Mathematik Diplom II
Diplomprüfung in 01312 Algebra 1 (Stand SS08), 01212 Lineare Optimierung (Stand SS13)
Prüfer: Prof. Duma, Prof. Hochstättler
01.12.2015, 2x20 min, Note: 1,0

Die Prüfung ist schon reichlich zwei Wochen her. Hier ist das, woran ich mich erinnere:

Lineare Optimierung

- LP in Standardform und kanonischer Form → Verwendung für Simplexalgorithmus resp. Polyedertheorie, weil ...
- Techniken zum äquivalenten Umformen (Achtung: Aufspaltung nicht vorzeichenbeschränkter Variablen ist nicht eineindeutig)

Polyedertheorie

- Definition einer Seite mittels gültiger Ungleichung → Dimension der Seite erkennt man erst bei Formulierung mit Gleichheitsmenge → es gibt nur endliche viele Seiten
- Def. Polyeder, polyedrischer Kegel, $\mathcal{E}$-Kegel, $\mathcal{V}$-Polyeder
- Äquivalenz der Polyederbegriffe (Fundamentalsatz der Polyedertheorie):
  - Satz von Weyl: Jeder $\mathcal{E}$-Kegel ist polyedrischer Kegel. Beweis für den volldimensionalen Fall bis zu dem Punkt, an dem die Matrix A konstruiert wird, ausführlich, dann genügte die Nennung der homogenen Trennungsversion von Farkas' Lemma (für die Existenz der trennenden Hyperebene) und der dichten Version von Farkas' Lemma (liefert Dimension $n-1$) für die Gleichheit
  - Satz von Minkowski: Jeder polyedrische Kegel ist ein $\mathcal{E}$-Kegel. Beweis verwendet Satz von Weyl und Polarisierungstrick (nennen genügte)
  - (De)Homogenisierung liefert den Rest

Simplexalgorithmus

- optimale Lösung ist immer eine Ecke, deshalb bei Suche Beschränkung auf den Rand des Polyeders möglich
- zulässiger Bereich ist immer spitzes Polyeder oder leer, deshalb Simplex anwendbar
- Nichtnegativitätsbedingung versteckt sich in der rechten Seite ($b \geq 0$), Spalte in Matrix liefert Kantenrichtung
- zulässige Startecke nicht gegeben → mit Hilfsproblem (2-Phasen-Simplex) oder Big-M finden (so sie existiert)
- geometrische Beschreibung des Simplexalgorithmus: u.a. Startecke, reduzierte Kosten anschaulich (spitzer Winkel etc.), Pivotregeln (wozu?, Bsp.), Gauß-Jordan-

Schritt = Basiswechsel (benachbarte Basen), laufen von einer Ecke zur nächsten, Schrittweite durch Minimalquotiententest bestimmen (also basisverlassendes Element), stoppt, wenn alle reduzierten Kosten ≤ 0 (Nachweis der Optimalität mit $c^\top \leq c_B^\top A_{\cdot B}^{-1} A$ und $u^\top = c_B^\top A_{\cdot B}^{-1}$, duales Problem)

- Dualitätssatz (Ich habe die Formulierung von Wikipedia: „Lineare Optimierung" verwendet, weil ich diese eingängiger finde, als die im Skript), Beweis mit Farkas
- Komplexität des Simplexalgorithmus: Klee-Minty-Würfel (= Beispiel, dass Simplexalg. mit Blands Rule nicht polynomial sein kann; wurde auf andere Pivotregeln übertragen), Schatteneckenalgorithmus (im Mittel $\frac{n}{2}$, verlangt Daten in allgemeiner Lage, was im Allgemeinen nicht erfüllt ist), Ellipsoidmethode (Separieren so schwer wie Optimieren, macht polynomialen Zulässigkeitstest), Karmarkarverfahren (Innere-Punkt-Methode, polynomial), streng polynomial

