## 1601 Formale Grundlagen der Informatik

### Lösungsvorschläge zur Klausur

### Aufgabe 1:

Menge	Kardinalität
$U \setminus \overline{A}$	3
$A\cap (A\cup B)$	3
$A \setminus \overline{B}$	1
$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$	4
$A \times \overline{B}$	9
$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(\overline{B})$	4
$\mathscr{P}(A\cap\mathscr{P}(\overline{B}))$	1
$\mathscr{P}(U)\setminus\{\overline{A}\}$	31

$$\begin{split} |U\setminus \overline{A}| &= |\overline{A}| = |A| = 3\\ |A\cap (A\cup B)| &= |A| = 3 \quad \text{(Absorptionsgesetz)}\\ |A\setminus \overline{B}| &= |A\setminus \{a,d,e\}| = |\{b\}| = 1\\ |\overline{\overline{A}\cap \overline{B}}| &= |\overline{A}\cup \overline{\overline{B}}| = |A\cup B| = |\{a,b,d,e\}| = 4\\ |A\times \overline{B}| &= |A|\cdot |\overline{B}| = 3\cdot 3 = 9\\ |\mathscr{P}(A)\cap \mathscr{P}(\overline{B})| &= |\mathscr{P}(A\cap \overline{B})| = |\mathscr{P}(\{a,e\})| = 2^2 = 4\\ |\mathscr{P}(A\cap \mathscr{P}(\overline{B}))| &= |\mathscr{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1\\ |\mathscr{P}(U)\setminus \{\overline{A}\}| &= |\mathscr{P}(U)| - 1 = 2^5 - 1 = 31, \quad \text{da $\overline{A}\subseteq U$ und daher $\overline{A}\in \mathscr{P}(U)$.} \end{split}$$

### Aufgabe 2:

### 10 Punkte

	F	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>		
	ja	nein	ja	nein	
irreflexiv		Х		X	
transitiv	Х			X	
konnex		Х		X	
rechtseindeutig		Х		X	
antisymmetrisch	X			X	

 $R_1$  ist *nicht* irreflexiv, da  $(a,a) \in R_1$ .

 $R_1$  ist transitiv, da  $(b,c),(c,a),(b,a) \in R_1$  und für alle weiteren Belegung der Variablen x,y,z derart, dass  $(x,y),(y,z) \in R_1$ , stets y=z.

 $R_1$  ist *nicht* konnex, da  $(b,b) \notin R_1$ .

 $R_1$  ist *nicht* rechtseindeutig, da z.B.  $(b,a),(b,c) \in R_1$ , aber  $a \neq c$ .

 $R_1$  ist antisymmetrisch, da  $(x,y),(y,x)\in R_1$  nur für x=y=a und x=y=c.

 $R_2$  ist *nicht* irreflexiv, da  $(a,a) \in R_2$ .

 $R_2$  ist *nicht* transitiv, da  $(b,a),(a,c) \in R_1$ , aber  $(b,c) \notin R_1$ .

 $R_2$  ist *nicht* konnex, da  $(b,c),(c,b) \notin R_2$ .

 $R_2$  ist *nicht* rechtseindeutig, da z.B.  $(a,b),(a,c)\in R_1$ , aber  $b\neq c$ .

 $R_2$  ist *nicht* antisymmetrisch, da z.B.  $(a,b),(b,a) \in R_1$ , aber  $a \neq b$ .

### Aufgabe 3:

	$M_1$	<i>M</i> <sub>2</sub>	<i>M</i> <sub>3</sub>	<i>M</i> <sub>4</sub>
Infimum	(1,0)	(0,0)	(2,3)	(1,2)
Supremum		(3,3)	(6,9)	(2,3)

### Aufgabe 4:

### 7 Punkte

Eigenschaft	Trifft zu?		
	Ja	Nein	
* ist idempotent		Х	
⊕ ist idempotent	X	,	
⊕ ist kommutativ	Χ		
* ist assoziativ	Х		
Distributivität gilt für $x * (y \oplus z)$	Х		
Absorption gilt für $x * (x \oplus y)$		X	
Absorption gilt für $x \oplus (x * y)$	X		

