Aufgabe 1 Mengen (10 Punkte)

A, B, A' und B' seien beliebige Teilmengen einer Grundmenge Ω. Welche Beziehung(en) bestehen zwischen den folgenden Mengenpaaren (/ = "es besteht keine Beziehung")?

		$=$	$\subseteq$	$\supseteq$	$\in$	/	
(1)	$\overline{A} \cap \overline{B}$						$\overline{(A \cap B)}$
(2)	$\overline{A} \cap \overline{B}$						$\overline{(A \cup B)}$
(3)	A						$\mathcal{P}(A)$
(4)	$\{A\}$						$\mathcal{P}(A)$
(5)	$\emptyset$						$\mathcal{P}(A)$
(6)	$\mathcal{P}(A)$						$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(7)	$\mathcal{P}(A \cup B)$						$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(8)	A						$A \times B$
(9)	$(A \times B) \cup (A' \times B')$						$(A \cup A') \times (B \cup B')$
(10)	$(A \times B) \cap (A' \times B')$						$(A \cap A') \times (B \cap B')$

Muster:

	$=$	$\subseteq$	$\supseteq$	$\in$	/	
A		$\times$				$A \cup B$
A					$\times$	B

Es ist stets $A \subseteq A \cup B$, und zwischen A und B besteht im Allgemeinen keine der genannten Beziehungen.

Aufgabe 2 Relationen (10 Punkte)

Teil 1 (5 Pkt.):
Seien $M_1 := \{2, 3, 5\}$ und $M_2 := \{2, 4, 8, 10\}$ und die Relation *teilt* sei definiert durch

$$(x, y) \in \textit{teilt} :\Leftrightarrow \text{ es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = y$$

Stellen Sie *teilt* auf $M_1 \times M_2$ dar ...

- als Teilmenge von $M_1 \times M_2$:

- graphisch:

- als Matrix:

Teil 2 (5 Pkt.):
Zeigen Sie: Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (hier sei $0 \notin \mathbb{N}$) ist die durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$$

beschriebene zweistellige Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3 Funktionen (12 Punkte)

Wir definieren die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen (hier sei $0 \notin \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} G &:= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ U &:= \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ P &:= \{p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\} \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität (mit Begründung bzw. Beweis).

	injektiv	nicht injektiv	surjektiv	nicht surjektiv
$f_1 : P \times P \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto xy$				

Begründung:

	injektiv	nicht injektiv	surjektiv	nicht surjektiv
$f_2 : P \times P \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto xy^2$				

Begründung:

	injektiv	nicht injektiv	surjektiv	nicht surjektiv
$f_3 : G \times U \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto xy$				

Begründung:

	injektiv	nicht injektiv	surjektiv	nicht surjektiv
$f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto xy^2$				

Begründung:

Aufgabe 4 Aussagenlogik – Normalformen (10 Punkte)

Teil 1 (5 Pkt.):
Sei

$$G := \big(B \to (\neg A \to C)\big) \wedge \neg\big((C \vee \neg D \vee \neg E) \to (A \wedge \neg B \wedge \neg D)\big)$$

Welche der folgenden konjunktiven Normalformen sind zu G äquivalent? Markieren Sie die entsprechende Stelle in der Tabelle.

	Formel G'	$G \equiv G'$	$G \not\equiv G'$
(1)	$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (C \vee \neg D \vee \neg E)$		
(2)	$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee \neg E)$		
(3)	$C \vee \neg E$		
(4)	$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee \neg E)$		
(5)	$(A \vee \neg A \vee C \vee \neg D) \wedge (B \vee \neg D \vee \neg E)$		

Teil 2 (5 Pkt.):

Überführen Sie die folgende Formel in disjunktive Normalform:

$$G := \neg(A \leftrightarrow (B \to C))$$

Aufgabe 5 Aussagenlogik (9 Punkte)

Teil 1 (4 Pkt.):
Bestimmen Sie alle Modelle (also Belegungen $I : \{A, B\} \to \{T, F\}$ mit $Ausw_I(G) = T$.[1]) der Formel

$$G := \neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)$$

Teil 2 (5 Pkt.):
Es seien die folgenden Aussagen gegeben:

A : "Axel ist sauer"

B: "Babette ist sauer"

C: "Carmen lacht"

D: "Denis lacht"

Welche aussagenlogische(n) Formel(n) entsprechen dem folgenden Sachverhalt? Setzen Sie entsprechend das Kreuz in der Tabelle.

