Lösungsskizzen zu den Aufgaben zum Thema I

1. **a)** Seien $x, y \in \,]-1, \infty[$. Aus $x \leq y$ folgt $x + xy \leq y + xy$, das heißt $x(1+y) \leq y(1+x)$. Wegen $x, y > -1$ sind $1+x, 1+y > 0$, also folgt $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{y}{1+y}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Mit $x := |a+b|$, $y := |a| + |b|$ gilt $x \leq y$; aus a) folgt dann

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

die letzte Ungleichung gilt wegen $|a|, |b| \geq 0$.

2. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Sind s,t untere Schranken von A bzw. B, so ist $s + t \leq a + b$ für alle $a \in A$, $b \in B$, also ist $s + t$ untere Schranke von $A + B$. Für $s := \inf A$ und $t := \inf B$ folgt daraus $\inf(A + B) \geq s + t$. Ist s' eine beliebige untere Schranke von $A + B$, so ist $s' - b \leq A$ für jedes $b \in B$, also ist $s' - b \leq \inf A = s$ für jedes $b \in B$; dann ist $s' - s \leq B$, also $s' - s \leq \inf B = t$ und damit $s' \leq s + t$. Daraus folgt $\inf(A + B) = s + t$.

3. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt, es sei $a := \sup M$.

a) Sei $a \notin M$. Ist U eine Umgebung von a, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset U$. Wegen $a - \varepsilon < a = \sup M$ ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von M (sonst müßte $a \leq a - \varepsilon$ gelten), also gibt es ein $x \in M$ mit $a - \varepsilon < x$. Dann ist $a - \varepsilon < x \leq a < a + \varepsilon$, also $x \in U_\varepsilon(a)$, und $x \neq a$ wegen $a \notin M$. Also enthält $U \cap M$ einen Punkt $\neq a$.

b) Sei M abgeschlossen. Wäre $a = \sup M \notin M$ so wäre a nach a) ein Häufungspunkt von M, der nicht in M liegt; das widerspricht der Abgeschlossenheit von M. Also gilt $a \in M$.

c) Für $M := \,]0, 1]$ ist $\sup M = 1 \in M$, aber M ist nicht abgeschlossen (da $0 \notin M$ Häufungspunkt von M ist).

4. **(i)** Wäre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ offen, so wäre $\mathbb{Q}$ insbesondere Umgebung von 0, also gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{Q}$; für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ist aber $\frac{1}{n}\sqrt{2} \in U_\varepsilon(0)$, $\frac{1}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, Widerspruch!

Wäre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ offen, also insbesondere eine Umgebung von $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; jede Umgebung von $\sqrt{2}$ enthält aber eine rationale Zahl, Widerspruch!

(ii) Wäre $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ offen, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subset M$; es ist aber $-\frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(0)$, $-\frac{\varepsilon}{2} \notin M$.

M ist abgeschlossen, weil

$$\mathbb{R} \setminus M \;=\;]-\infty, 0[\;\cup\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\Big[\;\cup\;]1, \infty[$$

als Vereinigung von offenen Intervallen offen ist.

1. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ mit dem ε-n_0-Kriterium:
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ und $|c_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Dann gilt

$$-\varepsilon < a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max(n_1, n_2),$$

also $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq \max(n_1, n_2)$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

2. **(i)** Wir erhalten $\quad a_n = \dfrac{4n^7 + 8n^5 + \ldots}{3n^7 + 6n^6 + \ldots} = \dfrac{4 + \frac{8}{n^2} + \ldots}{3 + \frac{6}{n} + \ldots} \to \dfrac{4}{3}$ für $n \to \infty$.

(ii) Es gilt $\quad \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{2^{n+1} 3n}{3(n+1)2^n} = 2\dfrac{n}{n+1} \to 2$ für $n \to \infty$,
daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \dfrac{3}{2}$, also $|a_n| \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-n_0} |a_{n_0}|$ für alle $n \geq n_0$.
Damit ist $(|a_n|)$ unbeschränkt, also (a_n) divergent.

(iii) Wegen $x^n - y^n = (x-y)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{n^n - (n-1)^n}{n!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} n^k (n-1)^{n-k-1} \geq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)^{n-1} = \frac{1}{n!} n(n-1)^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)} \geq n-1\end{aligned}$$

für $n \geq 2$, also ist die Folge divergent.

3. **(i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ ist eine alternierende Reihe, denn $\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$ ist monoton fallend, und es gilt $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$, also ist die Reihe (nach dem Leibniz-Kriterium) konvergent.
Es gilt $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$; da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergent ist, ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergent, also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergent.

