Prüfungsprotokoll

Prüfer: Dr. Rosen
Kurs: Funktionentheorie I
Datum: 14.12.2015

- Wie ist komplexe Differenzierbarkeit definiert?
- Gibt es äquivalente Kriterien? (Cauchy-Riemannsche Dgl)
- Wie kommt man auf die CR-Dgl? (Annährung parallel zur reellen bzw. imaginären Achse, siehe Kurstext)
- Wie ist das komplexe Integral definiert?
- Welche Kriterien gibt es für die Integrierbarkeit?
- Warum hat f(z)=1/z keine Stammfunktion? (f integriert längs des Einheitskreises ist ungleich Null)
- Wie lautet das Integrabilitätskriterium für Sterngebiete?
- Wie lautet der Cauchy'sche Integralsatz? Wie könnte man ihn beweisen? (Kombination Integrabilitätskriterium und Goursat'sches Integrallemma + Beweis)
- Was kann man damit machen? (Mittelwertgleichung, Maximumprinzip+Beweis)
- Jetzt kann man das ja auch erweitern. Wie geht das? (Identitätssatz+Beweis)
- Was ist ein Residuum? Wieso nennt man es auch Rest? (Definiert über Laurentreihe, Rest, weil Integral von f(z) mit Singularität in a integriert das Residuum gibt (ich hab es über den Residuensatz erklärt, es gab aber auch eine andere Begründung))
- Wie lautet der Residuensatz?
- Kennen Sie eine Anwendung? (Integration reeller, uneigentlicher Integrale)

Ein sehr freundliches und faires Prüfungsgespräch. Viel Glück euch allen bei euren mündlichen Prüfungen!

Gedächtnis-Prüfungsprotokoll - Funktionentheorie I (01340)

Prüfer: Dr. Rosen

Beisitzer: Dr. Wiegner

Dauer: 25 min

Note: 1,0

Fragen: (nur nach Erinnerung, ohne Gewährleistung, insb. der Vollständigkeit oder Reihenfolge)

-> Wann heißt eine Funktion f im Punkt z0 komplex differenzierbar?

-> Gibt es äquivalente Kriterien?

Hier waren die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gefragt. Ich habe direkt mit eingestreut, dass man die beiden auch zu f_x + if_y = 0, also 2 mal f abgeleitet nach z quer = 0 mit den Wirtinger-Ableitungen zu einer CRDGL zusammenfassen kann.

-> Dreh- und Angelpunkt der Funktionentheorie ist ja der Cauchy'sche Integralsatz. Wie lautet er, und wie könnte man ihn beweisen, im Sinne einer Beweisidee?

Hier habe ich zunächst gesagt, dass für eine Funktion f: U -> |C (U ein Bereich) die Aussagen "Geschlossene Kurvenintegrale in U verschwinden" und "f besitzt eine Stammfunktion in U" äquivalent sind. Dann der CIS: Wenn U z.B. ein Sterngebiet ist, dann besitzt f eine Stammfunktion in U. Beweis: Man definiert eine Funktion F(z) als Integral über die Verbindungsstrecke von z* bis z, wobei z* ein Sternmittelpunkt von U sei, und muss dann (nach einem kleinen Missverständnis - Herr Rosen wollte auf Wegeunabhängigkeit hinaus, aber ich hatte die SF direkt "eng" über die Verbindungsstrecke definiert) zeigen, dass | (F(z)-F(z0))/(z-z0) - f(z0) | -> 0 für z -> z0. Dabei helfen einem die Standardabschätzung für Integrale und das GOURSAT'sche Dreieckslemma, das man vorher schon beweisen kann und bewiesen haben sollte.

(Es fiel mir ein wenig schwer, die "Beweisidee" des CIS zu bringen, ohne zu sehr in die Details zu gehen. Das vielleicht als Tipp zur Vorbereitung: Neben dem akribisch-formal-detaillierten Durcharbeiten eines Beweises unbedingt auch mal möglichst prägnant in drei oder vier Stichpunkten zusammenfassen, was mathematisch eigentlich in dem Beweis passiert, welche Schritte man ausführen muss, OHNE diese aber tatsächlich auszuführen.)

-> Können Sie auch das Dreieckslemma beweisen?

