1601 Formale Grundlagen der Informatik

Lösungsvorschläge zur Klausur

Aufgabe 1: ***8 Punkte***

Kardinalität	0	1	2	3	4
A			X		
$\mathcal{P}(A)$					X
$A \cap B$		X			
$A \cup B$				X	
$\{A\} \cap \{B\}$	X				
$\{A\} \cup \{B\}$			X		
$A \times B$					X
$A \setminus B$		X			

$|A| = |\{a,b\}| = 2$

$|\mathcal{P}(A)| = |\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}| = 4 = 2^{|A|}$

$|A \cap B| = |\{a,b\} \cap \{b,c\}| = |\{b\}| = 1$

$|A \cup B| = |\{a,b\} \cup \{b,c\}| = |\{a,b,c\}| = 3$

$|\{A\} \cap \{B\}| = |\varnothing| = 0 \quad (\text{da } A \neq B)$

$|\{A\} \cup \{B\}| = |\{A,B\}| = 2$

$|A \times B| = |\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}| = 4 = |A| \cdot |B|$

$|A \setminus B| = |\{a,b\} \setminus \{b,c\}| = |\{a\}| = 1$

Aufgabe 2: *10 Punkte*

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
reflexiv	X			X
irreflexiv		X		X
symmetrisch	X			X
antisymmetrisch		X	X	
transitiv	X		X	

R_1 ist reflexiv: $(a,a),(b,b),(c,c) \in R_1$.

R_1 ist *nicht* irreflexiv, da reflexiv.

R_1 ist symmetrisch: $(b,c),(c,b) \in R_1$, etc.

R_1 ist *nicht* antisymmetrisch: $(b,c),(c,b) \in R_1$, aber $b \neq c$.

R_1 ist transitiv: $(b,c),(c,b),(b,b) \in R_1$, etc.

R_2 ist *nicht* reflexiv: $(c,c) \notin R_2$.

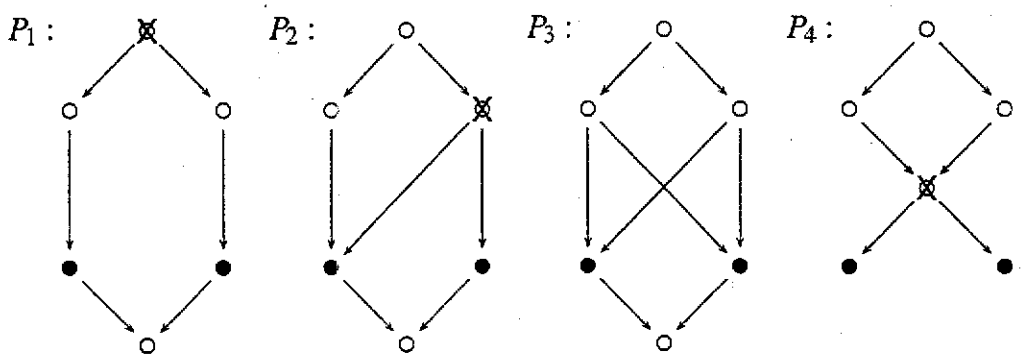
R_2 ist *nicht* irreflexiv: $(a,a) \in R_2$

R_2 ist *nicht* symmetrisch: $(b,c) \in R_2$, $(c,b) \notin R_2$.

R_2 ist antisymmetrisch: Wenn $(x,y),(y,x) \in R_2$, dann $x = y = a$ oder $x = y = b$.

R_2 ist transitiv: $(a,b),(b,c),(a,c) \in R_2$, etc.

Aufgabe 3: *8 Punkte*



In der Halbordnungen P_3 besitzt die Menge der beiden geschwärzten Elemente *kein Supremum*, da die Menge ihrer oberen Schranken kein kleinstes Element enthält.

	P_1		P_2		P_3		P_4	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein
Verband?	X		X			X		X

P_1 und P_2 sind Verbände, da es zu jeder ihrer zweielementigen Teilmengen ein Supremum und Infimum gibt. P_3 ist kein Verband, da die Menge der beiden geschwärzten Elemente kein Supremum besitzt. P_4 ist kein Verband, da die Menge der beiden geschwärzten Elemente kein Infimum besitzt.

Aufgabe 4: *6 Punkte*

	f		g	
	ja	nein	ja	nein
injektiv	X		X	
surjektiv	X			X
total		X	X	

f ist injektiv: Wenn $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, dann $x = y$.

f ist surjektiv: Wenn $y \geq 1$, dann $0 < \frac{1}{y} \leq 1$ und $f(\frac{1}{y}) = y$.

f ist *nicht* total, da $f(x)$ für $x = 0$ nicht definiert ist.

g ist injektiv: Wenn $\frac{1}{2 \cdot x} = \frac{1}{2 \cdot y}$, dann $x = y$.

g ist *nicht* surjektiv: Wenn $x > 2$, dann $0 < \frac{1}{2 \cdot x} < 1$, also $g(x) \neq 0$.

g ist total, da $g(x)$ für alle $x > 2$ definiert ist.