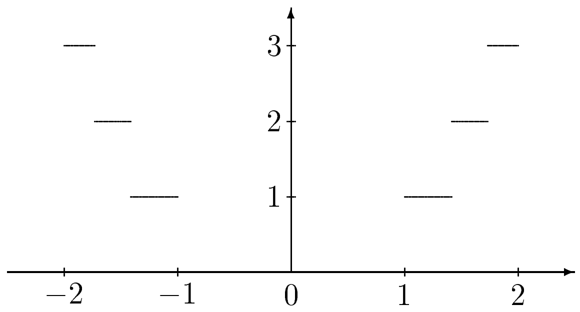
(ii) Für $a_n := (-n)^3 (\frac{3}{4})^n$ gilt: $\quad |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} \to \frac{3}{4} < 1$ für $n \to \infty$.
Nach dem Quotientenkriterium ist dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, also auch konvergent.

4. Es sei $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ist (x_n) monoton wachsend. Wir beweisen $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: Der Fall $n = 1$ ist klar.
$n \to n+1$: Ist $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, so folgt $0 \leq x_n \leq x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Also ist (x_n) monoton wachsend und beschränkt, somit existiert $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Es gilt $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2 + \frac{1}{4}) = c^2 + \frac{1}{4}$, somit ist $c^2 - c + \frac{1}{4} = (c - \frac{1}{2})^2 = 0$, also $c = \frac{1}{2}$.

1. Wir zeigen mit dem ε-δ-Kriterium, dass g in 0 stetig ist:
Sei $\varepsilon > 0$. Da f beschränkt ist, gibt es ein $K > 0$ mit $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [0,1]$.
Es sei $\delta := \frac{\varepsilon}{K+1}$. Für alle $x \in [0,1]$ mit $|x| < \delta$ gilt dann

$$|g(x) - g(0)| = |xf(x)| = |x| \cdot |f(x)| \le \delta \cdot K < \varepsilon.$$

2. Für $x \in \left[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right[$ oder $x \in \left]-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}^0$ ist $f(x) = [x^2] = n$. Skizze:



In allen Intervallen der Form $\left]\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right[$ oder $\left]-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}\right[$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist f konstant und somit stetig. Wegen $f|_{]-1,1[} = \hat{0}$ ist f in 0 ebenfalls stetig.
In allen Punkten der Form $\sqrt{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist f unstetig, denn zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und beliebigem $\delta > 0$ gibt es ein $x < \sqrt{n}$ mit $|x - \sqrt{n}| < \delta$ und $|f(x) - f(\sqrt{n})| = 1 > \varepsilon$. Ebenso ist f in allen Punkten $-\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ unstetig.

3. **(i)** Für $\alpha > 0$ und $x \in]-\alpha, \infty[\setminus \{0\}$ gilt $f_\alpha(x) = \frac{(x+\alpha)-\alpha}{x} = 1$, also ist f_α für $\alpha > 0$ durch $f_\alpha(0) := 1$ in 0 stetig fortsetzbar.
Für $\alpha < 0$ und $x \in]-\infty, -\alpha[\setminus \{0\}$ ist $f_\alpha(x) = \frac{-(x+\alpha)-(-\alpha)}{x} = -1$, also ist f_α für $\alpha < 0$ durch $f_\alpha(0) := -1$ in 0 stetig fortsetzbar.
Für $\alpha = 0$ ist $f_0(x) = \frac{|x|}{x} = 1$ für $x > 0$, $f_0(x) = -1$ für $x < 0$, also ist f_0 in 0 nicht stetig fortsetzbar.

(ii) a) In $]-1,1[\setminus \{0\}$ gilt (nach Erweitern des Bruchs mit $1 + \sqrt{1-x^2}$)

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } x \to 0.$$

b) Wir zeigen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x-[x]} = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Es sei $x \neq 0$ mit $|x| < \delta$ beliebig; nun gilt $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$. Ist $x > 0$, so gilt $\left|\frac{x^2}{x-[x]} - 0\right| = \frac{x^2}{x} = x < \varepsilon$; ist $x < 0$, so gilt $-\frac{1}{2} < x < 0$ (wegen $|x| < \delta$), also

$$\left|\frac{x^2}{x-[x]} - 0\right| = \frac{x^2}{|x+1|} = \frac{x^2}{1-|x|} \le 2x^2 \le 2|x| < \varepsilon.$$

4. **(ii)** Es sei $f : [a,b] \to [a,b]$ (mit $a < b$) stetig. Dann ist auch $g := f - \mathrm{id}_{[a,b]}$ stetig. Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, so sind wir fertig. Wir können also $f(a) > a$ und $f(b) < b$ annehmen. Dann gilt $g(a) = f(a) - a > 0$ und $g(b) = f(b) - b < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $x_0 \in]a,b[$ mit $g(x_0) = 0$, also $f(x_0) = x_0$.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{für alle } x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{für alle } x > 1\,. \end{cases}$

(i) In $]-\infty, 1[$ ist f die Einschränkung der Polynomfunktion $P_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2 - x + 1$; da P_1 differenzierbar ist, ist f in allen $a \in\ ]-\infty, 1[$ differenzierbar mit $f'(a) = P_1'(a) = 4a - 1$. In $]1, \infty[$ stimmt f mit der Einschränkung der Polynomfunktion $P_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x$ überein, ist also in $]1, \infty[$ differenzierbar mit $f'(a) = P_2'(a) = 2a + 1$ für alle $a \in\ ]1, \infty[$.

