Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich

Postanschrift: FernUniversität Hagen - Praktische Informatik VII - D - 58084 Hagen

Name, Vorname

Straße, Nr.

PLZ, Wohnort

Kurs 1601 – Formale Grundlagen der Informatik

Klausur am 08.02.2003, 10.00 – 13.00 Uhr

Klausurort:

- ❑ Berlin
- ❑ Bochum
- ❑ Frankfurt
- ❑ Hamburg
- ❑ Karlsruhe
- ❑ Kassel
- ❑ Köln
- ❑ München
- ❑ Bregenz
- ❑ Wien
- ❑ Sonderregelung

Zusätzliche Angaben (für Schein)

❑ Frau ❑ Herr geb. am ___ . ___ . 19___

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**Summe**
erreichbare Punkte	*7*	*10*	*8*	*8*	*8*	*12*	*12*	*9*	*8*	*10*	*8*	*100*
bearbeitet												
erreichte Punktzahl												

Datum: _____ Korrektur: _____

Klausur zum Kurs 1601 "Formale Grundlagen der Informatik"
im Wintersemester 2002/03

Beachten Sie bitte die folgenden Hinweise:

- Füllen Sie das Deckblatt aus.
- Sollten Sie eine Klausurteilnahmebescheinigung für das Finanzamt benötigen, füllen Sie bitte den entsprechenden Vordruck aus. Die Bescheinigung wird von der FernUniversität abgestempelt und Ihnen zusammen mit der korrigierten Klausur zugeschickt.
- Überprüfen Sie bitte die Vollständigkeit der Aufgabenstellungen: Die Klausur umfaßt *11 Aufgaben*; die maximal erreichbare Punktzahl beträgt *100 Punkte*.
- Schreiben Sie mit Tinte oder Kugelschreiber. Zur Lösung der Aufgaben sollten Sie (soweit der Platz reicht) die ausgegebenen Aufgabenblätter verwenden.
- Schreiben Sie auf jedes Lösungsblatt oben Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und zu welcher Aufgabe es gehört. Das ist insbesondere für die von Ihnen zusätzlich eingefügten Lösungsblätter wichtig.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Die Klausurdauer beträgt 3 Stunden.
- Die korrigierte Klausur erhalten Sie zusammen mit einer Musterlösung zurück.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Ihre Kursbetreuer

Name: Matrikelnummer: _ _ _ _ _ _ _

1601 Formale Grundlagen der Informatik

Klausur

Aufgabe 1: *7 Punkte*

Sei A die Menge $\{a, 3, 2\}$ und B die Menge $\{b, a, 1, 3\}$. Tragen Sie in der folgenden Tabelle die Kardinalität der dort aufgeführten Mengen ein.

Menge	Kardinalität
$A \cup \{b\}$	
$A \cap B$	
$\mathcal{P}(A \cup B)$	
$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$	
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$	
$A \times \{a\} \times B$	
$(A \times B) \setminus (\{a\} \times B)$	

Aufgabe 2: *10 Punkte*

Betrachten Sie die beiden folgenden homogenen zweistelligen Relation R_1 und R_2 über der dreielementigen Menge $\{a, b, c\}$:

$$R_1 = \{(a,b),(c,c),(c,b),(a,c),(b,b)\}$$
$$R_2 = \{(a,b),(a,a),(c,a),(b,a),(a,c)\}$$

Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf R_1 bzw. R_2 zutreffen und welche nicht.

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
irreflexiv				
konnex				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				

Jedes falsch gesetzte Kreuz führt zu einem Abzug von einem halben Punkt!

Aufgabe 3: *8 Punkte*

Betrachten Sie die folgendermaßen bestimmten Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f_1(n_1, n_2) = (n_2, n_1 + n_2)$$

$$f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f_2(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2 + n_2$$

$$f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f_3(n_1, n_2) = (n_1 + n_2)^2 + n_2$$

$$f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f_4(n_1, n_2) = \frac{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{2} + n_2$$

Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf die jeweilige Funktion zutreffen und welche nicht. (Beachten Sie dabei, dass $0 \in \mathbb{N}$.)

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein
injektiv								
surjektiv								

Jedes falsch gesetzte Kreuz führt zu einem Abzug von einem halben Punkt!

Aufgabe 4: *8 Punkte*

Betrachten Sie die folgenden vier Halbordnungen (wobei $0 \in \mathbb{N}$):

$M_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit Ordnungsrelation $\leq$

$M_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ mit Ordnungsrelation $\subseteq$

$M_3 = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ mit Ordnungsrelation $\subseteq$

$M_4 = \{0,1\} \times \{0,1\}$ mit Ordnungsrelation $\leq$, wobei
$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ gdw. $a_1 \leq a_2$ und $b_1 \geq b_2$, für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{0,1\}$

Geben Sie in der folgenden Tabelle jeweils das Infimum und das Supremum von M_i (in M_i) an, falls es existiert, und tragen Sie andernfalls einen Querstrich ein.

