Name: _____ Matrikelnummer: _____

1601 Formale Grundlagen der Informatik

Klausur

Aufgabe 1: *8 Punkte*

Gegeben sei das Universum $U = \{a,b,c,d,e\}$ mit den Teilmengen $A = \{a,b,e\}$ und $B = \{b,c\}$. Tragen Sie in der folgenden Tabelle die Kardinalität der dort aufgeführten Mengen ein.

Menge	Kardinalität
$U \setminus \overline{A}$	
$A \cap (A \cup B)$	
$A \setminus \overline{B}$	
$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$	
$A \times \overline{B}$	
$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(\overline{B})$	
$\mathscr{P}(A \cap \mathscr{P}(\overline{B}))$	
$\mathscr{P}(U) \setminus \{\overline{A}\}$	

(Hinweis: $\mathscr{P}$ steht für die Bildung der Potenzmenge.)

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 2: *10 Punkte*

Betrachten Sie die beiden folgenden homogenen zweistelligen Relationen R_1 und R_2 über der dreielementigen Menge $\{a,b,c\}$:

$$R_1 = \{(a,a),(b,a),(c,a),(c,c),(b,c)\}$$
$$R_2 = \{(a,c),(a,a),(c,a),(b,a),(a,b)\}$$

Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf R_1 bzw. R_2 zutreffen und welche nicht.

	R_1		R_2	
	ja	nein	ja	nein
irreflexiv				
transitiv				
konnex				
rechtseindeutig				
antisymmetrisch				

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 3: *8 Punkte*

Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird durch folgende Ordnungsrelation zu einer Halbordnung:

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \quad \text{gdw.} \quad a_1 \leq a_2 \text{ und } b_1 \leq b_2$$

Gegeben seien die folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (wobei $0 \in \mathbb{N}$):

$$M_1 = \{1,2\} \times \mathbb{N}$$

$$M_2 = \{(k, 3-k) \mid 0 \leq k \leq 3\}$$

$$M_3 = \{(2k, 3k) \mid 0 < k \leq 3\}$$

$$M_4 = \{(k, l) \mid 0 < k < l \leq 3\}$$

Tragen Sie in der folgenden Tabelle jeweils das Infimum und das Supremum von M_i (in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) ein, falls es existiert, und andernfalls einen Querstrich.

	M_1	M_2	M_3	M_4
Infimum				
Supremum				

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 4: *7 Punkte*

Betrachten Sie die wie folgt definierten zweistelligen Operationen $*$ und $\oplus$ auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned} x*y &= xy \quad \text{(übliche Multiplikation)} \\ x\oplus y &= \max(x,y) = \begin{cases} x & x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $x, y \in [0,1]$.
Geben Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle an, welche der dort aufgeführten Eigenschaften auf die Multiplikation $*$ bzw. die Maximumbildung $\oplus$ zutreffen und welche nicht.

Eigenschaft	Trifft zu?	
	Ja	Nein
$*$ ist idempotent		
$\oplus$ ist idempotent		
$\oplus$ ist kommutativ		
$*$ ist assoziativ		
Distributivität gilt für $x*(y\oplus z)$		
Absorption gilt für $x*(x\oplus y)$		
Absorption gilt für $x\oplus(x*y)$		

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0.5 Punkte abgezogen.)

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 5: *6 Punkte*

Modellieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen durch aussagenlogische Formeln.
Verwenden Sie dabei Aussagevariablen, die aus dem ersten Buchstaben des zugehörigen zentralen Begriffs (***Rad, Lok, Kohle***...) bestehen.
Stellen Sie *positive* Aussagen durch die nicht-verneinte Form einer Variablen dar, zum Beispiel ***Lok arbeitet korrekt*** durch die Aussagenvariable L, und stellen Sie *negativ zu bewertende* Aussagen durch die verneinte Form einer Variablen dar, zum Beispiel ***Kohle fehlt*** als $\neg K$ oder ***Lok defekt*** als $\neg L$.

Aussage	Formel
Wenn ein Rad oder eine Achse defekt ist, funktioniert die Lok nicht.	
Wenn die Lok fehlerfrei fährt, muss Kohle vorhanden sein.	
Wenn Wasser fehlt, dann funktioniert der Dampfkessel nicht.	
Der Dampfkessel funktioniert genau dann, wenn Wasser und Kohle vorhanden sind.	
Wenn die Lok defekt ist, dann fehlt Kohle oder Wasser.	
Wenn die Rauchbildung nicht in Ordnung ist, dann muss der Dampfkessel defekt sein oder Kohle und Wasser fehlen.	