### Erläuterungen:

- \* ist nicht idempotent, denn es ist beispielsweise  $0.5 * 0.5 = 0.25 \neq 0.5$ .
- $\oplus$  ist idempotent, denn für alle  $x \in [0,1]$  ist  $x \oplus x = \max(x,x) = x$ .
- $\oplus$  ist kommutativ, denn es ist  $x \oplus y = \max(x, y) = \max(y, x) = y \oplus x$  (das Maximum von x, y hängt offenbar nicht von der Reihenfolge der Argumente x, y ab).
- \* is assoziativ, d.h. x\*(y\*z) = x(yz) = (xy)z = (x\*y)\*z (elementare Eigenschaft der Multiplikation).
- Wegen  $x \ge 0$  ist tatsächlich  $x * (y \oplus z) = x \max(y, z) = \max(xy, xz) = (x * y) \oplus (x * z)$ , d.h. die Distributivitätsbedingung gilt.
- Für x = 0.5 und y = 0 erhalten wir  $0.5 * (0.5 \oplus 0) = 0.5 \max(0.5, 0) = 0.5^2 = 0.25 \neq 0.5$ . Also gilt die erste Absorptionseigenschaft nicht.
- Wegen  $x, y \in [0, 1]$  ist  $xy \le x$  und daher  $x \oplus (x * y) = \max(x, xy) = x$ . Die zweite Absorptionseigenschaft ist demnach gegeben.

# Aufgabe 5:

## 6 Punkte

Aussage	Formel
Wenn ein Rad oder eine Achse defekt ist,	$\neg R \lor \neg A \to \neg L$
funktioniert die Lok nicht.	
Wenn die Lok fehlerfrei fährt, muss	$L \rightarrow K$
Kohle vorhanden sein.	
Wenn Wasser fehlt, dann funktioniert	$\neg W \rightarrow \neg D$
der Dampfkessel nicht.	
Der Dampfkessel funktioniert genau	$D \leftrightarrow W \wedge K$
dann, wenn Wasser und Kohle vorhan-	
den sind.	
Wenn die Lok defekt ist, dann fehlt Koh-	$\neg L \rightarrow \neg K \lor \neg W$
le oder Wasser.	
Wenn die Rauchbildung nicht in Ord-	$\neg R \to \neg D \lor (\neg K \land \neg W)$
nung ist, dann muss der Dampfkessel de-	
fekt sein oder Kohle und Wasser fehlen.	

## Aufgabe 6:

## 12 Punkte

Formel F		allge- gültig	F erf	üllbar	F in stent	konsi-	F in V	VNF	Zahl der
	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	Mod.
$\neg((\neg B \lor D) \to (B \to D))$		X		Х	X			Х	0
$(E \to D) \land (\neg E \to C)$		X	X			X		Х	4
$(E \to (E \land G)) \land (\neg (G \land E) \land E)$		Х	-	Х	X			Х	0
$(D \lor (\neg A \land \neg (\neg C))) \leftrightarrow (C \lor D)$		X	X			X		Χ	7

### Lösung zum Beispiel mit Wahrheitswertetafeln

В	D	$B \rightarrow D, \neg B \lor D$	$(\neg B \lor D) \to (B \to D)$	$\neg((\neg B \lor D) \to (B \to D))$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

E	D	С	$E \rightarrow D$	$\neg E \rightarrow C$	$(E \to D) \land (\neg E \to C)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	<b>T</b>	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	<b>T</b>	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

E	G	$E \wedge G$	$\neg (G \land E)$	$E \to (E \wedge G)$	$(\neg G \land E) \land E$	$(E \to (E \land G)) \land (\neg (G \land E) \land E)$
T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	<b>F</b>
F	F	F	T	T	F	F

$\overline{A}$	,C	D	$\neg A$	$\neg A \land \neg (\neg C)$	$C \lor D$	$D \lor (\neg A \land \neg (\neg C))$	$(D \vee (\neg A \wedge \neg (\neg C))) \leftrightarrow (C \vee D)$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F.	F	<b>T</b> .	T	$\mathbf{T}$
T	F	F	F	F	F	F	$\mathbf{T}$
F	T	T	T	T ·	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T