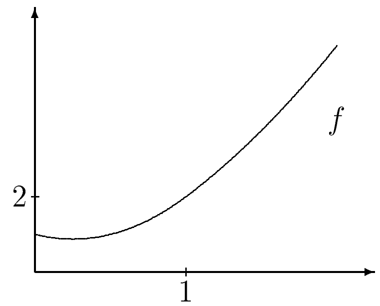
(ii) Für alle $x \neq 1$ ist

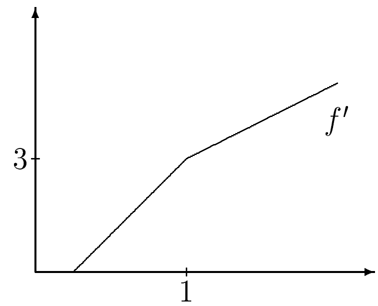
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{für } x < 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{für } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < 1 \\ x + 2 & \text{für } x > 1\,. \end{cases}$$

Hieraus lesen wir ab, dass $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existiert und gleich 3 ist.
(Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Ist $|x - 1| < \delta$ und $x < 1$, so gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 3 \right| = |2x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon;$$

ist $|x - 1| < \delta$ und $x > 1$, so gilt $\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 3 \right| = |x + 2 - 3| = |x - 1| < \delta < \varepsilon$.)
Also ist f in 1 differenzierbar mit $f'(1) = 3$. Es folgen Skizzen von f und f':





(iii) Nach (i) und (ii) haben wir $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{für } x < 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{für } x > 1\,. \end{cases}$

Wir zeigen, dass $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$ *nicht* existiert, also f' in 1 nicht differenzierbar ist.

Für alle $x \neq 1$ gilt $\dfrac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{4x - 4}{x - 1} & \text{für } x < 1 \\ \frac{2x - 2}{x - 1} & \text{für } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 4 & \text{für } x < 1 \\ 2 & \text{für } x > 1\,. \end{cases}$

Hieraus erkennt man sofort, dass $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$ nicht existiert.
(Beweis: Für die Folgen $(x_n), (y_n)$ mit $x_n := 1 - \frac{1}{n},\ y_n := 1 + \frac{1}{n}$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$, aber $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f'(x_n) - f'(1)}{x_n - 1} = 4 \neq 2 = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f'(y_n) - f'(1)}{y_n - 1}$.)

2. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f, g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ und $g(x) := \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Wegen $f = g$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \\ g'(x) &= \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

3. Es sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und monoton wachsendem f'. Es ist $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ differenzierbar mit $g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \big(f'(x)x - f(x)\big)$. Wegen $x > 0$ ist also $g'(x) \geq 0$ genau dann, wenn $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Zu jedem $x > 0$ gibt es nach dem 1. Mittelwertsatz ein $\xi \in]0, x[$ mit $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)$, und es ist $f'(\xi) \leq f'(x)$, da $\xi < x$ und f' monoton wachsend ist. Also ist $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$ und damit $g'(x) \geq 0$ für alle $x > 0$, also g monoton wachsend.

4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum\limits_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu)^2$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = 2\sum_{\nu=1}^{n}(x - a_\nu) = 2nx - 2\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad \text{und} \quad f''(x) = 2n.$$

Hat f in a ein absolutes oder relatives Minimum, so gilt $f'(a) = 0$. Es ist $f'(x) = 0$ genau für $x = \overline{x} := \frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Wegen $f''(\overline{x}) = 2n > 0$ hat f in $\overline{x}$ ein relatives Minimum.

Wegen $f'(x) = 2nx - 2n\overline{x}$ ist $f'(x) \leq 0$ in $]-\infty, \overline{x}]$ und $f'(x) \geq 0$ in $[\overline{x}, \infty[$, also ist f in $]-\infty, \overline{x}]$ monoton fallend und in $[\overline{x}, \infty[$ monoton wachsend. Folglich hat f in $\overline{x}$ auch ein absolutes Minimum.

5. **a)** Die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital sind hier erfüllt (Nachweisen!), also gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

(Dabei gilt $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = 1 = \lim\limits_{x \to 1} x^{n-1}$, da die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$, $x \mapsto x^{n-1}$ in 1 stetig sind.)

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\big((1-\frac{1}{x})^{2n} + \frac{2n}{x} - 1\big)$ existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in]0,\infty[}} \frac{1}{t^2}\big((1-t)^{2n} + 2nt - 1\big)$ existiert, wobei im Fall der Existenz beide Grenzwerte übereinstimmen. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital (deren Voraussetzungen jeweils erfüllt sind) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in]0,\infty[}} \frac{(1-t)^{2n} + 2nt - 1}{t^2} &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in]0,\infty[}} \frac{-2n(1-t)^{2n-1} + 2n}{2t} \\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in]0,\infty[}} \frac{2n(2n-1)(1-t)^{2n-2}}{2} \\ &= n(2n-1). \end{aligned}$$