Meine Lernempfehlung

- Alle Sätze, die einen Namen haben, nennen und beweisen können. Bei Farkas genügen die Beweise für die Versionen, die in wichtigen Sätzen verwendet werden.
- Für das Verständnis des Simplexalgorithmus fand ich die Folien des Studientages hilfreich.
- Anhand der Folien des Studientages sind wichtige Inhalte und deren Gewichtung ersichtlich (Achtung: bei den ausführlichen Folien wurden handschriftlich Fehler behoben, die in der Druckversion noch drin stehen, Stand: SS13)
- Formeln brauchen nicht sinnlos auswendig gelernt zu werden (außer Standarddinge, wie z.B. die reduzierten Kosten)

Algebra 1

Gruppentheorie

- Gruppe operiert auf einer Menge, Bahn, Standgruppe (= Stabilisator = Isotropiegruppe), Fixpunkte, transitive Operation, Normalteiler, für Normalteiler N ist die Menge G/N der Linksnebenklassen eine Gruppe (Faktorgruppe), was für Untergruppen nicht gilt, Untergruppen kommutativer Gruppen
- p-Sylowsätze: nennen, Beweis des ersten Teils des 2. Sylowsatzes, Beweisskizze des 3. Satzes, Anwendung des 3. Sylowsatzes für $|G| = 15$ angesprochen

Körpertheorie

- verschiedene Körpererweiterungen nennen und teilweise definieren (endlich, algebraisch, transzendent, normal, separabel, galoissch, einfach)
- alle Definitionen, die für den Hauptsatz der Galoistheorie eine Rolle spielen (Körperautomorphismen, Galoisgruppe, ...), äquivalente Bedingungen für Galoiserweiterung

- Hauptsatz der Galoistheorie aufschreiben
- alle Sätze/ Lemmata, die im Beweis eine Rolle spielen ohne Beweis (Lagrange, Grad-Satz, konjugierte Elemente, Nullstellen werden auf ebensolche abgebildet, endliche Körpererweiterungen sind algebraisch, K-Automorphismus von L auf Zwischenkörper F einschränken, Satz von Artin, Teilkörper einer normalen resp. separablen KE, ...), teilweise habe ich gesagt, an welcher Stelle sie gebraucht werden
- Anwendungen des Hauptsatzes der Galoistheorie (Satz vom primitiven Element, $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen, Gleichungen durch Radikale auflösbar) - nennen reichte im Wesentlichen aus

Meine Lernempfehlung

- Homomorphiesatz, Isomorphiesätze, p-Sylowsätze, Haupsatz der Galoistheorie incl. Beweis
- dafür notwendige Definitionen und Hilfssätze kennen
- Anwendungen/ Beispiele dafür
- beim Rest auf Definitionen und Beispiele/ Anwendungen beschränken
- die Vorlesung in Hagen ist sehr umfangreich, diese Stoffmenge ist in einer Präsenzvorlesung nicht schaffbar (ich habe die Vorlesung nicht in Hagen gemacht und habe mir nur das Skript besorgt)
- evtl. beim Prüfer nachfragen

Zur Prüfungsatmosphäre

Es war eine sehr nette Prüfung. Ich möchte mich hier noch einmal besonders bei Professor Duma bedanken, der mir die Prüfung in Algebra 1 ermöglicht hat. Das war meine Lieblingsvorlesung, und ich hatte arge Probleme, einen Prüfer dafür zu finden. Es war eine sehr wohlwollende Atmosphäre. Ich habe nachgefragt, wenn mir eine Frage unklar war. Beim Beweis des zweiten Sylowsatzes habe ich Zeit verplempert, weil ich zu sehr ins Detail gegangen bin und an einer Stelle nicht weiter kam. Eigentlich war nur die Beweisskizze gefragt, und die konnte ich. Ich hatte den Eindruck, dass es den Prüfern darum ging, zu sehen, ob ich das Wesen des Stoffes verstanden habe, wie ich denke und mich darin bewege. Sie erwarten/ wollen nicht, dass die ganze Vorlesung bis ins kleinste Detail auswendig gepaukt und ohne Sinn und Verstand herunter gebetet wird. Nachdenken und kleine Fehler sind erlaubt. Gegebenenfalls wird ein kleiner Hinweis gegeben (ohne dabei vorzusagen), so dass man die Chance hat, dies zu korrigieren. Ich kann beide Prüfer nur wärmstens empfehlen - auch für sehr aufgeregte oder ängstliche Studenten. Ich wünsche euch viel Erfolg bei Euren Prüfungen.