x \Big|_a^b + \cos x \Big|_a^b) \\ &= ((2 - x^2) \cos x + 2x \sin x) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

**(II) Substitutionsregel (Kettenregel)****6.2.11 Satz**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $J = [\alpha, \beta]$ .

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\varphi(J) \subset I$ .

Nach der **Kettenregel** gilt für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  (eine solche existiert nach dem Hauptsatz)  $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ , d.h.  $F \circ \varphi$  ist eine Stammfunktion von  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ .

Da  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, folgt aus dem Hauptsatz

$$(S) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(x) \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Die Substitutionsregel läßt sich auf zweierlei Weise anwenden, je nachdem, ob man die Formel (S) von links nach rechts oder von rechts nach links liest.

**1. Variante:** (von links nach rechts)

Der Integrand des gegebenen Integrals habe die Form  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ , wobei  $f$  und  $\varphi$  die oben vorausgesetzten Eigenschaften besitzen und eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  leichter zu bestimmen ist als eine Stammfunktion des Integranden.

Diese Variante entspricht also unserer Herleitung von (S) und insbesondere ist dann  $F \circ \varphi$  eine Stammfunktion des Integranden.

**Beispiel 5**

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \cdot \log 2.$$

Wir beobachten: im Zähler des Integranden steht bis auf den konstanten Faktor 2 die Ableitung des Nenners.

Wir setzen daher  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(t) := t^2 + 1$ , und es gilt

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{2t}{2(t^2 + 1)} dt = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{2\varphi(t)} dt = \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

wobei  $f : [\varphi(0), \varphi(1)] = [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{1}{2x}$ .

$f$  und  $\varphi$  erfüllen offenbar die Voraussetzungen der Substitutionsregel und eine Stammfunktion von  $f$  ist leicht gefunden:  $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) := \frac{1}{2} \log x$ .

$$F \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F \circ \varphi(t) = \frac{1}{2} \log(t^2 + 1),$$

ist also Stammfunktion von

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t}{t^2 + 1},$$

und es gilt

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \log(t^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 1 = \frac{1}{2} \log 2.$$

## 2. Variante: (von rechts nach links)

Läßt sich zum Integranden  $f(x)$  des gegebenen Integrals eine Funktion  $\varphi(t)$  finden, so daß  $f$  und  $\varphi$  die zu Beginn von (II) vorausgesetzten Eigenschaften besitzen und eine Stammfunktion  $H$  von  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  leichter zu bestimmen ist als eine Stammfunktion des Integranden, so erhält man

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = H(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Ist dabei  $\varphi$  invertierbar, so ist  $H \circ \varphi^{-1}$  eine Stammfunktion von  $f$  :

$$\begin{aligned} (H \circ \varphi^{-1})' &= (H' \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' = (((f \circ \varphi) \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' = f \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' \\ &= f \cdot \widehat{1}|_{\varphi(J)} = f, \end{aligned}$$

und wir können notieren:

$$\int_a^b f(x) dx = H \circ \varphi^{-1}(x) \Big|_a^b = H(t) \Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

## Beispiel 6

Sei  $D > 0$ . Dann gilt:

$$\int_a^b \frac{Ax+B}{(x-C)^2+D^2} dx = \left( \frac{A}{2} \log((x-C)^2+D^2) + \frac{AC+B}{D} \arctan \frac{x-C}{D} \right) \Big|_a^b.$$

Wir setzen

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{Ax+B}{(x-C)^2+D^2},$$

und suchen  $\varphi(t)$ , so daß durch Einsetzen (Substituieren) von  $\varphi(t)$  für  $x$  in  $f(x)$  der Nenner von  $f(x)$  eine geeignete einfache Form erhält.

Wir finden  $\varphi(t) := Dt + C$ .

$\varphi$  ist sicher stetig differenzierbar:  $\varphi'(t) = D$ , und wegen  $D > 0$  ist  $\varphi$  invertierbar mit  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-C}{D}$ .

Als Definitionsintervall  $J$  wählen wir daher  $J = [\alpha, \beta]$  mit  $\alpha := \varphi^{-1}(a) = \frac{a-C}{D}$ ,  $\beta := \varphi^{-1}(b) = \frac{b-C}{D}$ .

$f$  und  $\varphi$  erfüllen damit die erforderlichen Eigenschaften.