Carmen lacht, wenn, falls Axel sauer ist, Denis lacht. Denis lacht nicht, wenn Babette sauer ist, und Babette ist nicht sauer, wenn Carmen und Denis lachen.

	Formel	entspricht	entspricht nicht
(1)	$(C \to (A \to D)) \wedge (B \to \neg D) \wedge (\neg B \to (C \wedge D))$		
(2)	$(C \vee \neg(A \to D)) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (B \vee \neg(C \wedge D))$		
(3)	$((A \to D) \to C) \wedge (B \to \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg(C \wedge D))$		
(4)	$((A \wedge \neg D) \vee C) \wedge (B \to \neg D) \wedge \neg(B \wedge C \wedge D)$		
(5)	$((A \to D) \to C) \wedge (B \to \neg D) \wedge (B \vee \neg(C \wedge D))$		

[1] Erinnerung: Für eine Belegung I, die die Aussagenvariablen einer aussagenlogischen Formel G mit Wahrheitswerten T, F belegt, sei $Ausw_I(G)$ die Wertzuordnung, die sich aus I für die Formel G ergibt.

Aufgabe 6 Aussagenlogik (10 Punkte)

Statt der Wahrheitswerte $TRUE$ und $FALSE$ sind auch die Notationen 1 für $TRUE$ und 0 für $FALSE$ gebräuchlich.

Seien $\mathbf{V} = \{A, B, C, \dots\}$ Aussagenvariablen, G, G' aussagenlogische Formeln und sei die Belegung $\overline{I} : \mathbf{V} \to \{0, 1\}$ definiert durch $\overline{I}(X) = 1 - I(X)$ für alle Aussagenvariablen aus $\mathbf{V}$.

Beurteilen Sie die folgenden "Rechenregeln"! Wenn Sie ein "stimmt nicht"-Feld ankreuzen, geben Sie bitte eine Begründung (Gegenbeispiel) an.[2]

		stimmt	stimmt nicht
(1)	$Ausw_I(A \wedge B) = I(A) \cdot I(B)$		
(2)	$Ausw_I(G \wedge G') = Ausw_I(G) \cdot Ausw_I(G')$		
(3)	$Ausw_{\overline{I}}(G) = 1 - Ausw_I(G)$		
(4)	$Ausw_{\overline{I}}(G) = Ausw_I(\neg G)$		
(5)	$Ausw_I(A \leftrightarrow B) = 1 - max\{I(A) \cdot (1 - I(B)), I(B) \cdot (1 - I(A))\}$		

[2]Erinnerung: Für eine Belegung I, die die Aussagenvariablen einer aussagenlogischen Formel G mit Wahrheitswerten T, F belegt, sei $Ausw_I(G)$ die Wertzuordnung, die sich aus I für die Formel G ergibt.

Aufgabe 7 Prädikatenlogik (9 Punkte)

P, Q, R seien einstellige Prädikatensymbole, K ein zweistelliges Prädikatensymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol.

Verbinden Sie jeweils F_i und F_j mit einer gerichteten Kante von F_i nach F_j, wenn $F_i \models F_j$ gilt.

