mündl. Prüfung Numerische Mathematik I

Datum: 21.09.2009
Prüfer: Prof. Skrzipek
Besitzer: Dipl.-Math. ???
Note: 2,3

Themen der Prüfung

Selbstgewähltes Einstiegsthema: Interpolation

F: Was wissen Sie über die Interpolation?

Die Interpolation, entstanden aus dem Wunsch heraus, den Verlauf einer Funktion f zu bestimmen, obwohl nur einzelne Werte $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, von f bekannt sind. Es gibt beliebig viele stetige Funktionen g, die mit f die Werte $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, gemeinsam haben, daher haben wir uns zunächst auf Polynom-Funktionen beschränkt aus zwei Gründen:

1. Es gibt bei n + 1 vorgegebenen Werten $f(x_i)$ ein eindeutig bestimmtes Polynom vom Grad n, das diese Werte annimmt, also $p(x_i)=f(x_i);\ i=0,\ldots,n$, liefert.

Außerdem kann man einen Näherungswert für $\int_a^b f(x)$ durch

$\int_a^b p(x)$ erhalten (Abb. 3.2); diesen Näherungsprozeß bezeichnen wir als interpolatorische Quadratur. Die Frage ist allerdings, wie gut diese Näherung ist. Stützstellen oder Knoten bezeichnet man paarweise verschiedene Punkte

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K},$$

Stützwerte ein System von n + 1 weiteren (nicht notwendig verschiedenen) Punkten $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.

Anhand von Beispielen haben wir gesehen,

a) daß es eine Schar von Polynomen $p \in \pi_3$ gibt, welche das Interpolationsproblem p(1) = p(-1) = 1 ; p(0) = 0 lösen (Interpolationsproblem mit vielen Lösungen).

b) daß das Interpolationsproblem

$$p(1) = -p(\frac{1}{2}) = p(\frac{-1}{2}) = -p(-1) = 1$$

keine Lösung $p \in \pi_2$ besitzt (unlösbares Interpolationsproblem).

Beweis der Eindeutigkeit:

Das Interpolationsproblem 3.2.1 hat höchstens eine Lösung.

Beweis. Wenn $p, q \in \pi_n$ Lösungen des Interpolationsproblems 3.2.1

sind, so folgen für das Differenzpolynom r := p - q die Bedingungen

$$r(x_k)=0;\ k=0,\ldots,n,\ r\in\pi_n;$$

r hat also n + 1 verschiedene Nullstellen und ist somit nach dem Fundamentalsatz der Algebra das Nullpolynom. Also folgt p = q.

Beweisen der Existenz:

Daß das Interpolationsproblem 3.2.1 überhaupt eine Lösung hat, zeigen wir dadurch, daß wir sie explizit angeben. Dazu führen wir die Lagrange-Grundpolynome ein.

3.2.4 Definition

Es seien n+1 paarweise verschiedene Punkte $x_k\in\mathbb{K},\ k=0,\ldots,n$, gegeben. Dann bezeichnet man die Polynome l_ν ,

$$l_\nu(x):=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq\nu}}^{n}\frac{x-x_j}{x_\nu-x_j}\ ,\ \nu=0,\ldots,n\ ,$$

als die zu diesen Knoten gehörenden Lagrange-Grundpolynome.

Man erkennt unmittelbar

(1) $l_\nu\in\pi_n$,

(2) $l_\nu(x_k)=\delta_{\nu k}$, $0\leq\nu,k\leq n$. (Kroneckersymbol)

Also hat das Polynom $p\in\pi_n$,

$$p(x) := \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu l_\nu(x) \quad ,$$

die Eigenschaft

$$p(x_k) := \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu l_\nu(x_k) = y_k \quad ,$$

es ist also eine Lösung des Problems und auch die einzige. (Lagrange-Darstellung).

F: Daneben gibt es die Newtondarstellung. Was sind die Vorteile?

3.3 Die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms

Nachdem man in π_n eine Basis $\{u_\nu \mid \nu = 0, \ldots, n\}$ gewählt hat, läuft die Bestimmung des Interpolationspolynoms p auf die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu u_\nu(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

hinaus. Im Fall der Lagrange-Basis $u_\nu = l_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, ist die Matrix $(u_\nu(x_k))$ dieses Gleichungssystems die Einheitsmatrix, also von extrem einfacher Bauart. Allerdings ändern sich alle Lagrange-Grundpolynome, wenn man nur einen einzigen Knoten ändert, wie

man an der Definition von $l_\nu, \nu=0,1,\ldots,n$, unmittelbar sieht.