Für  $t \in J$  gilt

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{A(Dt + C) + B}{D^2(t^2 + 1)} \cdot D = A \cdot \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{AC + B}{D} \cdot \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Nach Beispiel 5 und wegen  $\arctan'(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$  ist

$$H : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(t) := A \cdot \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) + \frac{AC + B}{D} \cdot \arctan t,$$

eine Stammfunktion von  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ , also

$$H \circ \varphi^{-1} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$H \circ \varphi^{-1}(x) = -\frac{A}{2} \log D^2 + \frac{A}{2} \log((x - C)^2 + D^2) + \frac{AC + B}{D} \arctan \frac{x - C}{D}$$

eine Stammfunktion von  $f$  (vgl. 6.3.3/6.3.4 für  $n = 1$  – bis auf die Konstante  $-\frac{A}{2} \log D^2$ ).

Nach dem Hauptsatz folgt daraus die behauptete Gleichung.

## C.6 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Wir skizzieren ein Verfahren, mit dem das Aufsuchen einer Stammfunktion einer rationalen Funktion prinzipiell auf einige wenige einfache Spezialfälle zurückgeführt

**6.3** werden kann. Das Verfahren heißt **Partialbruchzerlegung**.

Sei  $f = \frac{R}{Q}$  mit  $R, Q \in \text{Pol } \mathbb{R}$  (reelle Polynome) und  $Q \neq \hat{0}$ .

### 6.3.5 1. Schritt: Division mit Rest (vgl. Kurse 01171/01181, 7.4.4)

Mit dem *Euklidischen Algorithmus* kann man die eindeutig bestimmten reellen Polynome  $P, S$  ermitteln, die

$$R = SQ + P \text{ und } \text{Grad } P < \text{Grad } Q$$

erfüllen. Es folgt  $f = S + \frac{P}{Q}$ .

Gilt bereits  $\text{Grad } R < \text{Grad } Q$ , so kann dieser Schritt unterbleiben ( $S = \hat{0}$ ,  $P = R$ ).

**2. Schritt:** Bestimmung aller (auch der komplexen) Nullstellen von  $Q$

(vgl. Kurse 01171/01181, Abschnitt 7.4)

Das Auffinden von Nullstellen eines Polynoms kann eine äußerst schwierige Aufgabe sein; ein zwingendes Verfahren zu ihrer Lösung gibt es i.d.R. leider nicht.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß mit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  auch das Konjugiert-Komplexe  $\bar{a}$  eine Nullstelle von  $Q$  ist, gibt es

- 1) evtl. reelle Nullstellen  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  (paarweise verschieden) mit den zugehörigen Vielfachheiten  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ , sowie
- 2) evtl. Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$   $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, z_n = \alpha_n + i\beta_n$  (paarweise verschieden) mit den Vielfachheiten  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$  und schließlich
- 3) eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ ,

so daß gilt:

$$Q(x) = c \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{r_j} \prod_{k=1}^n (x - z_k)^{s_k} (x - \bar{z}_k)^{s_k}.$$

Im Fall, daß das Zählerpolynom  $P$  gemeinsame Nullstellen mit  $Q$  hat, kann man einen oder mehrere Faktoren der Form  $x - a$  bzw.  $(x - z)(x - \bar{z})$  herauskürzen. Das kann Rechnungen vereinfachen.

**3. Schritt:** Bestimmung der Konstanten der Partialbruchzerlegung.

Der

### 6.3.8 Satz über die Partialbruchzerlegung

besagt, daß *es eindeutig bestimmte reelle Konstanten*

$$\begin{aligned} &A_1^{(1)}, \dots, A_{r_1}^{(1)}, \dots, A_1^{(m)}, \dots, A_{r_m}^{(m)}; \\ &B_1^{(1)}, \dots, B_{s_1}^{(1)}, \dots, B_1^{(n)}, \dots, B_{s_n}^{(n)}; \\ &C_1^{(1)}, \dots, C_{s_1}^{(1)}, \dots, C_1^{(n)}, \dots, C_{s_n}^{(n)} \end{aligned}$$

*gibt derart, daß für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$  gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{j=1}^m \left( \frac{A_1^{(j)}}{(x - a_j)^{r_j}} + \dots + \frac{A_{r_j}^{(j)}}{(x - a_j)^1} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^n \left( \frac{B_1^{(k)}x + C_1^{(k)}}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{s_k}} + \dots + \frac{B_{s_k}^{(k)}x + C_{s_k}^{(k)}}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^1} \right). \end{aligned}$$

Praktisch wird man diese Konstanten so ermitteln, daß man die letzte Gleichung aufgrund der Darstellung von  $Q(x)$  im 2. Schritt mit den noch unbekanntenen Konstanten hinschreibt und dann auf beiden Seiten mit  $Q(x)$  multipliziert.