Aufgabe 5: *12 Punkte*

Formel	erfüllbar		allgemein-gültig		inkonsistent		in VNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$	X			X		X		X	4
$(\neg C \vee D) \to (C \to D)$	X		X			X		X	4
$(C \to (C \wedge D)) \wedge (\neg(D \wedge C) \wedge C)$		X		X	X			X	0
$\neg((\neg C \vee D) \to (C \to D))$		X		X	X			X	0

Lösung zum Beispiel mit Wahrheitswertetafeln

A	B	C	$A \to B$	$\neg A \to C$	$(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

C	D	$C \to D, \neg C \vee D$	$(\neg C \vee D) \to (C \to D)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

C	D	$C \wedge D$	$\neg(D \wedge C)$	$C \to (C \wedge D)$	$(\neg(D \wedge C) \wedge C)$	$(C \to (C \wedge D)) \wedge (\neg(D \wedge C) \wedge C)$
T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F

$\neg((\neg C \vee D) \to (C \to D))$: Verneinung der zweiten Formel

Aufgabe 6: *20 Punkte*

a) Ausgangsformel: $(A \to B) \vee C$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$A \wedge B \wedge C$		X
$\neg A \vee B \vee \neg(\neg C)$	X	
$C \vee (\neg B \to \neg A)$	X	

Ausgangsformel: $\neg(A \to B)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$((C \wedge (A \wedge \neg A)) \to A) \wedge \neg(A \to B)$	X	
$\neg A \vee \neg B$		X
$\neg A \wedge B$		X

Ausgangsformel: $(A \to B) \leftrightarrow C$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$((\neg A \vee B) \to C) \wedge (C \to (\neg A \vee B))$	X	
$C \leftrightarrow (B \to A)$		X
$A \to B \vee C$		X

Ausgangsformel: $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$A \to A \vee B$		X
$\neg C \wedge A \wedge C$	X	
$(A \vee B) \to A$		X

8 Punkte

b) Es reichen 6 Schritte:

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	1	4
1	$\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)$	7	1
2	$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee (\neg A \vee C)$	6	2
3	$(\neg(\neg A) \wedge \neg B) \vee (\neg(\neg B) \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C)$	10	2
4	$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C)$	2	2
5	$\neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee C \vee (B \wedge \neg C)$	3	1
6			
7	$\neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee C \vee (\neg C \wedge B)$		

12 Punkte

Aufgabe 7: *10 Punkte*

Zwei mögliche Schrittfolgen mit demselben Ergebnis:

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$(\neg(A \wedge B) \wedge C) \rightarrow ((A \vee B) \wedge C)$	1	1
1	$\neg(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge C)$	7	1
2	$\neg(\neg(A \wedge B)) \vee \neg C \vee ((A \vee B) \wedge C)$	10	1
3	$(A \wedge B) \vee \neg C \vee ((A \vee B) \wedge C)$	5	1
4	$(A \wedge B) \vee \neg C \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$		

Schritt	Formel	Theo.	Anw.
	$(\neg(A \wedge B) \wedge C) \rightarrow ((A \vee B) \wedge C)$	1	1
1	$\neg(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge C)$	5	1
2	$\neg(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$	7	1
3	$\neg(\neg(A \wedge B)) \vee \neg C \vee ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$	10	1
4	$(A \wedge B) \vee \neg C \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$		

Aufgabe 8: *8 Punkte*

PL1-Formel über Σ und V ?	ja	nein
$\forall n\ (Zwei > Zwei - Eins)$	X	
$Neun(Vier \wedge Zwei \wedge Drei)$		X
$\forall y\ \forall x\ (Primzahl(x) \wedge Primzahl(y) \rightarrow Primzahl((x+y)+1))$	X	
$\forall x\ (\exists y\ \neg(\neg Gilt(y) \wedge \forall x\ Gilt(x)))$	X	
$\exists x\ (x < 3 \wedge x > 9 \wedge Primzahl(x+1))$	X	
$\neg\forall x\ \exists Q\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (Q(x) \rightarrow P(x))$		X
$\forall x\ \forall y\ (R(x,y,z) \rightarrow \forall x\ R(x,y,z))$	X	
$\neg\exists x\ \forall y\ (Q(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall z\ Q(z)$		X
$\forall sohn\ \exists vater(sohn)\ (Elternteil(vater(sohn)))$		X
$\exists x \wedge y\ (\forall z\ (R(z,x,y) \leftrightarrow R(z,y,x)))$		X