Der Grundgedanke der Newton-Darstellung besteht darin, eine Basis $\{u_\nu \mid \nu=0,1,\ldots,n\}$ so zu wählen, daß $(u_\nu(x_k))$ eine Dreiecksmatrix ist. Dazu setzt man rekursiv

$$u_0(x)=1,$$

$$u_\nu(x)=(x-x_{\nu-1})u_{\nu-1}(x), \quad \nu=1,\ldots,n,$$

d.h. explizit

$$u_\nu(x)=\prod_{\mu=1}^{\nu}(x-x_{\mu-1}), \quad \nu=1,\ldots,n.$$

Die u_ν heißen Newton-Grundpolynome. Für $\nu=0,1,\ldots,n$ folgt

$$u_\nu(x_k)=\begin{cases} 0 & , \quad k<\nu, \\ \prod_{\mu=1}^{\nu}(x_k-x_{\mu-1}) & , \quad k\geq\nu; \end{cases}$$

die Matrix $(u_\nu(x_k))_{\substack{k=0,\ldots,n \\ \nu=0,\ldots,n}}$ hat also Dreiecksgestalt,

$$(u_\nu(x_k))_{\substack{k=0,\ldots,n \\ \nu=0,\ldots,n}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_2-x_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & x_n-x_0 & \cdots & \cdots & \prod_{\mu=0}^{n-1}(x_n-x_\mu) \end{pmatrix}$$

F: Wie sieht die Matrix aus, wenn Sie die Monom-Darstellung

wählen?

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Vandermonde-Matrix ist mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden.

F: Was ist die Bézier-Darstellung und für was wählt man diese?

Da die Bernstein-Grundpolynome $b_{\nu n}$, $\nu = 0, \ldots, n$, eine Basis von π_n bilden, können wir jedes Polynom $p \in \pi_n$ bezüglich dieser Basis darstellen in der Form

$$p = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu b_{\nu n}.$$

der sogenannten Bézier-Darstellung von p. Die Koeffizienten β_ν heißen Bézier-Koeffizienten; die Punkte $\begin{pmatrix} \frac{\nu}{n} \\ \beta_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ werden Bézier-Punkte genannt. Außerdem hat man den Begriff des Bézier-Polygons eingeführt, das dadurch entsteht, daß man die Bézier-Punkte

geradlinig verbindet. Da nur b_{0n} und b_{nn} die Eigenschaft der Lagrange-Grundpolynome $b_{0n}(0)=1$, $b_{nn}(1)=1$ haben, liegen i.a. nur die Ecken $(0;\beta_0)^T$ und $(1;\beta_n)^T$ des Bézier-Polygons auf dem Graphen des zugehörigen Polynoms. Die Bézier-Darstellung eines Polynoms hat besondere geometrische Eigenschaften, die bei Graphik-Anwendungen ausgenutzt werden.

F: Ist t in der Bézier-Darstellung $p(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\nu b_{\nu n}(t)$ nur für $t\in[0,1]$ definiert?

Nein, in der Bézier-Darstellung $p(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\nu b_{\nu n}(t)$ ist t in IR definiert.

F: Was ist konvex an der Bézier-Darstellung?

Innerhalb des konvexen Polygonzugs (konvexe Hülle) über die Bézierpunkte $\begin{pmatrix}\nu\\ \beta_\nu\end{pmatrix}$ liegt die Bézier-Darstellung.

F: Was ist ein polynomialer Spline?

(1) Die Funktion $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die folgenden Bedingungen:

i) S stimmt auf jedem Intervall $[\nu,\nu+1)$, $\nu\in\mathbb{Z}$, mit einem Poly-

nom $p_\nu \in \Pi_m$, $m \in \mathbb{N}$, überein.

ii) Es gilt $S \in C^{m-1}(\mathbb{R})$.

Dann heißt S polynomialer Spline vom Grad m (mit den Knoten $\nu \in \mathbb{Z}$).