Ja. Dreieck skizziert, Aufteilung in 4 Dreiecke, Abschätzung, Iteration des Prozesses, <= 4^n - jetzt muss man den Rest weiter abschätzen und dabei vor allem mal diese 4^n wegkriegen, denn so sieht es ja aus, als könnte das ziemlich groß werden.

Ganz entscheidender Punkt in diesem Beweis: Über das Intervallschachtelungsprinzip (ich habe noch eingestreut, dass |C ja genauso vollständig ist wie |R) zieht sich die Dreiecksfolge auf einen Punkt zusammen, man weiß nicht genau wo, aber dass er existiert; und in diesem Punkt nutzt man die Holomorphie der Funktion aus, schreibt sie als Polynom 1. Grades + Rest, und Polynome 1. Grades

haben eine Stammfunktion, liefern also Integralwert Null. Dann zwei mal geometrische Gegebenheiten bzgl. des Dreiecksumfangs ausnutzen, um 4^n wegzubekommen und n -> inf => z -> z0 (Dreiecke ziehen sich zusammen) => r(z) -> 0, also Integral -> 0.

-> Ich weiß nicht mehr ganz genau, wie, aber irgendwie ging es dann weiter zur Cauchy'schen Integralformel. Wenn die drankommt, empfiehlt es sich (zumindest für Verpeilte wie mich), als allererstes mal den Faktor 1/(2pi·i) vor's Integral zu schreiben, damit man ihn nicht mehr vergessen kann.

-> Was kann man denn dann damit machen?

Es gibt zwei Zusammenhänge, bei denen aus der Beschränktheit einer Funktion direkt folgt, dass sie dann konstant sein muss. Die eine davon ist der Satz von Liouville: Wenn eine Funktion auf ganz |C definiert und holomorph (holomorph heißt: |C-differenzierbar auf einer offenen Menge) ist, muss sie unbeschränkt sein. Oder anders gesagt: Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

[Nachträgliche Anmerkung: Der andere Zusammenhang, auf den ich evtl hätte hinauswollen, war das Maximumprinzip und hier ist das, was ich gesagt habe, nicht ganz richtig. Wenn man aus dem Definitionsbereich D_f einer Funktion irgendeine kompakte Umgebung K herausnimmt, ist darauf die Funktion natürlich beschränkt und wenn man aus K dann wiederum eine offene Menge U herausnimmt, so ist darauf natürlich die Funktion immer noch beschränkt. Beim Maximumprinzip kommt es darauf an, dass die Funktion ihr Maximum ANNIMMT, bzw. dass Supremum von f = Maximum von f auf U.]

Dafür braucht man aber erstmal noch die Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen (hingeschrieben), die man praktisch geschenkt bekommt, wenn man weiß, dass man unter dem Integral (Integrationsvariable war in diesem Fall zeta) nach z differenzieren darf.

Damit bekommt man die Cauchy'schen Ungleichungen für Ableitungen (hingeschrieben und bewiesen).

-> Und was kann man dann damit machen?

Ich steckte noch völlig im Liouville-Film, Dr. Rosen wollte aber darauf hinaus, dass Ungleichungen für Ableitungen auch Ungleichungen für Taylorkoeffizienten mitbringen. Dieses kleine Missverständnis war aber nicht schlimm, er hat dann ein wenig nachgeholfen mittels der Frage, wie denn die Taylorkoeffizienten im Reellen aussehen. In meiner Nervosität habe ich zwischendurch auch noch vom Potenzreihenentwicklungssatz erzählt und davon, dass die Beweisidee ist, den im Integranden auftretenden Cauchykern 1/(zeta - z) in eine geometrische Reihe um den Kreismittelpunkt a (wobei z aus dem Inneren des Kreises sein muss) zu entwickeln.

[Wie gesagt, kein Anspruch auf Vollständigkeit. Kann sein, dass hier etwas fehlt.]

-> Dann mache ich mal einen Sprung. Was sind denn isolierte Singularitäten?

Hier habe ich nach der etwas missverständlichen Auseinandersetzung über Abschätzungen für Taylorkoeffizienten noch mal richtig aufgedreht und zügig alle drei Arten von Singularitäten nacheinander beschrieben:

- Allgemeine Definition isolierter Singularitäten: lernen! :-)

- Hebbare Singularität: Wenn f in a eine Singularität hat, in diese aber holomorph fortsetzbar ist, so wie etwa sin(z)/z. Dafür reicht es bereits, wenn f in einer [nachträgliche Anmerkung: PUNKTIERTEN! - dieses Fehlerchen meinerseits scheint aber nicht besonders ins Gewicht gefallen zu sein] Umgebung von a beschränkt ist (Riemann'scher Hebbarkeitssatz).