Aufgabe 9: *8 Punkte*

Äquivalent in PL1 ?	ja	nein
$\forall y\, \forall z\, (F(y) \wedge G(z))$ und $\forall x\, F(x) \wedge \forall z\, G(z) \wedge \forall y\, F(y)$	X	
$\forall x\, \neg F(x) \wedge \forall y\, G(y) \wedge (\forall z\, H(z) \vee \forall z\, I(z))$ und $\forall x\, (G(x) \wedge \neg F(x)) \wedge \forall z\, (H(z) \vee I(z))$		X
$\neg \exists x \neg (\forall z G(x) \rightarrow H(z))$ und $\forall z\, \neg G(z) \vee \forall x\, H(x)$	X	
$\forall x\, F(x) \wedge \exists x\, (F(x) \wedge G(x)) \wedge \forall y\, G(y)$ und $\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$		X

Zeile 1: $\forall x\, F(x) \wedge \forall z\, G(z) \wedge \forall y\, F(y)$
$\downarrow$ 3.28 (5) / Umbenennung v. Variablen
$\forall y\, F(y) \wedge \forall z\, G(z) \wedge \forall y\, F(y)$
$\downarrow$ Kommutativität
$\forall y\, F(y) \wedge \forall y\, F(y) \wedge \forall z\, G(z)$
$\downarrow$ Idempotenz und Ersetzungsregel
$\forall y\, F(y) \wedge \forall z\, G(z)$
$\downarrow$ 3.28 (3)
$\forall y\, \forall z\, (F(y) \wedge G(z))$

Zeile 3: $\neg \exists x \neg (\forall z G(x) \rightarrow H(z))$
$\downarrow$ 3.28 (1)
$\forall x\, \forall z\, G(x) \rightarrow H(z)$
$\downarrow$ Def. Implikation
$\forall x\, \forall z\, \neg G(x) \vee H(z)$
$\downarrow$ 3.28 (5) / zweimaliges Umbenennen (x und z vertauschen)
$\forall z\, \forall x\, \neg G(z) \vee H(x)$
$\downarrow$ 3.28 (2)
$\forall z\, \neg G(z) \vee \forall x\, H(x)$

Aufgabe 10: *8 Punkte*

a) F
$\equiv \exists z\,(\neg\exists y\,(P(y,z) \vee \forall x\,(Q(y,z))))$
$\downarrow$ 2. unter 3.28 (1)
$\equiv \exists z\,(\forall y\,\neg(P(y,z) \vee \forall x\,(Q(y,z))))$
$\downarrow$ de Morgan
$\equiv \exists z\,(\forall y\,(\neg P(y,z) \wedge \neg\forall x\,(Q(y,z))))$
$\downarrow$ 1. unter 3.28 (1)
$\equiv \exists z\,(\forall y\,(\neg P(y,z) \wedge \exists x\,\neg(Q(y,z))))$
$\downarrow$ 3. unter 3.28 (2)
$\equiv \exists z\,(\forall y\,(\exists x\,\neg P(y,z) \wedge \neg(Q(y,z))))$
$\downarrow$ Weglassen von Klammern
$\equiv \exists z\,\forall y\,\exists x\,(\neg P(y,z) \wedge \neg Q(y,z))$
= F in Pränexform

b) Der Kern der Pränexform lautet $\neg P(y,z) \wedge \neg Q(y,z)$.
Dieser befindet sich bereits in DNF.

Aufgabe 11: *8 Punkte*

Von I erfüllt?	ja	nein
$P(C)$		X
$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	X	
$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	X	
$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$		X
$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y))$	X	
$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y) \wedge Q(y))$		X
$\forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \rightarrow Q(y))$		X
$\exists x \forall y(P(x) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow Q(y)))$	X	

$P(C)$ wird von I *nicht* erfüllt, denn $C_I \notin P_I$.

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ wird von I erfüllt, denn $a \in P_I$ und $a \in Q_I$.

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wird von I erfüllt,
denn für jedes $u \in \{a,b,c,d\}$, $u \in P_I$ oder $u \in Q_I$.

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
wird von I *nicht* erfüllt, denn $b \in P_I$ und $b \notin Q_I$.

$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)) \equiv \neg\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$
wird von I erfüllt, denn $Q_I \neq \varnothing$.

$\forall x \exists y(P(x) \rightarrow R(x,y) \wedge Q(y)) \equiv \neg\exists x(P(x) \wedge \neg\exists y(R(x,y) \wedge Q(y)))$
wird von I *nicht* erfüllt, denn $b \in P_I$ und für kein $u \in \{a,b,c,d\}$, $R(b,u)$ und $Q(u)$.

$\forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \rightarrow Q(y)) \equiv \neg\exists x \exists y(P(x) \wedge R(x,y) \wedge \neg Q(y))$
wird von I *nicht* erfüllt, denn $b \in P_I$ und $(b,b) \in R_I$ und $b \notin Q_I$.

$\exists x \forall y(P(x) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow Q(y))) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x \forall y(R(x,y) \rightarrow Q(y)))$
wird von I erfüllt, denn $c \notin P_I$.