# Aufgabe 7:

## 12 Punkte

Ausgangsformel:	$(B \rightarrow C) \lor (E$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
Transamentorimor.	AD ACTIVE	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

Formel	äqu	ivalent
	ja	nein
$(\neg C \land \neg D) \lor A$		X
$(B \land \neg C \land (\neg B \lor \neg D)) \lor A$	X	
$A \vee \neg B \vee C \vee (D \wedge B)$		Х
$\neg((\neg B \lor C) \lor (D \land B)) \lor A$	Х	

Ausgangsformel:  $((D \land C) \rightarrow E) \land C$ 

Formel	äquivalent		
	ja	nein	
$((E \land C) \lor (\neg D \land C))$	X		
$(D \lor C \lor E) \land C$		Х	
$\neg (C \land E) \to (C \land \neg D)$	X		
$(C \wedge \neg D) \vee (C \wedge E)$	X		

Ausgangsformel:  $B \lor (C \lor (D \land \neg C) \lor (C \rightarrow \neg B))$ 

Formel	äquivalent	
	ja	nein
$ (B \to \neg C) \lor B \lor ((C \land \neg C) \land (C \lor D)) $	X	
$B \lor C \lor (B \to \neg C) \lor (\neg D \land \neg C)$	Х	
$(B \to \neg C) \lor \neg C \lor D$		X
$C \rightarrow D$		X

## Aufgabe 8:

### 8 Punkte

a)								
-	<i>A</i> :	Т	T	F	F		Formel	
	<i>B</i> :	T	F	T	F			
		T	T	F	T	$A \lor \neg B$		
		F	F	Т	F	$\neg A \wedge B$		

b)										
	<b>A</b> :	T	T	T	T	F	F	F	F	Formel
	<i>B</i> :	T	T	F	F	T	T	F	F	
	<i>C</i> :	T	F	T	F	T	F	T	F	
*		F	F	T	F	F	F	F	F	$A \wedge \neg B \wedge C$
		T	F	F	F	T	T	T	T	$\neg A \lor (B \land C)$
		T	T	T	T	F	T	T	T.	$\neg(\neg A \land B \land C)$
		F	F	T	F	F	F	T	F	$\neg B \land C$

 $A \land \neg A \text{ (oder: } B \land \neg B)$  $A \lor \neg A \text{ (oder: } B \lor \neg B)$ 

Für die 3. Formel kann statt  $\neg(\neg A \land B \land C)$  auch  $A \lor \neg B \lor \neg C$  geschrieben werden.

## Aufgabe 9:

	entscheidbar?		semi- entsch	neidbar?	unentscheidbar?		
Aussagenlogik	ja	nein	ja	nein	ja	nein	
allgemeingültige Formeln	X		X			X	
falsifizierbare Formeln	X		X			X	
erfüllbare Formeln	X		X			X	
unerfüllbare Formeln	X		X			X	
Prädikatenlogik erster Stufe	ja	nein	ja	nein	ja	nein	
allgemeingültige Formeln		X	X		X		
falsifizierbare Formeln		X		X	X		
erfüllbare Formeln		X		X	X		
unerfüllbare Formeln		X	X		X		

# Aufgabe 10:

# 10 Punkte

PL1-Formel über $\Sigma$ und $V$ ?	ja	nein
$\forall n \ (Neun > Neun - Drei)$	X	
$primzahl(Drei \land Neun)$	-	X
$\forall y \ \forall x \ (primzahl(x) \land primzahl(y) \rightarrow primzahl((x+y)+0))$	X	
$\forall x \ (\exists y \ \neg (\neg weiblich(y) \land \forall x \ weiblich(x)))$	X	
$\exists x \land y \ (\forall z \ (eltern(z, x, y) \rightarrow eltern(z, y, x)))$		X
$\forall x \forall y (eltern(x,z,y) \rightarrow \forall x eltern(x,z,y))$	X	
$\forall z \ \forall y \ \forall x \ aelter(y,z) \land aelter(x,y) \rightarrow aelter(x,z)$	X	
$\neg \forall x \; \exists Mutter \; (Mutter(x) \rightarrow aelter(x,y)) \lor (vater(x) \rightarrow aelter(x,y))$		X
$\neg \exists x \ \forall y \ (eltern(x,y) \land vater(y)) \lor \forall z \ vater(z)$		X
∀vater(Mutter) (weiblich(Mutter))		X