Halbordnung	M_1	M_2	M_3	M_4
Infimum				
Supremum				

Aufgabe 5: *8 Punkte*

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln, die nur mit dem NAND-Operator (|) aufgebaut sind:

$D_{14} = (A|(A|B))|(A|(A|B))$
$D_{12} = (B|(A|B))|(B|(A|B))$
$D_{16} = ((A|A)|A)|(B|(B|B))$
$D_7 = ((A|(A|B))|(B|(B|A)))|((A|(B|A))|(B|(A|B)))$
$D_3 = A|(A|B)$
$D_4 = A|A$
$D_2 = ((A|B)|(A|B))|((A|B)|(A|B))$
$D_{13} = (A|A)|(A|A)$

Ordnen Sie jeder der unten stehenden Zeilen mit einem Wahrheitswerteverlauf diejenige der oben angegebenen aussagenlogischen Formeln D_j zu, die diesen Wahrheitswerteverlauf hat. Tragen Sie in der Spalte mit der Überschrift j nur den Index der Formel ein.

A:	T	T	F	F	j
B:	T	F	T	F	
	F	F	T	T	
	T	T	F	F	
	F	T	T	T	
	F	F	F	F	
	F	T	F	F	
	T	F	F	T	
	T	F	T	T	
	F	F	T	F	

Aufgabe 6: *12 Punkte*

Formen Sie unter Verwendung der unten stehenden Tabelle die folgende Formel zunächst in VNF (verneinungstechnische Normalform) und dann in DNF (disjunktive Normalform) um:
$(((C \rightarrow E) \vee B) \rightarrow A) \vee ((C \vee E) \wedge (A \rightarrow B))$

Es gibt 5 Bedingungen, die Sie einhalten müssen:

- Benutzen Sie für die Herstellung der VNF nur die folgenden Definitionen und Theoreme aus dem Kurs:
  1) Definition der Implikation
  2) Satz von der doppelten Negation
  3) de Morgansches Gesetz für die Disjunktion [$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$]
  4) de Morgansches Gesetz für die Konjunktion [$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$]

  Für die anschließende Herstellung der DNF dürfen Sie zusätzlich folgende Theoreme verwenden:
  5) Kommutativität für die Disjunktion
  6) Kommutativität für die Konjunktion
  7) Distributivität für die Disjunktion [$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$]
  8) Distributivität für die Konjunktion [$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$]
  9) Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch
  10) Satz vom ausgeschlossenen Dritten

- Die Assoziativgesetze dürfen Sie ohne explizite Erwähnung mitverwenden.

- Verwenden Sie in jedem Umformungsschritt eines der obigen Theoreme und geben Sie dessen Nummer und die Anzahl der Anwendungen in den entsprechenden Spalten an. In einem Schritt können Sie jeweils die maximal gewünschte Anzahl der Anwendungen ein und desselben Theorems zusammenfassen.

- Verwenden Sie maximal 12 Schritte.

- Kreuzen Sie zusätzlich in jeder Tabellenzeile an, ob die Formel in dieser Zeile in VNF ist oder nicht.

Anmerkung: Das Theorem für den 1. Schritt ist vorgegeben.

Name: Matrikelnummer: _ _ _ _ _ _ _

Schritt	Formel F	The.	Anw.	VNF	
				ja	n.
	$(((C \to E) \vee B) \to A) \vee ((C \vee E) \wedge (A \to B))$	1			
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

Aufgabe 7: *12 Punkte*

Entscheiden Sie, ob die jeweilige Formel die angegebene Eigenschaft besitzt oder nicht, und kreuzen Sie entsprechend die Felder an. Tragen Sie in der letzten Spalte die Anzahl der verschiedenen Modelle für die Formel ein.
Abzug für falsches Kreuz: 0,5 Punkte.

Formel F	F allgemeingültig		F erfüllbar		F inkonsistent		F in VNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$(I \vee (\neg G \wedge \neg(\neg H))) \leftrightarrow (H \vee I)$									
$(K \rightarrow H) \wedge (\neg K \rightarrow G)$									
$\neg((\neg G \vee I) \rightarrow (G \rightarrow I))$									
$(G \rightarrow (G \wedge I)) \wedge (\neg(I \wedge G) \wedge G)$									

Aufgabe 8: *9 Punkte*

Entscheiden Sie für jede der folgenden vier Ausgangsformeln, ob die Formeln in den Tabellenzeilen logisch äquivalent zu dieser Ausgangsformel sind oder nicht. Kreuzen Sie entsprechend an.
Abzug für falsches Kreuz: 0,5 Punkte.