Auf der linken Seite hat man dann das bekannte Polynom  $P(x)$ , und durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von  $x$  erhält man Bedingungen in Form von Gleichungen, welche die Bestimmung der Konstanten ermöglichen.

**4. Schritt:** Bestimmung einer Stammfunktion von  $f$

Nach Schritt 3 genügen wegen der Linearität der Integration zur Bestimmung einer

**6.3.1** Stammfunktion von  $f$  die Stammfunktionen der folgenden einfachen Spezialfälle

**-6.3.4** rationaler Funktionen ( $n \in \mathbb{N}, C, D \in \mathbb{R}, D > 0$ ):

rationale Funktion	zugehörige Stammfunktion
$g(x) := \sum_{k=0}^n C_k (x - C)^k$	$G(x) := \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{k+1} (x - C)^{k+1}$
$h_1(x) := \frac{1}{(x - C)}$	$H_1(x) := \log  x - C $
$h_{n+1}(x) := \frac{1}{(x - C)^{n+1}}$	$H_{n+1}(x) := -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x - C)^n}$
$f_1(x) := \frac{1}{(x - C)^2 + D^2}$	$F_1(x) := \frac{1}{D} \arctan \frac{x - C}{D}$
$f_{n+1}(x) := \frac{1}{((x - C)^2 + D^2)^{n+1}}$	$F_{n+1}(x) := \frac{1}{2nD^2} ((x - C)f_n(x) + (2n - 1)F_n(x))$
$g_1(x) := \frac{x}{(x - C)^2 + D^2}$	$G_1(x) := \frac{1}{2} \log((x - C)^2 + D^2) + CF_1(x)$
$g_{n+1}(x) := \frac{x}{((x - C)^2 + D^2)^{n+1}}$	$G_{n+1}(x) := -\frac{1}{2n} f_n(x) + CF_{n+1}(x)$

Maximale Definitionsintervalle sind für  $H_n ] - \infty, C [$  oder  $] C, \infty [$ , für alle anderen Stammfunktionen ganz  $\mathbb{R}$ .

**C.7 Erweiterung des Integralbegriffs: Uneigentliche Integrale**

Die Funktionen  $q_1, q_2$  aus Beispiel 1 sind nicht R-integrierbar, da beide nicht beschränkt sind.  $q_1, q_2$  sind aber wegen ihrer Stetigkeit auf jedem kompakten Teilintervall von  $]0, 2]$  R-integrierbar, m.a.W.: für jedes  $\alpha \in ]0, 1]$  sind  $q_1|_{[\alpha, 1]}, q_2|_{[\alpha, 1]}$  R-integrierbar. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 q_1(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 q_2(x) dx$$

existieren.

Die Antwort hierauf ist unterschiedlich:

$$\int_{\alpha}^1 q_1(x) dx = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \log \Big|_{\alpha}^1 = \log 1 - \log \alpha = -\log \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log \alpha = -\infty,$$

also existiert  $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ 0 < \alpha < 1}} \int_{\alpha}^1 q_1(x) dx$  nicht.

Dagegen gilt wegen  $\int_{\alpha}^1 q_2(x) dx = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha}$  und  $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ 0 < \alpha < 1}} \sqrt{\alpha} = 0$

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ 0 < \alpha < 1}} \int_{\alpha}^1 q_2(x) dx = 2,$$

d.h. insbesondere: der Grenzwert existiert.

Wir sagen dann:

$q_2$  ist über  $]0, 1]$  uneigentlich integrierbar,  $q_1$  dagegen nicht.

In ähnlicher Weise kann man fragen, ob die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ \beta > 1}} \int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx, \quad \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ \beta > 1}} \int_1^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{etc.}$$

existieren, und so versuchen, den Integralbegriff nicht nur auf gewisse unbeschränkte Funktionen, sondern auch auf unbeschränkte Integrationsintervalle auszudehnen.