# Aufgabe 11:

Allgemeingültig?	ja	nein
$\neg \exists x  F \leftrightarrow \neg \forall x  F$		X
$\neg \forall x  F \leftrightarrow \exists x  \neg F$	X	
$\neg \forall x  \neg F \leftrightarrow \neg \exists x  F$		X
$\neg \forall x  \neg F \leftrightarrow \exists x  F$	X	
$\forall x  F \leftrightarrow \neg \exists x  \neg F$	X	
$\forall x  F \vee \forall x G \leftrightarrow \forall x  (F \vee G)$		X
$\forall x \exists y F \leftrightarrow \exists y  \forall x F$		X
$\forall x \neg F \leftrightarrow \exists x \neg F$		X
$\forall x  F \vee \forall x  G \leftrightarrow \forall x  (F \wedge G)$		X

### Aufgabe 12:

9 Punkte

#### a.1) Inferenzart: Abduktion

Begründung: Die Diagnose/Annahme, dass das Kühlwasser leer ist, erklärt mit der angegebenen Regel die Beobachtung, dass die Temperaturwarnanzeige leuchtet.

#### a.2) Inferenzart: Induktion

Begründung: Von einzelnen Beobachtungen über störrische Esel wird auf eine allgemeine Regel geschlossen.

#### a.3) Inferenzart: Abduktion

Begründung: Die Beobachtung, dass Flipper Flossen hat, kann mit der angegebenen Regel durch die Annahme erklärt werden, dass Flipper ein Fisch ist.

In diesem Fall ist die Annahme falsch, denn Flipper ist ein Delphin. Dies zeigt, dass abduktive Schlüsse keine zwingend gültigen (wahrheitserhaltenden) Schlüsse sind.

#### a.4) Inferenzart: Deduktion

Begründung: Das Beispiel entspricht einer Anwendung der deduktiven Schlussregeln ∀-Instantiierung (aus 'Alle Fische können schwimmen' folgt: 'Wenn Bambi ein Fisch ist, dann kann Bambi schwimmen') und Modus tollens (aus 'Wenn Bambi ein Fisch ist, dann kann Bambi schwimmen' und 'Bambi kann nicht schwimmen' folgt 'Bambi ist kein Fisch').

#### a.5) Inferenzart: Deduktion

Begründung: Das Beispiel entspricht einer Anwendung der deduktiven Schlussregeln  $\forall$ -Instantiierung (aus 'Alle Fische haben Flossen' folgt 'Wenn Flipper ein Fisch ist, dann hat Flipper Flossen') und Modus Ponens (aus 'Wenn Flipper ein Fisch ist, dann hat Flipper Flossen' und 'Flipper ist ein Fisch' folgt 'Flipper hat Flossen').

### a.6) Inferenzart: Induktion

Begründung: Von einzelnen Beobachtungen/konkreten Sachverhalten (den bisherigen London-Reisen Peters) wird auf eine allgemeine Regelhaftigkeit geschlossen.

In diesem Fall ist die Verallgemeinerung falsch, denn selbst in London ist es nicht immer regnerisch. Dies demonstriert, dass induktive Schlüsse keine zwingend gültigen Schlüsse sind. b)

Schlussweise	Zwingend gültig?			
	Ja	Nein		
Abduktion		X		
Deduktion	Χ			
Induktion		X		

Erläuterung: Ein Beispiel, dass abduktive (= erklärende) Schlüsse nicht notwendig gültig sind, wurde mit a.3) bereits gegeben. Dass auch induktive Schlüsse (Verallgemeinerungen) nicht notwendig gültig sind, zeigt a.6). Dagegen bezeichnet man als deduktive Schlussweisen gerade diejenigen, bei denen aus korrekten Annahmen stets korrekte Schlussfolgerungen gezogen werden.