(2) Ist $\tilde{S}:[k,l) \to \mathbb{R}$ die Restriktion eines polynomialen Splines S vom Grad m auf das Intervall $[k,l)$, $k,l \in \mathbb{Z}, k<l$, so heißt $\tilde{S}$ polynomialer Spline vom Grad m auf dem Intervall [k, l] (mit den Knoten $\nu, \nu = k, \ldots, l$).

Besonders wichtige Fälle sind

m = 1 : Polygonzug,

m = 2 : quadratischer Spline,

m = 3 : kubischer Spline.

4.6.2 Bemerkung

(1) Für einen polynomialen Spline S vom Grad m, $m \in \mathbb{N}$, mit Knoten $\nu \in \mathbb{Z}$ können wir die Darstellung

$$S(t) = \sum_{\mu=0}^{m} \beta_{\mu\nu} b_{\mu m}(t-\nu), \quad t \in [\nu, \nu+1), \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

verwenden. Mit den Bézierkoeffizienten können die Anschlußbedingungen berechnet werden.

F: Was ist die symbolische Cholesky-Zerlegung?

Ein lineares Gleichungssystem $Ax=b$, $A\in\mathbb{K}^{m\times m}$, $b\in\mathbb{K}^{m}$, mit einer hermiteschen, positiv definiten Matrix A kann man mit diagonaler Pivotwahl (ohne Vertauschung von Zeilen oder Spalten) unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung $A=LL^H$ auf zwei Gleichungssysteme in Dreiecksform zurückzuführen:

$$Ax=b \quad \Leftrightarrow \quad Ly=b,\ L^H x=y.$$

Falls A schwach besetzt ist, kann es sich aber empfehlen, trotzdem eine diagonale Pivot-Suche, die einer gleichlaufenden Umnumerierung der Unbekannten und der Gleichungen entspricht, durchzuführen. Man pivotisiert hier nicht aus Gründen der numerischen Stabilität, sondern um den "Fill-in", also das Auffüllen von $L+L^H$ durch Nichtnull-Elemente an Positionen (k, l), die bei A mit Null besetzt sind, möglichst klein zu halten. Dadurch wird der erforderliche Speicherplatz für L klein gehalten, und bei der anschließenden numerischen Faktorisierung nutzt man dieses Besetzungsmuster aus, um überflüssige Rechenoperationen (Addition oder Multiplikation mit Null) zu sparen.

Bei der Cholesky-Zerlegung einer schwach besetzten Matrix stellen sich mehrere Probleme:

Man ermittle möglichst vor der Faktorisierung das schlimmstenfalls auftretende Besetzungsmuster, um a priori den Speicherplatz bereitstellen zu können.

Man bestimme während der Faktorisierung eine Pivot-Wahl, die zu einem geringen zusätzlichen Fill-in führt.

Eine Mischung beider Strategien führt auf eine symbolische Faktorisierung, die nicht mit numerischen Werten, sondern unter einer worst-case-Annahme an Hand des Besetzungsmusters eines zugehörigen Graphen durchgeführt wird. Man prüft dabei durch logische (binäre) Entscheidungen, wie sich das Besetzungsmuster während der Cholesky-Zerlegung schlimmstenfalls ändern kann.

Die angesprochene worst-case-Annahme besteht darin, daß man eine eventuell auftretende numerische Kompensation von Größen, die von Null verschieden sind, durch arithmetische Operationen zu einem verschwindenden Resultat unberücksichtigt läßt. Während

bei der numerischen Durchführung der Cholesky-Zerlegung im Algorithmus 5.4.6 sich durch Kompensation einzelne $l_{ki}=0$ ergeben können, obwohl nicht alle Summanden a_{ki}, $l_{k\mu}\bar{l}_{i\mu}$ verschwinden, nimmt man bei der symbolischen Faktorisierung den schlimmsten Fall an. Dies bedeutet, daß man für l_{ki} einen von Null verschiedenen Wert erwartet, falls auch nur einer der Summanden a_{ki}, $l_{k\mu}\bar{l}_{i\mu}$ mit $\mu=1,\ldots,i-1$ von Null verschieden ist. Man erhält dadurch für L ein Besetzungsmuster mit der größtmöglichen Anzahl von besetzten Elementen, die bei einer numerischen Faktorisierung auftreten können. Dies bedeutet, daß das Besetzungsmuster von $F:=L+L^H$ i.a. dichter ist als das von A, d. h., daß der Graph G_F mehr Kanten enthält als G_A. Genauer gilt, wie man dem Algorithmus 5.4.6 (Cholesky-Crout) entnimmt:

6.5.2 Satz

Es sei $G_A:=(X,E_A)$, $X=\{1,\ldots,m\}$, ein zu der positiv definiten Matrix A und $G_F:=(X,E_F)$ ein zu $F:=L+L^H$ gehörender Graph, wobei $A=LL^H$ eine Cholesky-Zerlegung von A sei. Dann gilt unter der Annahme, daß keine numerische Kompensation eintritt:

$$(k,l)\in E_F \Leftrightarrow \begin{cases} & (1)\ (k,l)\in E_A \\ \text{oder} & (2)\ \text{es existiert ein } \mu \text{ mit } 1<\mu<\min(k,l), \\ & \quad \text{so daß } (k,\mu)\in E_F \text{ und } (l,\mu)\in E_F \end{cases}$$

F: Wie ist ein Graph definiert?

6.3.1 Definition (ungerichteter Graph)

(1) Ein Tupel G := (X, E) heißt (ungerichteter) Graph, wenn folgendes gilt:

i) X ist eine nichtleere, endliche Menge, deren Elemente Knoten genannt werden.

ii) E ist eine symmetrische Teilmenge (eine symmetrische zweistellige Relation) des kartesischen Produkts $X\times X$: Aus $(x,y)\in E$ folgt $(y,x)\in E$ für alle $x,y\in X$. Die Elemente von E heißen Kanten.

F: Was wissen Sie zur Minimalkrümmungseigenschaft von B-Splines?

4.8.1 Satz (Minimalkrümmungseigenschaft)

Für einen gegebenen Datensatz y_ν, $\nu=0,\ldots,k$, und gegebene Anfangssteigungen m_0, m_k minimiert der interpolierende kubische Spline unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen das

Integral über das Quadrat der zweiten Ableitung:

$$\int_0^k [S''(x)]^2 dx = \min_{f \in M}\left([f''(x)]^2 dx\right),$$

wobei

$$M := \{f \in C^2[0,k] \mid f(\nu) = y_\nu,\ \ \nu = 0,\ldots,k,\ \ f'(0) = m_0,\ \ f'(k) = m_k\}$$

sei. Man bezeichnet dies als die Minimalkrümmungseigenschaft der interpolierenden kubischen Splines, da $\int_0^k [f''(x)]^2 dx$ eine gute Näherung für die mittlere Krümmung $k(f)$ einer Funktion f darstellt.

Fazit

Die Prüfung verlief in sehr angenehmer Atmosphäre. Prof. Skrzipek ist nett und geduldig. Das Verständnis der Zusammenhänge ist ihm wichtiger als auswendig gelernte Formeln.

Ich möchte alle, die dieses Prüfungsprotokoll zur Vorbereitung auf Ihre mündliche Prüfung nutzen, daran erinnern, daß es durchaus fair ist, wenn sie selbst dann anschließend auch ein Prüfungsprotokoll verfassen und dies veröffentlichen. Wenn man von vorhergehenden Kommilitonen profitiert, kann man durchaus auch nachfolgenden Kommilitonen helfen.

Vordiplomprüfung "Numerische Mathematik I"

Datum: 31.8.2006

Prüfer: Prof. Skrzipek
Beisitzer: Herr Horst

Themen:

- selbstausgewähltes Einstiegsthema: Interpolation (Kommentar Skrzipek: " Das machen 90% der Studenten".)
  - Erläuterung der Idee
  - Eindeutigkeit
  - Existenz
  - Lagrange-Darstellung
  - Newton-Darstellung
- trigonometrische Interpolation
  - Erläuterung der Idee
  - Einheitswurzeln
  - Eigenschaften der Matrix W
  - Komplexität
- diskrete Fouriertransformation und FFT
  - explizite Angabe der diskreten Fourierkoeffizienten
  - Idee der FFT
  - Faltungssatz
  - Schmetterlingsschema
  - Mündliche Beschreibung der expliziten Form
- Bernstein-Polynome
  - Definition
  - Eigenschaften
  - Bezier-Darstellung
  - Bezier-Punkte und konvexe Hülle; wofür ist die konvexe Hülle gut?
  - Nachweis, dass die b_{\nu n} eine Basis des \Pi_n sind
- Splines
  - de Boor-Punkte
  - Definition eines Splines; sind Polynome Splines?
  - Welche Anschlussbedingungen braucht eine stückweise polynomiale Funtion, damit sie ein Spline ist?
- numerische Cholesky-Zerlegung
  - Vorraussetzungen
  - Erläuterung und Herleitung der Cholesky-Zerlegung
- symbolische Cholesky-Zerlegung
  - wofür benutzt man es?
  - was ist Fill-in?
  - kleines Beispiel für das ’Herleiten’ eines Graphen aus dem Besetzungsmuster einer symmetrischen, pos. def. Matrix
  - wie funktioniert der Algorithmus?
  - kurze Anmerkung zu Minimum-Degree-Algorithmus
- Quadratur:
  - Idee der Quadratur
  - Herleitung der Gewichte bei der interpolatorischen Quadratur
  - Genauigkeit der Quadratur; maximale Genauigkeit
  - Idee der Gauss-Quadraturformeln
  - Fehlerdarstelung des Quadraturfehlers

Herr Skrzipek ein freundlicher Prüfer, der Kandidaten für sehr gute Noten ausführlich prüft. Die Notengebung

entsprach bei mir der gezeigten Leistung.
Es ist auf jeden Fall wichtig, sich nicht nur die Definitionen und Sätze einzuprägen, sondern auch die Ideen zu verstehen, die dahinter stehen; dazu gehört es auch, die Beweisideen wiedergeben zu können. Auch ist es gut zu wissen, welche Anwendungsbeipiele es für die Verfahren gibt.

mündl. Prüfung Numerische Mathematik I

Datum: 17.8.2006
Prüfer: Prof. Skrzipek
Besitzer: Dipl.-Math. Horst
Note: 1,0

Themen der Prüfung

Selbstgewähltes Einstiegsthema: lineare Gleichungssysteme
Was ist ein lineares Gleichungssystem und warum reduziert man Matrizen zu deren Lösung?
Wie funktioniert der Gauss-Algorithmus?
Und was ist das Cholesky Verfahren? (Hier wurde auch nachgefragt ob die Vorraussetzung 'positiv definit' auch für die Matrizen A_{m-1} gilt. Ja, jedoch musste das nicht bewiesen werden.)
Erklären Sie die symbolische Cholesky Zerlegung? Wo kann eventuell Auslöschung auftreten und ist das im Algorithmus berücksichtigt?
Warum wendet man den Cuthll-McKee Algorithmus an und was passiert da hinsichtlich des linearen Gleichungssystems? (Es handelt sich um eine Umsortierung des Gleichungssystems.)

Interpolation
Was ist das Interpolationsproblem? Beweisen Sie dass es eine eindeutige Lösung gibt. (Beweis mit Lagrange-Polynomen zur Existenz und Widerspruch für die Existenz verschiedener Interpolationspolynome.)
Definition Newton-Polynome. Was sind die Vorteile dieser Darstellung?
Def. von Splines ?
Wie sind Bernstein-Polynomen definiert und warum benutzt man sie? Wie sehen Bernstein-Polynome aus? (Zeichnung mit Bernstein-Polygon und Anschlussbedingungen).

Fourier-Transformation
Was ist das Ausgangsproblem und Lösungsansatz der Fourier-Analyse? (Interpolationspolynom mit N-ten Einheitswurzeln als Stützstellen, Matrix W_N, diskreter Fourier-Operator)
Wie funktioniert die Fast Fourier-Transformation? (Schmetterlingsschema und Dreiecksschema.) Gibt es tatsächlich eine Zeitersparnis? (Ja, von N^2 nach kN. Ein weiterer Beweis wurde hier nicht gefragt.)

Fazit
Prof. Skrzipek ist ein sehr angenehmer Prüfer. Er lässt einen erstmal erzählen und fragt dann bei etwaigen Ungenauigkeiten noch mal nach. Es ist ihm wichtig, dass man verstanden hat warum man diesen oder jenen Ansatz verwendet und dass man auf Nachfrage auch Details der Vorrausetzungen etc. nennen kann. Die Prüfung dauerte 45 min, jedoch hatte Prof. Skrzipek auf dem Studientag bereits angekündigt, dass er sehr gute oder sehr schlechte Prüflinge manchmal länger befragt. Prädikat: sehr empfehlenswert!