Name: _____ Matrikelnummer _____

Aufgabe 6: *12 Punkte*

Entscheiden Sie, ob die jeweilige Formel die angegebene Eigenschaft besitzt oder nicht, und kreuzen Sie entsprechend die Felder an. Tragen Sie in der letzten Spalte die Anzahl der verschiedenen Modelle für die Formel ein.

Formel F	F allgemeingültig		F erfüllbar		F inkonsistent		F in VNF		Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$\neg((\neg B \vee D) \rightarrow (B \rightarrow D))$									
$(E \rightarrow D) \wedge (\neg E \rightarrow C)$									
$(E \rightarrow (E \wedge G)) \wedge (\neg(G \wedge E) \wedge E)$									
$(D \vee (\neg A \wedge \neg(\neg C))) \leftrightarrow (C \vee D)$									

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 7: *12 Punkte*

Entscheiden Sie für jede der folgenden drei Ausgangsformeln, ob die Formeln in den Tabellenzeilen logisch äquivalent zur angegebenen Ausgangsformel sind oder nicht. Kreuzen Sie entsprechend an.

Ausgangsformel: $((B \rightarrow C) \vee (D \wedge B)) \rightarrow A$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$(\neg C \wedge \neg D) \vee A$		
$(B \wedge \neg C \wedge (\neg B \vee \neg D)) \vee A$		
$A \vee \neg B \vee C \vee (D \wedge B)$		
$\neg((\neg B \vee C) \vee (D \wedge B)) \vee A$		

Ausgangsformel: $((D \wedge C) \rightarrow E) \wedge C$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$((E \wedge C) \vee (\neg D \wedge C))$		
$(D \vee C \vee E) \wedge C$		
$\neg(C \wedge E) \rightarrow (C \wedge \neg D)$		
$(C \wedge \neg D) \vee (C \wedge E)$		

Ausgangsformel: $B \vee (C \vee (D \wedge \neg C) \vee (C \rightarrow \neg B))$

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$(B \rightarrow \neg C) \vee B \vee ((C \wedge \neg C) \wedge (C \vee D))$		
$B \vee C \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (\neg D \wedge \neg C)$		
$(B \rightarrow \neg C) \vee \neg C \vee D$		
$C \rightarrow D$		

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 8: *8 Punkte*

Konstruieren Sie jeweils eine möglichst einfache aussagenlogische Formel, die den angegebenen Wahrheitswerteverlauf zeigt.
Verwenden Sie als Junktoren nur $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.

a)

A:	T	T	F	F	Formel
B:	T	F	T	F	
	T	T	F	T	
	F	F	T	F	
	F	F	F	F	
	T	T	T	T	

b)

A:	T	T	T	T	F	F	F	F	Formel
B:	T	T	F	F	T	T	F	F	
C:	T	F	T	F	T	F	T	F	
	F	F	T	F	F	F	F	F	
	T	F	F	F	T	T	T	T	
	T	T	T	T	F	T	T	T	
	F	F	T	F	F	F	T	F	

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 9: *12 Punkte*

Entscheiden Sie durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle, welche Eigenschaften für Formeln der Aussagenlogik bzw. Prädikatenlogik erster Stufe zutreffen.

	entscheidbar?		semi-entscheidbar?		unentscheidbar?	
Aussagenlogik	ja	nein	ja	nein	ja	nein
allgemeingültige Formeln						
falsifizierbare Formeln						
erfüllbare Formeln						
unerfüllbare Formeln						
Prädikatenlogik erster Stufe	ja	nein	ja	nein	ja	nein
allgemeingültige Formeln						
falsifizierbare Formeln						
erfüllbare Formeln						
unerfüllbare Formeln						

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 10: *10 Punkte*

Gegeben sei eine Signatur Σ, bestehend aus den Konstanten *0*/0, *Manfred*/0, *Elfriede*/0, *Mutter*/0, *Grossmutter*/0, *Drei*/0 und *Neun*/0, den Funktionssymbolen +/2 und −/2 und den Prädikatensymbolen >/2, </2, *eltern*/3, *aelter*/2, *primzahl*/1, *vater*/1 und *weiblich*/1. Sei V eine Menge von Individuenvariablen. Sind die folgenden Ausdrücke jeweils syntaktisch korrekte PL1-Formeln über Σ und einer Variablenmenge V?