Muster (→ Abb.1)

$$\begin{aligned} F_1 &:= \forall x\ P(x) \leftrightarrow Q(x) \\ F_2 &:= \forall x\ P(x) \rightarrow Q(x) \\ F_3 &:= \forall x\ Q(x) \rightarrow P(x) \end{aligned}$$

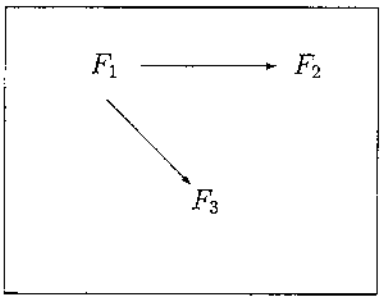
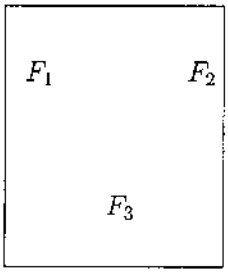


Abbildung 1: $F_1 \models F_2$ und $F_1 \models F_3$

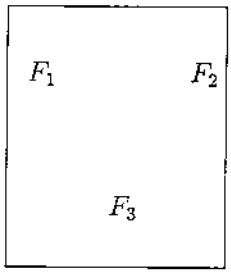
Teil 1 (3 Pkt.):

$$\begin{aligned} F_1 &:= \forall x \forall y\ K(x,y) \rightarrow K(f(x), f(y)) \\ F_2 &:= \forall x \forall y\ K(x,y) \wedge \neg K(y,x) \rightarrow K(f(x), f(y)) \\ F_3 &:= \forall x \forall y\ K(x,y) \wedge \neg K(y,x) \rightarrow K(f(x), f(y)) \wedge \neg K(f(y), f(x)) \end{aligned}$$



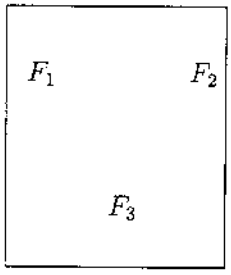
Teil 2 (3 Pkt.):

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= \exists x\ P(x) \wedge (\forall x\ P(x) \rightarrow P(f(x))) \\
F_2 &:= \neg\exists x\ P(x) \\
F_3 &:= \forall x\ P(x) \rightarrow P(f(x))
\end{aligned}
$$



Teil 3 (3 Pkt.):

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= \forall x\ (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \\
F_2 &:= \forall x\ (Q(x) \vee R(x)) \\
F_3 &:= \forall x\ P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))
\end{aligned}
$$



Aufgabe 8 Prädikatenlogik - Normalformen (6 Punkte)

Überführen Sie die folgende prädikatenlogische Formel in pränexe Normalform!

$$F := \big(\forall x\ A(x) \rightarrow (\exists y\ B(x,y))\big) \wedge \big(\forall x\ C(x) \rightarrow (\neg\exists y\ B(x,y))\big)$$

Aufgabe 9 Prädikatenlogik - Modellierung (12 Punkte)

Vor Ihnen liegen sechzehn Spielkarten in der folgenden Anordnung:

$^{2}\diamondsuit_{2}$	$^{3}\clubsuit_{3}$	$^{7}\heartsuit_{7}$	$^{7}\spadesuit_{7}$
$^{6}\heartsuit_{6}$	$^{9}\clubsuit_{9}$	$^{8}\heartsuit_{8}$	$^{6}\clubsuit_{6}$
$^{2}\clubsuit_{2}$	$^{9}\diamondsuit_{9}$	$^{9}\heartsuit_{9}$	$^{5}\clubsuit_{5}$
$^{2}\heartsuit_{2}$	$^{3}\spadesuit_{3}$	$^{8}\spadesuit_{8}$	$^{4}\clubsuit_{4}$

Wir betrachten die Signatur

$$\Sigma = \ (\ \{karo2/0\}, \\ \{neben/2, links_neben/2, kreuz/1, pik/1, herz/1, karo/1, zwei/1, \ldots, neun/1\})$$

wobei $kreuz, pik, herz, karo$ sich auf die Farbe der Karte und $eins, \ldots, neun$ sich auf ihren Wert bezieht.[3] Wir vereinbaren die folgende Deutung:

$neben(x, y)$ $:\Leftrightarrow$ x und y liegen nebeneinander (x liegt oberhalb, unterhalb, links oder rechts von y)

$links_neben(x, y)$ $:\Leftrightarrow$ x liegt links neben y

Die obige Spielkartenanordnung stellt eine Σ- Interpretation I mit der angegebenen Deutung dar. Es gilt beispielsweise $I \models_\Sigma \exists x \forall y \neg links_neben(y, x)$, denn zu den Karten am linken Rand gibt es keine, die links daneben liegen. Für welche der folgenden $\Sigma-$Formeln gilt $I \models_\Sigma F$ bzw. $I \not\models_\Sigma F$?

	F	$I \models_\Sigma F$	$I \not\models_\Sigma F$
(1)	$\forall x \ ((\neg \exists y \ links_neben(y, x)) \rightarrow (zwei(x) \vee sechs(x)))$		
(2)	$\exists x, y, z \ links_neben(y, x) \wedge links_neben(x, z) \wedge karo(y) \wedge kreuz(z)$		
(3)	$\forall x \forall y \ ((kreuz(x) \vee pik(x)) \wedge \neg vier(x) \wedge neben(x, y)) \rightarrow herz(y)$		
(4)	$\forall x \ ((kreuz(x) \vee pik(x)) \wedge \neg vier(x)) \rightarrow (\exists y \ neben(x, y) \wedge herz(y))$		
(5)	$\forall x \ pik(x) \rightarrow (acht(x) \vee (\exists y \ links_neben(y, x) \wedge herz(y))$		
(6)	$\forall x \ sieben(x) \rightarrow (pik(x) \rightarrow (\neg \exists y \ links_neben(x, y)))$		

[3] $\clubsuit$ = kreuz; $\spadesuit$ = pik; $\heartsuit$ = herz; $\diamondsuit$ = karo; der Wert ist die Zahl auf der Spielkarte.

Aufgabe 10 Prädikatenlogik (12 Punkte)

$\mathcal{F}$ sei die Menge aller geschlossenen prädikatenlogischen Formeln über einer Signatur Σ. Wir vereinbaren ferner

$$\begin{aligned} E &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \text{ erfüllbar}\} \\ W &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \text{ falsifizierbar}\} \\ A &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \text{ allgemeingültig}\} \end{aligned}$$

Teil 1 (7 Pkt.):
Beurteilen Sie die Aussagen in der Tabelle!

	richtig	falsch
$E \subseteq A$		
$A \subseteq E$		
$W \subseteq \overline{A}$		
$E \cap W = \emptyset$		
$\{\neg F \mid F \in A\} \subseteq W$		
$E \cup W = \mathcal{F}$		
$(E \cup W) \cap \overline{A} = \emptyset$		

Teil 2 (5 Pkt.):
Unter bestimmten Voraussetzungen kann man auf die Zugehörigkeit von Formeln zu einer der o.g. Mengen (bzw. deren Komplemente) schließen. Ordnen Sie F und G, wenn möglich, den angegebenen Mengen zu (Muster auf der nächsten Seite; die Formeln $\neg F$ bzw. $\neg G$ sind nicht zuzuordnen).

		E	$\overline{E}$	W	$\overline{W}$	A	$\overline{A}$
(1)	$\not\models \neg F$						
(2)	$F \models \neg F$						
(3)	$F \models G$ und $F \models \neg G$						
(4)	$F \models G$ und $F \not\models \neg G$						
(5)	$\models F$ und $\models \neg F \vee G$						

Muster:

	E	$\overline{E}$	W	$\overline{W}$	A	$\overline{A}$
$\models F \wedge G$	F, G			F, G	F, G	

$\models F \wedge G$ impliziert $F, G \in E$ (F und G sind erfüllbar), $F, G \in \overline{W}$ (F und G sind nicht falsifizierbar) und $F, G \in A$ (F und G sind allgemeingültig).