Diese Idee führt zur folgenden

#### 6.4.1 Definition

Sei  $I$  ein Intervall mit den Endpunkten  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ,  $a < b$ , und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  so beschaffen, daß  $f|_{] \alpha, \beta ]}$  für alle  $\alpha, \beta$  mit  $a < \alpha < \beta < b$  R-integrierbar ist.

$f$  heißt **uneigentlich integrierbar (über  $I$ )**, falls für irgendein  $\gamma \in ]a, b[$  die beiden (einseitigen) Grenzwerte

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ a < \alpha < b}} \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ a < \beta < b}} \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

existieren, und

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ a < \alpha < b}} \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ a < \beta < b}} \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

heißt dann das **uneigentliche Integral von  $f$  (über  $I$ )**.

Zur Definition des uneigentlichen Integrals ist zu bemerken, daß sie nicht von der Wahl von  $\gamma \in ]a, b[$  abhängt und für den Fall, daß  $f$  sogar über  $I$  R-integrierbar ist, mit dem („eigentlichen“) Riemann-Integral von  $f$  über  $I$  übereinstimmt.

**Beispiel 7**

$$f : ]0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x \in ]0, 1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x \in ]1, \infty[. \end{cases}$$

Ist  $f$  uneigentlich integrierbar? Welchen Wert hat gegebenenfalls  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ ?

Wir erkennen zunächst unschwer, daß  $f$  stetig ist, so daß alle im folgenden auftretenden (Riemann-)Integrale über kompakten Intervallen wohldefiniert sind.

Es gilt (mit  $\gamma := 1$ ):

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ 0 < \alpha < \infty}} \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ 0 < \alpha < 1}} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \quad (\text{siehe Seite C 14}),$$

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ 0 < \beta < \infty}} \int_1^{\beta} f(x) dx = \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ 0 < \beta < \infty}} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ 0 < \beta < \infty}} -\frac{1}{x} \Big|_1^{\beta} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ 0 < \beta < \infty}} \left(-\frac{1}{\beta} + 1\right) = 1,$$

d.h.  $f$  ist über  $]0, \infty[$  uneigentlich integrierbar und

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 2 + 1 = 3.$$

**Anmerkung** zu Beispiel 2

Die Funktion  $p$  aus Beispiel 2 motiviert eine qualitativ andersartige Erweiterung des Riemannsches Integralbegriffs:  $p$  ist nicht Riemann-integrierbar – nicht etwa, weil die Funktion oder das Integrationsintervall unbeschränkt ist, sondern weil unsere Methode, den Flächeninhalt zwischen den Graphen von  $p$  und der  $x$ -Achse zu messen, zu keinem sinnvollen Ergebnis führt: die Approximation mit *endlichen* Vereinigungen ein- bzw. unbeschriebener Rechtecksflächen ist nicht „fein“ genug. Zu einer „Verfeinerung“ der Inhaltsmessung gelangt man dadurch, daß man auch *abzählbar unendliche* Vereinigungen solcher Rechtecksflächen zuläßt. Dies führt zu einer echten Erweiterung des Riemannsches Integralbegriffs: dem **Lebesgue-Integral**.

$p$  aus Beispiel 2 ist Lebesgue-integrierbar.

## C.8 Das Riemann-Integral für reelle Funktionen mehrerer Veränderlicher

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall betrachten wir hier zunächst nur Funktionen, die auf dem ganzen  $\mathbb{R}^n$  definiert sind, aber außerhalb eines jeweils geeignet zu wählenden beschränkten Quaders immer den Wert 0 haben; im übrigen ist die Analogie zur bisherigen Begriffsbildung offensichtlich, so daß wir einige Details weglassen werden.

### Definition

**8.4.3** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion auf  $\mathbb{R}^n$** , wenn es eine

$$\text{Zerlegung } \mathbb{R}^n = \bigcup_{\rho=1}^r Q_\rho$$

in endlich viele disjunkte nichtleere Quader  $Q_\rho \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\rho \in \{1, \dots, r\}$ , gibt, so daß für jedes  $\rho \in \{1, \dots, r\}$  gilt:

$$f|_{Q_\rho} \text{ ist konstant}$$

und

$$f|_{Q_\rho} = \widehat{0}|_{Q_\rho}, \text{ falls } Q_\rho \text{ unbeschränkt ist.}$$

Eine solche Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  nennen wir **zu  $f$  passend**.