Ausgangsformel: $\neg(D \to E)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$\neg D \vee \neg E$		
$((G \wedge (D \wedge \neg D)) \to D) \wedge \neg(D \to E)$		
$\neg D \wedge E$		

Ausgangsformel: $(D \wedge E) \wedge (\neg D \vee \neg E)$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$(D \vee E) \to D$		
$D \to D \vee E$		
$\neg G \wedge D \wedge G$		

Ausgangsformel: $(D \to E) \leftrightarrow G$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$G \leftrightarrow (E \to D)$		
$((E \vee \neg D) \to G) \wedge (G \to (\neg D \vee E))$		
$D \to E \vee G$		

Aufgabe 9: *8 Punkte*

Gegeben sei eine Signatur Σ, bestehend aus den Konstanten *Eins*/0, *Zwei*/0, *Drei*/0, *Sechs*/0 und *Acht*/0, den Funktionssymbolen +/2 und $*$/2 und den Prädikatensymbolen *P*/1, *Q*/1, *R*/3, >/2, </2, *Integer*/1, *Wahre_Aussage*/1, *Kuchen*/1, *Apfel*/1 und *Saft*/1. Sei V eine Menge von Individuenvariablen. Sind die folgenden Ausdrücke jeweils syntaktisch korrekte PL1-Formeln über Σ und einer Variablenmenge V?

Hinweis:

- Die aus der Arithmetik bekannten Symbole $+$, $*$, $<$ und $>$ dürfen in Infixnotation verwendet werden.
- Betrachten Sie alle nicht in der Definition der Signatur verwendeten Symbole als Variable aus V.

PL1-Formel über Σ und V ?	ja	nein
$\forall n\ (Zwei > Zwei - Eins)$		
$Acht(Vier \wedge Zwei \wedge Zwei)$		
$\forall y\ \forall x\ (Integer(x) \wedge Integer(y)) \rightarrow Integer((x + y) * Drei))$		
$\forall x\ (\exists y\ \neg(\neg Wahre_Aussage(y) \vee \forall x\ \exists z\ Wahre_Aussage(x)))$		
$\exists x\ (Integer(x) \wedge x < Drei \wedge x > Zwei)$		
$\neg\forall x\ \forall y\ \exists P\ (Q(x, y) \rightarrow P(x)) \vee (Q(y, y) \rightarrow P(y))$		
$\forall x\ \forall y\ (R(x, y, z) \rightarrow \forall x\ R(x, y, z))$		
$\neg\exists x\ \forall y\ (Q(x, y) \vee P(y)) \wedge \forall z\ Q(z, y)$		
$\forall Apfel\ \exists Kuchen(Apfel) \vee \exists Saft(Apfel)$		
$\exists x \wedge y\ (\forall z\ (R(z, x, y) \leftrightarrow R(z, y, x)))$		

Abzug für falsches Kreuz: 0,5 Punkte.

Aufgabe 10: *10 Punkte*

Welche der angegeben Äquivalenzen für PL1 Formeln sind allgemeingültig?

Allgemeingültig?	ja	nein
$\neg\forall x\ F \leftrightarrow \exists x\ \neg F$		
$\neg\forall x\ F \leftrightarrow \neg\exists x\ F$		
$\neg\forall x\ \neg F \leftrightarrow \neg\exists x\ F$		
$\forall x\ F \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg F$		
$\neg\forall x\ \neg F \leftrightarrow \exists x\ F$		
$\forall x\ F \vee \forall x G \leftrightarrow \forall x\ (F \vee G)$		
$\forall x\ F \vee \forall x\ G \leftrightarrow \forall x\ (F \wedge G)$		
$(\exists x\ F) \wedge (\exists x\ G) \leftrightarrow \exists x\ (F \wedge G)$		
$\forall x\ \neg F \leftrightarrow \exists x\ \neg F$		
$\forall x\ \forall y\ F \leftrightarrow \forall y\ \forall x F$		

Abzug für falsches Kreuz: 0,5 Punkte.

Aufgabe 11: *8 Punkte*

Sei F die Formel $\forall x\ (\neg \forall y\ (P(y,x) \wedge \exists z\ (R(y,x))))$.

a) Überführen Sie F durch Äquivalenzumformungen in Pränexform. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt jeweils die angewendete Regel an. *5 Punkte*

b) Geben Sie den Kern der Pränexform an und überführen Sie ihn in DNF. *3 Punkte*