Hinweise:

- Die aus der Arithmetik bekannten Symbole $+$, $-$, $<$ und $>$ dürfen in Infixnotation verwendet werden.
- Betrachten Sie alle nicht in der Definition der Signatur verwendeten Symbole als Variable aus V.

PL1-Formel über Σ und V?	ja	nein
$\forall n\ (Neun > Neun - Drei)$		
$primzahl(Drei \wedge Neun)$		
$\forall y\ \forall x\ (primzahl(x) \wedge primzahl(y) \rightarrow primzahl((x+y)+0))$		
$\forall x\ (\exists y\ \neg(\neg weiblich(y) \wedge \forall x\ weiblich(x)))$		
$\exists x \wedge y\ (\forall z\ (eltern(z,x,y) \rightarrow eltern(z,y,x)))$		
$\forall x\ \forall y\ (eltern(x,z,y) \rightarrow \forall x\ eltern(x,z,y))$		
$\forall z\ \forall y\ \forall x\ aelter(y,z) \wedge aelter(x,y) \rightarrow aelter(x,z)$		
$\neg\forall x\ \exists Mutter\ (Mutter(x) \rightarrow aelter(x,y)) \vee (vater(x) \rightarrow aelter(x,y))$		
$\neg\exists x\ \forall y\ (eltern(x,y) \wedge vater(y)) \vee \forall z\ vater(z)$		
$\forall vater(Mutter)\ (weiblich(Mutter))$		

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 11: *9 Punkte*

Welche der angegebenen Äquivalenzen für PL1-Formeln sind allgemeingültig?

Allgemeingültig?	ja	nein
$\neg\exists x\, F \leftrightarrow \neg\forall x\, F$		
$\neg\forall x\, F \leftrightarrow \exists x\, \neg F$		
$\neg\forall x\, \neg F \leftrightarrow \neg\exists x\, F$		
$\neg\forall x\, \neg F \leftrightarrow \exists x\, F$		
$\forall x\, F \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg F$		
$\forall x\, F \vee \forall x G \leftrightarrow \forall x\, (F \vee G)$		
$\forall x\, \exists y\, F \leftrightarrow \exists y\, \forall x F$		
$\forall x\, \neg F \leftrightarrow \exists x\, \neg F$		
$\forall x\, F \vee \forall x\, G \leftrightarrow \forall x\, (F \wedge G)$		

Markieren Sie in der oben angegebenen Tabelle jeweils, ob die Formeln allgemeingültig sind.
(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)

Name: _____ Matrikelnummer: _____

Aufgabe 12: *9 Punkte*

C.S. Peirce unterscheidet die drei Inferenzarten Abduktion, Deduktion und Induktion.

a) Welche dieser Inferenzarten ist bei den folgenden Schlussfolgerungen vorherrschend?

a.1) Wenn das Kühlwasser leer ist, leuchtet die Temperaturwarnanzeige.
Die Temperaturwarnanzeuge leuchtet.

Das Kühlwasser ist leer.

Inferenzart: ___

a.2) Peters Esel ist störrisch.
Heinrichs Esel ist störrisch.
Marias Esel ist störrisch.

Alle Esel sind störrisch

Inferenzart: _____

a.3) Fische haben Flossen.
Flipper hat Flossen.

Flipper ist ein Fisch.

Inferenzart: ____

a.4) Alle Fische können schwimmen.
Bambi kann nicht schwimmen.

Bambi ist kein Fisch

Inferenzart: _____

a.5) Alle Fische haben Flossen.
Flipper ist ein Fisch.

Flipper hat Flossen.

Inferenzart: _____

a.6) Jedesmal, wenn Peter bisher nach London kam, war es regnerisch.

In London ist es immer regnerisch.

Inferenzart: _____

b) Welche der drei Inferenzarten beschreiben zwingend gültige (d.h. wahrheitserhaltende) Schlussfolgerungen und welche nicht? Bitte kreuzen Sie an!

Schlussweise	Zwingend gültig?	
	Ja	Nein
Abduktion		
Deduktion		
Induktion		

(Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden 0,5 Punkte abgezogen.)