Für jedes  $\rho \in \{1, \dots, r\}$  setzen wir dann

$$f(Q_\rho) := \begin{cases} f(x), & \text{für ein (und damit jedes) } x \in Q_\rho, \text{ falls } Q_\rho \text{ beschränkt,} \\ 0, & \text{falls } Q_\rho \text{ unbeschränkt,} \end{cases}$$

**8.4.5** und nennen die (von der zu  $f$  passenden Zerlegung unabhängige) Summe

$$\text{Int}_n(f) := \sum_{\rho=1}^r {}^b f(Q_\rho) \lambda_n(Q_\rho)$$

das **Integral der Treppenfunktion  $f$  über  $\mathbb{R}^n$** .

(Dabei soll  $\sum {}^b$  bedeuten, daß nur über solche  $\rho$  zu summieren ist, für die  $Q_\rho$  beschränkt ist; sind alle  $Q_\rho$  unbeschränkt, so ist die Summe = 0 zu setzen.)

### Definition und Satz

**8.4.8** Eine beliebige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar über  $\mathbb{R}^n$** , kurz: **R-integrierbar über  $\mathbb{R}^n$** , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^n$   $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  existieren mit

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad \text{und} \quad \text{Int}_n(f_2) - \text{Int}_n(f_1) = \text{Int}_n(f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

**8.4.10** Dies ist genau dann der Fall, wenn  $f$  beschränkt ist und wenn gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n := \sup\{Int_n(f_1) \mid f_1 \text{ Treppenfunktion auf } \mathbb{R}^n \text{ und } f_1 \leq f\}$$

$$= \inf\{Int_n(f_2) \mid f_2 \text{ Treppenfunktion auf } \mathbb{R}^n \text{ und } f \leq f_2\}.$$

$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$  heißt **Riemann-Integral** (kurz: **R-Integral**) von  $f$  über  $\mathbb{R}^n$ .

**8.4.11** Eine Treppenfunktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist stets R-integrierbar über  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = Int_n(f).$$

Den Anschluß an das auf beschränkten Intervallen von  $\mathbb{R}$  definierte R-Integral (vgl. Abschnitt C.2) stellt das folgende Ergebnis her:

### 8.5.1 Satz

Sei  $I$  ein beschränktes Intervall. Dann gilt:

(i) Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  R-integrierbar, so ist

$$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in I, \\ 0, & \text{falls } x \notin I, \end{cases}$$

eine R-integrierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^1} f^* d\lambda_1 = \int_I f d\lambda.$$

(ii) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus I$  R-integrierbar auf  $\mathbb{R}$ , so ist  $f|_I : I \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrierbar auf  $I$  und es gilt

$$\int_I f|_I d\lambda = \int_{\mathbb{R}^1} f d\lambda_1.$$

Dieses Ergebnis deutet an, wie man die R-Integrierbarkeit und das R-Integral auf Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$  ausdehnen kann:

### 8.6.1 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$  heißt **R(iemann)-integrierbar (über  $D$ )**, wenn

$$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in D, \\ 0, & \text{falls } x \notin D, \end{cases}$$

R-integrierbar (über  $\mathbb{R}$ ) ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\int_D f d\lambda_n := \int_D f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f^* d\lambda_n.$$

Die den Rechenregeln in Abschnitt C.3 entsprechenden Aussagen gelten – soweit übertragbar – auch für das Riemann-Integral über (Teilmengen von)  $\mathbb{R}$ . Z.B. hat die Additivität bzgl. des Integrationsbereiches folgende Form:

**8.6.2(ii)** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$   $R$ -integrierbar über  $D$  und sind  $D_1, D_2$  nichtleere Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit  $D = D_1 \cup D_2$  und  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , so daß auch  $f|_{D_1}$  und  $f|_{D_2}$   $R$ -integrierbar (über  $D_1$  bzw.  $D_2$ ) sind, so gilt:

$$\int_D f d\lambda_n = \int_{D_1} f|_{D_1} d\lambda_n + \int_{D_2} f|_{D_2} d\lambda_n.$$

## C.9 Der Satz von Fubini

Für die konkrete Berechnung des Riemann-Integrals einer reellen Funktion *mehrerer* Veränderlicher ist man natürlich sehr daran interessiert, die Integraltheorie für Funktionen mit *einer* Veränderlichen verwenden zu können, also insbesondere die Ergebnisse der Abschnitte C.4 bis C.6. Den wichtigsten Beitrag hierzu liefert der

### 8.5.2 Satz von Fubini

Seien  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $n = k + m$  und

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(z) = f(x, y) \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$R$ -integrierbar.