- Polstelle m-ter Ordnung: Wenn lim_z->a (z-a)^m·f(z) existiert und ungleich Null ist, hat f in a eine Polstelle m-ter Ordnung.

- Wesentliche Singularität: Wenn in der Laurentreihenentwicklung von f um a unendlich viele der Laurentkoeffizienten a_n für n<0 ungleich 0 sind, etwa bei exp(1/z). Hierzu gibt es den großen Satz von Picard, der besagt, dass in jeder noch so kleinen Umgebung einer wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl unendlich oft als Funktionswert auftritt, mit einer eventuellen Ausnahme.

[Hier haben wir kurz ein paar Worte über diesen Satz ausgetauscht, incl. einer auflockernden Bemerkung. :-)

(1) Im Nachhinein glaube ich, dass es hochgradig gut war, von mir aus bei den hebbaren Singularitäten den Riemann'schen Hebbarkeitssatz und bei den wesentlichen Singularitäten den großen Picard anzuführen. Man könnte evtl. auch Casorati-Weierstrass nehmen, auch wenn der etwas schwächer ist.

(2) Jede der drei Arten von Singularitäten hat ja ihre Charakterisierung in der Laurentreihe um a. Es wird aber monoton, wenn man dies für alle drei Arten erklärt. Es bei einer der drei Arten zu machen, sollte reichen, auch um erkennbar werden zu lassen, dass man weiß, was eine Laurentreihe ist und dass / wie die mit Singularitäten zusammenhängt.]

-> Was versteht man unter einem Residuum?

Koeffizient a_-1 in der Laurentreihenentwicklung von f um a. Am (noch da stehenden) Beispiel exp(1/z) durch in diesem Fall sehr einfache Reihenentwicklung das Residuum 1 ausgerechnet.

-> Was kann man damit machen?

Residuensatz hingeschrieben, zunächst für eine einfach geschlossene linksrum laufende Kurve gamma, dann allgemein für einen Zyklus Gamma, also mit Umlaufszahl.

Hier war die Prüfung zu Ende. Es war mir bei Weitem nicht vorgekommen wie 25 min, eher wie 10-15. Was nicht dran war, ich aber noch als absolut wichtig für eine Funktionentheorie-Prüfung erachten würde:

- einmal auf offener Menge |C-diff'bar <=> beliebig oft auf offener Menge |C-diff'bar

- Anwendungen des Residuensatzes insb. auf reelle Integrale

- Fundamentalsatz der Algebra mit Liouville beweisen - dabei darauf achten, dass man verstanden hat, warum bei nullstellenfreiem nichtkonstanten p die Reziproke 1/p beschränkt sein muss und das zeigen kann!

- Mittelwertgleichung, Maximumprinzip, Konvergenzsatz von Weierstrass, Identitätssatz (mit Beweisen)

- Offenheitssatz, Gebietstreue (nach meiner pers. Einschätzung reicht ohne Beweis, oder mit kleinen Beweisideen - Hauptsache, Kenntnis der Sätze)

Und bestimmt habe ich noch jede Menge vergessen. :-)

Es wird zum Teil sehr offen und fast unbeschränkt ("Was kann man denn mit dem Cauchy'schen Integralsatz dann machen?"), aber zum Teil auch sehr kompakt ("Wann heißt eine Funktion f im Punkt z0 komplex differenzierbar?") gefragt. Man sollte auf beide Arten von Fragen eingestellt sein.

Die Atmosphäre war hochgradig angenehm. Ich war natürlich pünktlich, bereits relativ knapp (7 Minuten vorher), Herr Rosen saß schon in seinem Büro, um 11 kam Herr Wiegner aus dem Nachbarbüro rüber und es ging sofort los. Beide Lehrenden waren absolut ruhig, freundlich und humorvoll, so dass sich meine durchaus vorhandene Nervosität nicht so schlimm auswirkte. Vor allem dann, wenn man komplexe Analysis ein wenig interessant findet, kann ich eine mündliche Prüfung bei Herrn Rosen für Funktionentheorie I vorbehaltlos empfehlen!