Ist für jedes feste  $x \in \mathbb{R}^k$  die Funktion

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y)$$

$R$ -integrierbar über  $\mathbb{R}^m$ , so ist die Funktion

$$g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, \cdot) d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$$

$R$ -integrierbar über  $\mathbb{R}^k$ , und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} g d\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} f d\lambda_{k+m},$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) d(x, y).$$

Ist statt  $f(x, \cdot)$  die Funktion

$$f(\cdot, y) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x, y)$$

für jedes  $y \in \mathbb{R}^m$  R-integrierbar über  $\mathbb{R}^k$ , so gilt analog

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x, y) d(x, y).$$

Auf diese Weise kann die Integration von  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}^n$  nach  $(n-1)$  Schritten auf  $n$  Integrationen über  $\mathbb{R}$  zurückgeführt werden – falls die entsprechenden Integrierbarkeitsvoraussetzungen vorliegen! Diese Integrierbarkeitsvoraussetzungen sind ein großes Handicap bei der Anwendung des Satzes von Fubini. Wie im ein-dimensionalen Fall ist es deshalb von Interesse, wann man die R-Integrierbarkeit sofort „sieht“, und wir erhalten ein vergleichbares Ergebnis:

### 8.5.3 Satz (Kriterium für Integrierbarkeit)

Seien  $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$  kompakt,  $f_1, f_2 : K \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig und

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in K, \quad f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq f_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\},$$

$$\overset{\circ}{D} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{K}, \quad f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < f_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\},$$

wobei  $\overset{\circ}{K} := \{x \in K \mid K \text{ ist Umgebung von } x\}$ .

Dann ist eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

(a)  $f(x) = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$

(b)  $f|_D$  stetig (oder allgemeiner:  $f|_{\overset{\circ}{D}}$  stetig und  $f|_D$  beschränkt)

R-integrierbar über  $\mathbb{R}^n$ .

Die Voraussetzungen an  $D$  erfüllen z.B. alle kompakten Quader, und die dort stetigen Funktionen sind über diesen Quadern R-integrierbar:

#### Beispiel 8

Sei  $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  und sei  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist

$$f^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x_1, x_2) := \begin{cases} f(x_1, x_2), & \text{falls } (x_1, x_2) \in D, \\ 0, & \text{falls } (x_1, x_2) \notin D, \end{cases}$$

nach dem Kriterium für R-Integrierbarkeit mit  $K := [a_1, b_1]$  und  $f_1, f_2 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1 := \widehat{a}_2|_K$ ,  $f_2 := \widehat{b}_2|_K$  R-integrierbar über  $\mathbb{R}^2$  und ebenso

$$f^*(\cdot, x_2) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_1 \longmapsto f^*(x_1, x_2),$$

da  $f^*(\cdot, x_2)|_{[a_1, b_1]}$   $\mathbb{R}$ -integrierbar ist.

Nach dem Satz von Fubini ist dann auch

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_2 \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f^*(x_1, x_2) dx_1 = \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right)^*$$

$$= \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1, & \text{falls } x_2 \in [a_2, b_2], \\ 0, & \text{falls } x_2 \notin [a_2, b_2], \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ -integrierbar über  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\begin{aligned} \int_D f d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} f^* d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f^*(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right)^* dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel:

Die Funktion  $f : [0, 1] \times [2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) := x_1 x_2$  ist auf dem kompakten Quader  $D := [0, 1] \times [2, 4]$  stetig. Es gilt daher

$$\int_D f d\lambda_2 = \int_2^4 \left( \int_0^1 x_1 x_2 dx_1 \right) dx_2 = \int_2^4 \left( \frac{x_1^2 x_2}{2} \Big|_0^1 \right) dx_2 = \int_2^4 \frac{x_2}{2} dx_2 = \frac{x_2^2}{4} \Big|_2^4 = 4 - 1 = 3.$$

Nach dem Satz von Fubini kann man in diesem Beispiel die Integrationsreihenfolge auch vertauschen und die Rechnung wäre dann:

$$\begin{aligned} \int_D f d\lambda_2 &= \int_0^1 \left( \int_2^4 x_1 x_2 dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 \left( \frac{x_1 x_2^2}{2} \Big|_2^4 \right) dx_1 = \int_0^1 (8x_1 - 2x_1) dx_1 \\ &= 6 \int_0^1 x_1 dx_1 = 6 \cdot \frac{x_1^2}{2} \Big|_0^1 = 3. \end{aligned}$$

## C.10 R-messbare Teilmengen und ihr Volumen

### 8.6.3 Definition

Eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt **R-messbar** (auch **Jordan-messbar**), wenn die charakteristische Funktion von  $D$

$$\chi_D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_D := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in D, \\ 0, & \text{falls } x \notin D, \end{cases}$$

$R$ -integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\lambda_n(D) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_D d\lambda_n$$

das **Volumen von  $D$** .

**Beispiel 9** (Fläche der Kreisscheibe vom Radius  $a$ )

Sei  $a > 0$  und  $K_2(a) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq a^2 \right\}$  die Kreisscheibe vom Radius  $a$  (mit Mittelpunkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ).

Aus der Elementargeometrie ist der Flächeninhalt von  $K_2(a)$  bekannt:  $a^2\pi$ .

Wir wollen uns davon überzeugen, daß der obige Volumenbegriff mit dem elementargeometrischen übereinstimmt, also „vernünftig“ ist, d.h. wir wollen

$$\lambda_2(K_2(a)) := \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K_2(a)} d\lambda_2 = a^2\pi$$

zeigen.

Dabei werden wir eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel einsetzen, die die Integralberechnung im Vergleich zu Beispiel 8.5.4(1) noch weiter vereinfacht, die

### 8.6.8 Transformationsformel

Sei  $G$  eine nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $T : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Sei ferner  $D$  eine nichtleere  $R$ -messbare Teilmenge von  $G$ , so daß  $T|_{\overset{\circ}{D}} : \overset{\circ}{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist mit  $\det T'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in \overset{\circ}{D}$ .

Dann ist  $T(D)$   $R$ -messbar, und für jede über  $T(D)$   $R$ -integrierbare reelle Funktion  $f$  gilt:

$$(i) \quad (f \circ T)|_{\det T'|_D} \Big|_D \text{ ist } R\text{-integrierbar über } D$$

und

$$(ii) \quad \int_{T(D)} f d\lambda_n = \int_D (f \circ T)|_{\det T'} d\lambda_n,$$

wobei  $\det T' : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \longmapsto \det T'(x)$  sei.

**8.6.10** Die (stetig differenzierbare) Transformation von *ebenen Polarkoordinaten* in kartesische Koordinaten wird durch

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

beschrieben und für jede nichtleere  $\mathbb{R}$ -meßbare Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^2$  mit

$$\overset{\circ}{D} \subset \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, \quad -\pi < \varphi < \pi \right\}$$

gelten die Voraussetzungen für die Transformationsformel, da

$$T'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\det T'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0 \quad \text{für jedes} \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{D}$$

und

$$T|_{\overset{\circ}{D}} \text{ injektiv.}$$

Es folgt daher für das offensichtlich  $\mathbb{R}$ -meßbare  $D := [0, a] \times [-\pi, \pi]$ :

$$T(D) = K_2(a) \text{ ist } \mathbb{R}\text{-meßbar}$$

und für jede  $\mathbb{R}$ -integrierbare Funktion  $f : T(D) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(i) \quad (f \circ T)|_{\det T'|_D} = (f \circ T) \cdot r|_D \text{ ist } \mathbb{R}\text{-integrierbar,}$$

$$(ii) \quad \int_{T(D)} f \, d\lambda_2 = \int_D (f \circ T) \cdot r \, d\lambda_2 = \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi).$$

Für  $f = \chi_{K_2(a)}$  also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K_2(a)} \, d\lambda_2 &= \int_{K_2(a)} \chi_{K_2(a)} \, d\lambda_2 = \int_D \chi_{K_2(a)}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_D r \, d(r, \varphi) = \int_0^a \left( \int_{-\pi}^{\pi} r \, d\varphi \right) dr = \int_0^a r(\pi - (-\pi)) \, dr \\ &= 2\pi \int_0^a r \, dr = 2\pi \frac{1}{2} a^2 = a^2\pi. \end{aligned}$$